3. 極限球とユークリッド幾何

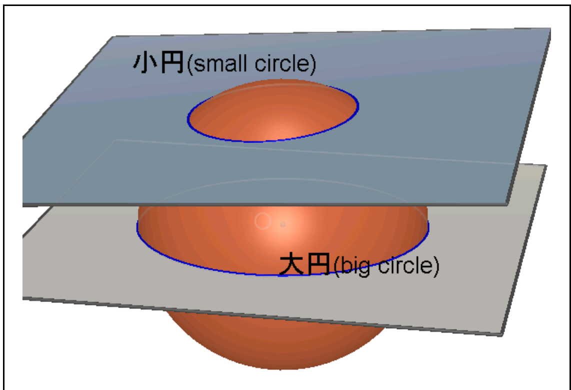
極限球では「全ての軸は回転軸」ですが，これは双曲平面とそれと直交する直線に関しても成り立ちます．しかし極限球には双曲平面にはない驚くべき特徴があり，それは，

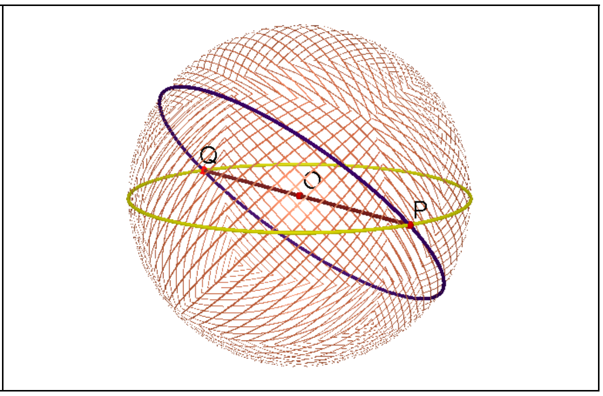
極限球上では，ユークリッド幾何が成り立つ …(*)

事です．即ち「極限球は平ら」です．詳しく言うと，極限球上では「3 本の極限円で囲まれた三角形の内角の和は180°」です．即ち　極限球上で極限円をユークリッド直線とみなすと ユークリッドの第 5 公準が成り立ち，従ってユークリッド幾何の定理が成り立ちます．

例えば，極限球上では「円周と半径rの長さの比は $\pi = 3.1415\cdots$」で「円の面積$S = \pi r^2$」です．さらにピタゴラスの定理，余弦定理，正弦定理なども成り立ちます．ただし，**長さ**と**角度**は極限球に沿って測ります．この様に「直線⇒極限円」の言換えで，ユークリッド幾何の全ての定理が極限球上で成立します．

準備として，超簡単にユークリッド空間の球面幾何を復習します．球面幾何では，球面の「中心を通る平面で切った時にできる**大円**」を球面幾何の**直線**とみなします．故に「**中心が無限に遠ざかるときの大円の極限が極限円**」とも言えます．





明らかに，
球面上では, 2 本の直線は必ず 2 点で交わり，ユークリッドの第 5 公準は成り立ちません．

では，極限球上でも極限円は必ず 2 点で交わるのでしょうか？

そうではなく「極限球上の 1 点 A を通り，ある極限円と交わらない極限円は 1 本だけある」と言うのが (*)の意味です．

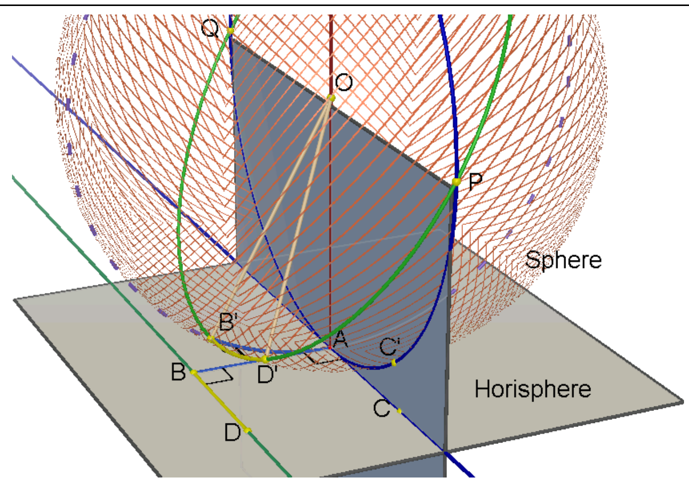
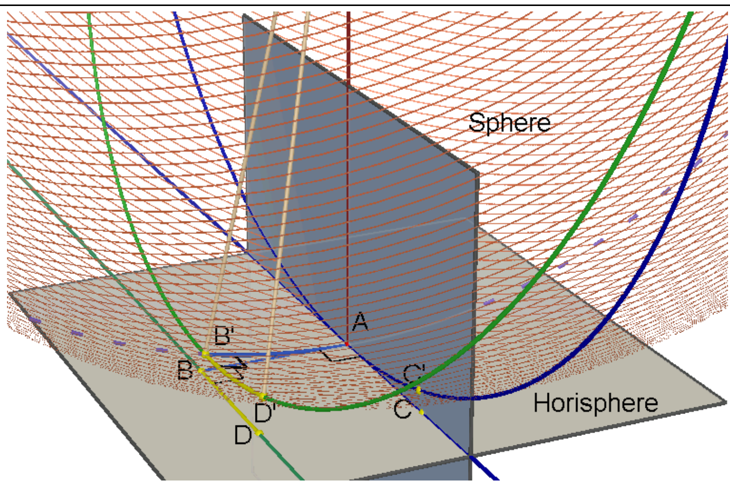
以下「極めて直感的に」(*)を証明してみます.

3-1.　同側内角の和が 180 度のときは，極限円は交点を持たない.

見易くする為，極限球は平面で描いてあります．極限球上の極限円 AC ,BD は AB と直交し「同側内角の和=∠CAB＋∠DBA＝180°」です．球 O 上の大円 AC’,B’D’は AB’と直交し

$\overline{AB'}=\overline{AB},\ \overline{B'D'}=\overline{BD},\ \overline{AC'}=\overline{AC}$ とします．この時，大円 AC’と B’D’は，2 点 P,Q で交わります．A を球の南極とすると，P と Q は球の赤道上にあります.

ここで中心 O を無限遠上方に遠ざけると B’,C’,D’ は B,C,D に収束します．ところが，P と Q は，赤道上にあるので無限遠点 P_0,Q_0 に移ります． 即ち極限円 AC と BD は ２つの無限遠点で交わります．これは「この二つの極限円が交点を持たない事」を意味します.

	2 つの大円が 赤道上の点 P,Q で交わる.
	中心を無限上方に 遠ざけると，P,Q は 無限遠点となる

horisphere&parallel1.cg3

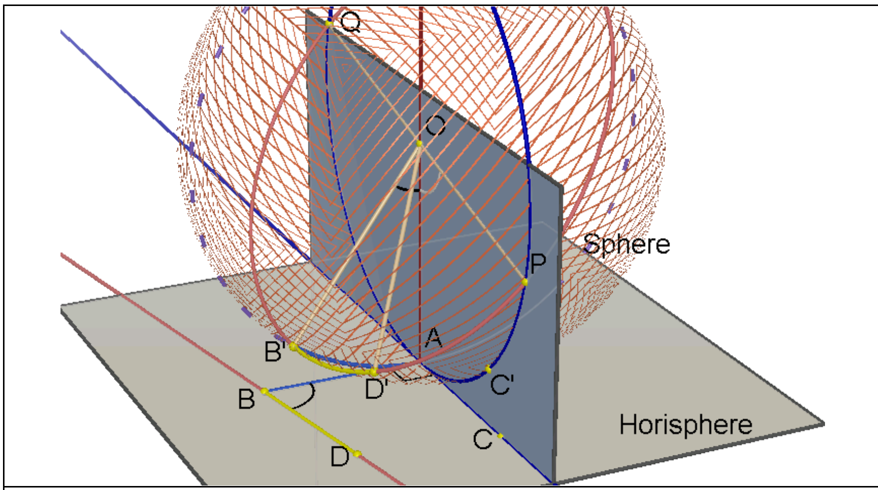
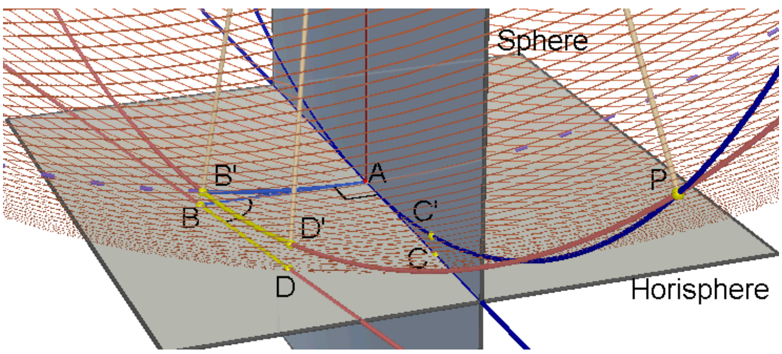
3-2. 同側内角の和が 180 度より小さいときは, 極限円は交点を持つ.

今度は，極限球上の極限円 AB は AC とは直交しますが，$\angle DBA < 90^\circ$ とします．従って「同側内角の和$=\angle CAB + \angle DBA < 180^\circ$」です．さらに AB’,AC’,BD’は球 O 上の大円で，

$AB' \perp AC'$，$\angle DBA = \angle D'B'A$，$\overline{AB'} = \overline{AB}$, $\overline{B'D'} = \overline{BD}$, $\overline{AC'} = \overline{AC}$ とします．この時，

大円 AC’と B’D’の交点 P,Q は２つあり，P は球の南半球に，Q は球の北半球にあります.

ここで中心 O を無限遠上方に遠ざけると B’,C’,D’ は B,C,D に収束します．いま△AB’P に注目すると，O が無限遠点に移っても $\overline{AB'}$, $\angle AB'D'$,$\angle B'AC'$ は一定なので，中心角「$\angle AOP \to 0$」. 故に P は極限球上で「**通常の点**」P_0 に移ります．　一方「$\angle AOQ \to 180^\circ$」なので，Q は「**無限遠点**」に移ります．ゆえに極限円 AC と BD は，点 P_0 で交わります.

	2 つの大円が点 P,Q で交わる．P は球の南半球，Q は北半球にある.
	球の中心 O を無限上方に遠ざける．このとき，P は極限球上の通常点に, Q は無限遠点に移る

horisphere&unparallel.cg3

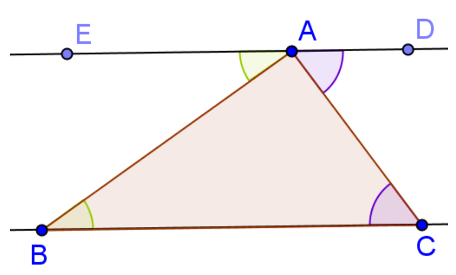
(注)「$\angle AOQ$ が小さくなっても,半径がそれ以上に大きくなったら駄目」なので，本当はもう少し説明する必要がありますが，省略します.

3-3. 極限球上では，ユークリッド幾何が成り立つ

以上 3-1,3-2 より

同側内角の和が180°の時は 2 つの極限円は交わらず，それ以外の時は交わります

故に「平行⇔交わらない」と定め，さらに「極限円⇔ユークリッド直線」と書き換えると，ユークリッドの第 5 公準が成り立ちます．従って，ユークリッドの 5 つの公準から導けるユークリッド幾何の定理は全て成り立ちます．例えば三角形の内角和も180°となります．

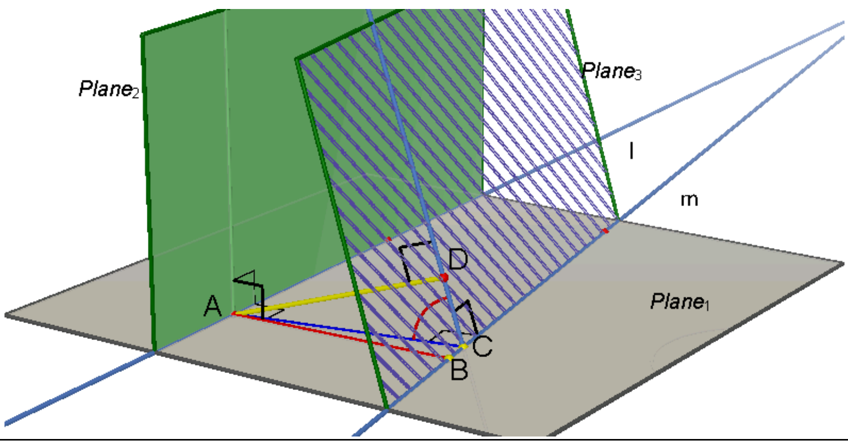


A を通り∠ACB=∠CAD となるように半直線 AD を，また∠ABC=∠BAE となるように半直線 AE を引きます．ところが 第 5 公準が成り立つ時，A を通り AB と交わらない直線は 1 本しか引けないので，半直線 AD と AE は直線 ED の一部で ∠CAD+∠BAE=180°です．故に△ABC の内角の和は180°となります．

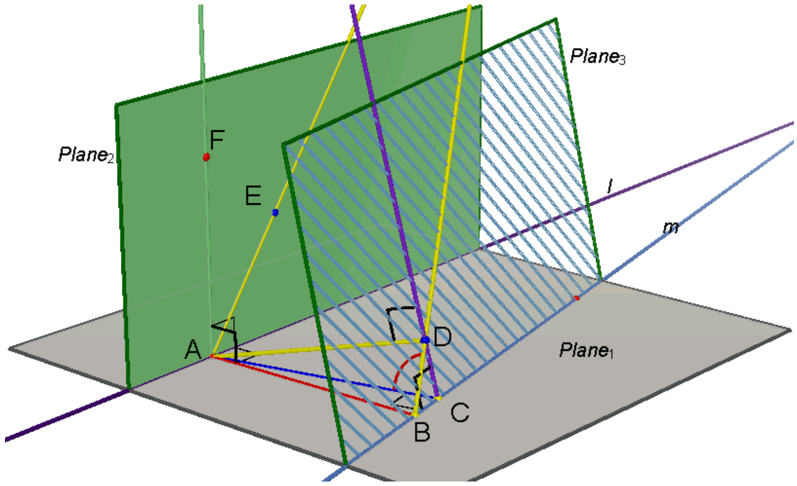
3-1,3-2 の説明は厳密な証明ではありません．定理の *感じ* を直感的に捉えたものです．この定理は，双曲幾何の最重要定理だと思うので，Bolyai の証明を紹介します． 寺坂先生が「大変直感的で，ナイーブな証明」と言われた証明です．

3-4. Bolyai による証明（「空間論」§9）

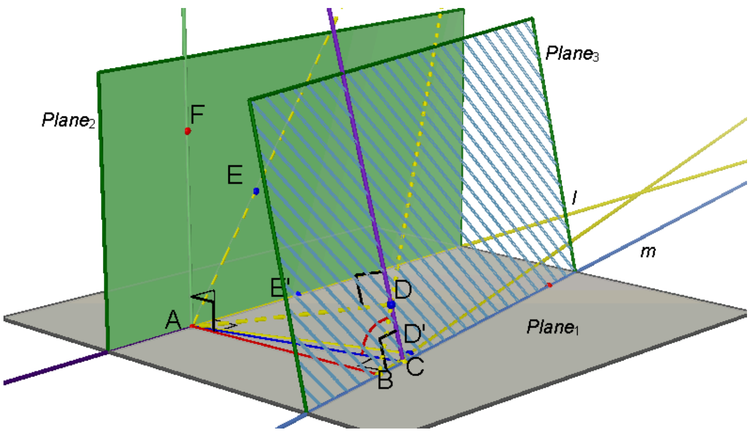
双曲平面π_1,π_2,π_3があり，π_1とπ_2は垂直，π_3がπ_1となす角は鋭角で，π_1とπ_2の交線lと，π_1とπ_3の交線mは極限平行とする．このときπ_2とπ_3は交わる．

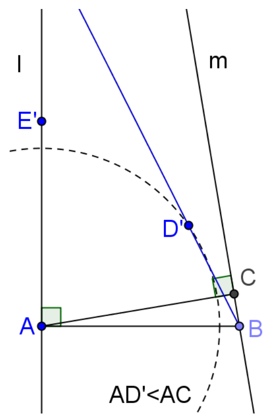


[証明] l 上に点 A をとり，m 上に BA ⊥ l となる点 B，π_2 上に AF ⊥ l となる点 F をとる．
A から m に下ろした垂線の足を C，　さらに A から π_3 に下ろした垂線の足を D とすると，
「3 垂線の定理」は双曲空間でも成り立つので「CD ⊥ m」．
角の定義と仮定より，π_1 と π_2 のなす角:∠BAF は直角，π_1 と π_3 のなす角:∠ACD は鋭角．



「AB ⊥ π_2」となるので，平面 ABD と π_2 の交線上に 1 点 E を取ると「AE ⊥ AB」．故に AB を軸としたある回転 f で，E を l 上に持ってくることができる． f による D,E の像を D',E'とすると，D'も平面 π_1 上に落ちる．ところが「AD ⊥ π_3」だから「$AD' = AD < AC$」．AC は A から m までの最短距離だから，線分 AD' は m と共有点を持たない．即ち，点 D' は∠ABC 内の点となる．しかし l と m は極限平行なので，直線 BD' は l と交わる．故に D'と E'を f^{-1} で戻すと，直線 AE と直線 BD も交わる．すなわち π_2 と π_3 は交わる．(Q.E.D.)





[Bolyai's proof.cg3]()

極限円は「軸を含む平面と極限球の交線」なので，この定理は「同側内角の和が 180 度より小さいときは，極限円は交点を持つ」事を表しています．

「同側内角の和が 180 度のときは，極限円は交点を持たない事…(*)」はここでは証明していません．（この時は，C=D=D' となるので 直線 BD'は m と一致し，AE'と BD' は極限平行で交わりません．故に AE と BD も交点を持ちません．しかし他の直線の組が交点を持つかもしれないので，これだけでは証明になっていません．）しかしそもそも第一節で述べた様に，「ある曲面とその上の曲線が 公準①～④を満たせば，同側内角の和が 180 度の時は，2 曲線は交点を持たない」（平行線は必ず存在する）ので，公準の①~④が証明されれば，(*)の証明は不要です．

そして，公準①～③が成り立つ事はほとんど明らかです．しかし，公準④:「直角は全て重ねられる（三角形の合同条件が成り立つ）事」は，そんなに明らかではないです．次章で「極限球は均質で，極限球上では図形の移動が可能である事（…**)」 の説明をします．すると(*)の証明もされた事になります．

(注１) (**)の移動の内，「図形の向きを変えない合同変換」を「放物的移動」といいます．「放物的移動」で極限球上の，任意の合同な図形（長さと角の等しい三角形など）は，重ね合わす事ができます．

(注２) 「双曲空間内では 図形の移動が可能であること」は，もちろん大前提です．しかし「双曲空間内の全ての曲面上で，図形の移動が可能であること」は，成り立ちません．ユークリッド空間内でも，球や円柱の表面上なら図形の移動が可能ですが，円錐の場合は，軸に関する回転は可能ですが，頂点の方向への移動はできません．（∵頂点に近い方が曲率は大きい．）直感的に言うと，「ある曲面上で図形の移動が可能である事」は「その曲面が均質（曲率が同じ）である事」です．

　双曲空間内の均質な曲面は，球，極限球，等距離面などで，その曲面上の合同な図形は，異なる種類の合同変換で，全て重ね合わす事ができます．その合同変換は「回転移動」，「放物的移動」，「双曲的移動」と呼ばれます．（この他に共通の移動として「対称移動」があります．）

3-5. 極限球の形（その２） － H^3 モデル

前章で，極限球は「そのままの形では」ユークリッド空間内に埋め込めない事を見ました．ここでは「極限球とユークリッド平面の類似性」から，思い切って極限球を平面の形に描いて見ます．このとき，直線や平面は曲げて描かれることになります．
図1 は直線を真直ぐに，平面を平らに，極限球を球面に描いたものです．図2 は，同じ図形を極限球を平らに描いたもので，極限円は真直ぐに，直線は上に凸の曲線に，平面は上に凸の曲面になります．

図2 では，極限球が「均質にかつ無限に広がる様子」がイメージし易くなります．また直線 AP が真上に来るに従って 極限球との交点 R が A から遠ざかる様子も見やすいです．
一方，図1 では「極限球が曲がっている事」が表現されていますが，それは「平面から見て曲がっている事」を表しているだけで，極限球から見ると平面の方が曲がっています．

直線を「最短曲線」，平面を「ある定直線に直交する直線の集合」と定義すると，「直線や平面の概念」と「真直ぐと言う概念」は異なる次元にある事が分かります．よって「何を真直ぐに描くか」と言うのは数学的には全く自由です．

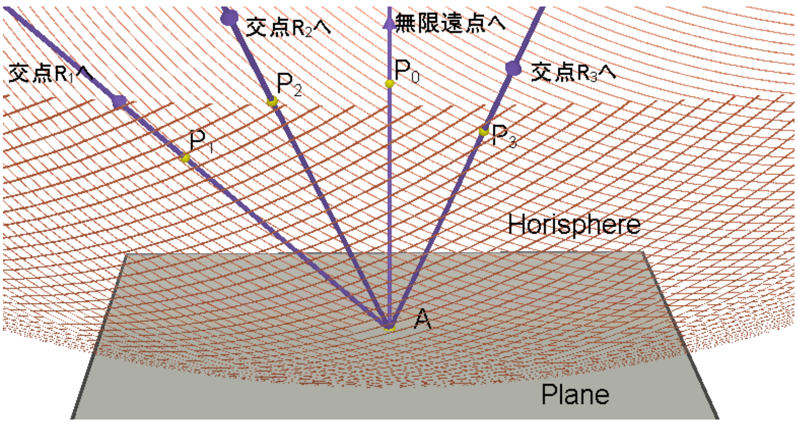


図1
平面を平らに，
直線を真直ぐに
極限球を曲げて
描いた図

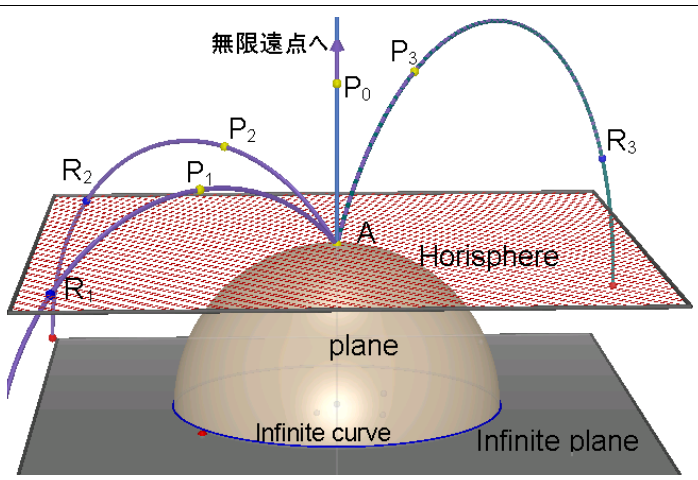


図2
極限球を平らに，
極限円を真直ぐに
直線を上に凸の曲線に
平面を上に凸の曲面で
描いた図

そして「極限球上ではユークリッド幾何が成り立つ」ので，極限球を平らに描くと，様々な定理が見易くなります. 例えば下図では共に「$\angle P+\angle Q+\angle R=180^\circ$」ですが，この性質は，図2 の方が見易いです.

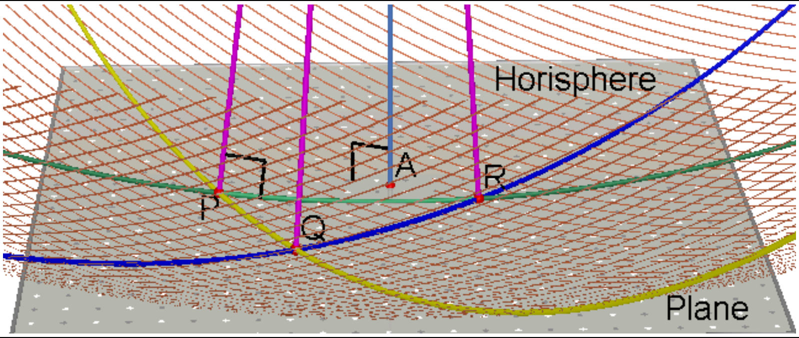


図1
平面を平らに，
直線を真直ぐに
極限球を曲げて
描いた図

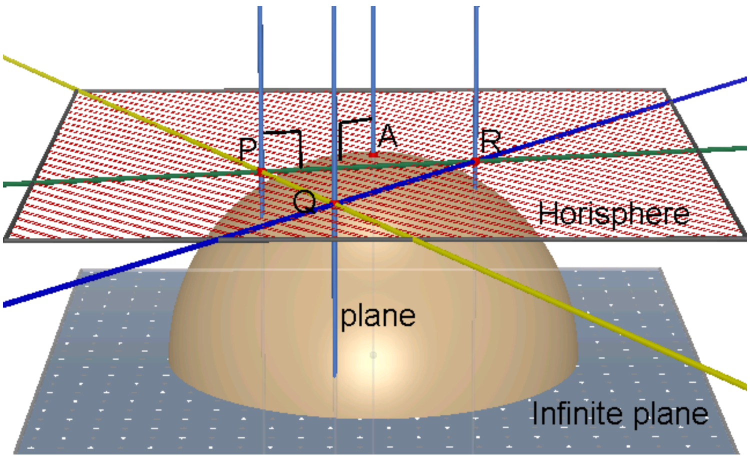


図2
極限球を平らに，
極限円を真直ぐに
直線を上に凸の曲線に
平面を上に凸の曲面で
描いた図

図2 の図は $\mathbf{H}^3$ モデルと言います．このモデルの特徴は「極限球を平らに描くことができる」点と「角度は見た目どおり」と言う点です．一方「直線（最短曲線）が曲線」となるので，長さは見た目どおりではありません．例えば「極限円の軸は極限球と直交する直線」ですから，図2 では，z 軸と平行なユークリッド直線に見えます．　しかし，軸は無限遠点を共有するので軸の間の距離は z の減少関数になるはずです．よって「本当の距離」は「見た目の距離」と異なります．

(注)実は，極限球が平らに見えるのは，軸が $z=0$ と直交する直線の時だけで，それ以外は「$z=0$ に接する球面」になります．詳しくは「モデルの章」をご覧ください．

$\mathbf{H}^3$ モデルでは，微小線分の「平面 $z=0$ からの高さ」を z，「ユークリッド的長さ（見える長さ）」を ds とする時，その双曲的長さ dl を「$dl=ds/z$」で定めます．　故に dl は見た目と異なり，上の方ほど短くなります．逆に「$z\to 0$」の時は，本当の距離 dl は無限に長くなるので，「$z=0$」は無限遠点の集合(無限遠平面)となります．上図で平面が $z=0$ と共有点を持っているのは，平面は無限に広がっているからです．

$\mathbf{H}^3$モデルでは，平面は

$$z=0\text{に中心を持つ半球 または } z=0\text{と垂直なユークリッド的平面}$$

で表され，直線は，2 平面の交線ですから，

$$z=0\text{と垂直で}z=0\text{上に中心を持つ半円 または } z=0\text{と垂直な半直線}$$

で表されます．この様に， 長さや角度を適当に変換する事で， ユークリッド空間中に双曲空間を作り出す事ができ，それを双曲空間のモデルと言います．もし一つでもモデルが作れれば，それを連続変換して，無数のモデルが作れることになります.

なお，Bolyai や Lobachevsky はモデルを作ることは思いつきませんでした．（Bolyai は後一歩まで行っていましたが…）彼らは，基本的に平面は平らに，直線は真直ぐ描きます.

モデルに関しては，付録をご覧ください.