# 4. 極限球の「弧長」と「中心からの距離」

極限球上ではユークリッド幾何が成り立ち，極限球の表面は「平らで等方的」と言えます．
それでは，極限球の軸に沿った方向（極限面と直交する方向）では，どうでしょうか？
軸は**極限平行**で無限遠点を共有するので，上に昇るほど軸の間の距離は短くなり，軸に沿った方向には 等方的ではありません．

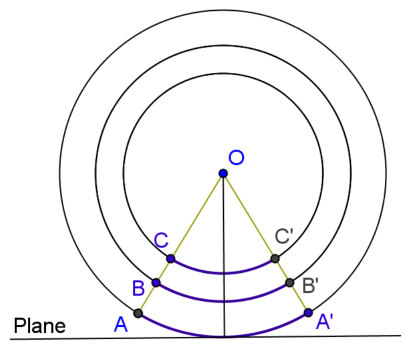
## 4-1. 直感的な説明

下の図は，球が平面と接している時の断面図で，

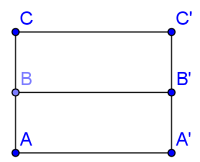
$$\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OB}\Longleftrightarrow OB=\sqrt{OA\cdot OC}\quad \text{かつ}\quad AC=1 \qquad \cdots(*)$$

としています．(*)の条件は，弧長 AA',BB',CC'を等比数列にするためです．実際(*)より，

$$\frac{OB}{OA}=\sqrt{\frac{OC}{OA}}\ \text{かつ}\ \frac{OC}{OB}=\sqrt{\frac{OC}{OA}} \qquad \therefore \frac{\text{弧}BB'}{\text{弧}AA'}=\frac{\text{弧}CC'}{\text{弧}BB'} \quad \cdots(**)$$




球が平面と接している時の断面




O を無限上方に遠ざけた図（ユークリッド空間で）

このように相似になっています．ここで (*)の条件を保ったまま，中心 O を上方に限りなく遠ざけます．このときユークリッド空間では「(**)の公比は 1」となり，弧 AA',BB',CC'は「長さの同じ」線分に限りなく近づき，かつ AB=BC です．（右上図）

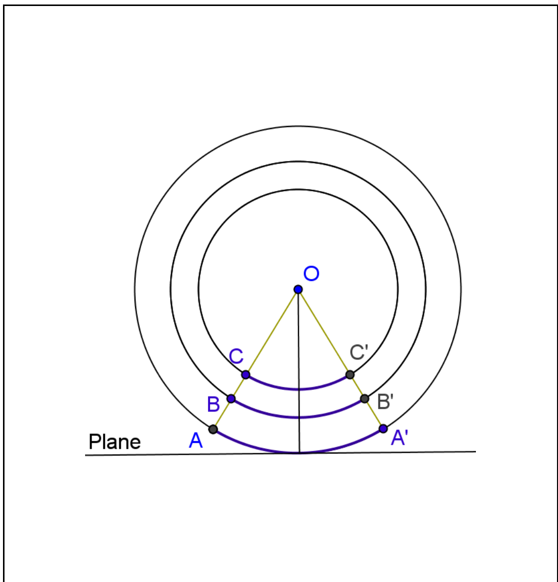
一方，双曲空間では「軸の間の距離は上に昇ると短い」ので，AB=BC　は同じですが，(**)の比の値は 1 より小さいある値 r に近づきます．（この値は宇宙定数の様なもので，数学的には，任意の値を取りえます．実験だけがその値を決定できます.）

ここで「$\frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{AA}'}=\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{BB}'}=\mathrm{r}$」とすると「$\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{AA}'}=\frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{AA}'}\cdot\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{BB}'}=\mathrm{r}^2$」

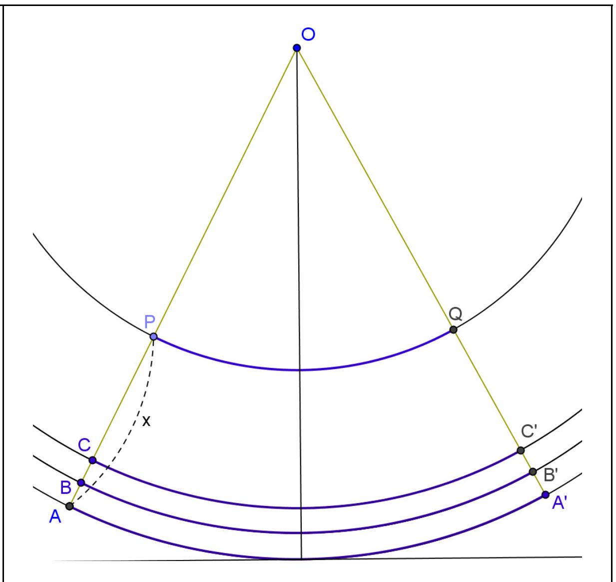
同様にして，$\mathrm{AP}/\mathrm{AB}=x$ のとき，

$$\boxed{\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AA}'}=\mathrm{r}^x=e^{(\log \mathrm{r})x}=e^{-kx}\quad (\text{但し } k=-\log \mathrm{r}>0)}$$

即ち，極限円の弧長は，(base となる極限円からの) 高さの指数関数となり，指数関数的に，減少します．もちろん，無限遠点（中心）と反対に向かう時は，指数関数的に増加します．




球が平面と接している時の断面




O を非常に上方に遠ざけた図（双曲空間で）

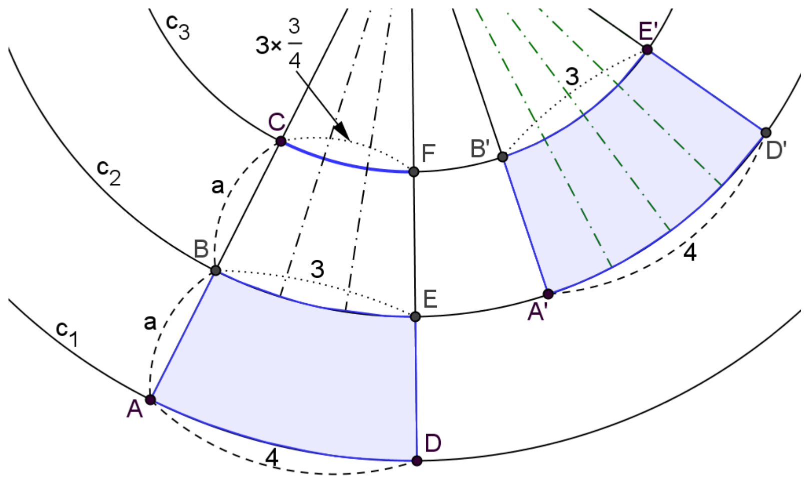
horisphere and length.ggb

## 4-2. Bolyai や Lobachevsky による説明

前節は非常に直感的な説明でしたが, Bolyai や Lobachevsky は 次のように証明しました.

下図で $c_1, c_2, c_3$ は極限円で 無限遠中心を共有し「$\overline{AB} = \overline{BC} = a$, 弧$AD = 4$, 弧$BE = 3$」

とします. このとき $c_2$ 上に点 A',D'を「弧$A'D' = 4$」となるように取ると, 極限球はユークリッド的 なので, 極限円上の２つの弧 AD と弧 A'D' は合同になります. (通常の同心円の時は, 弧長が等しくとも曲率が異なるので重ねることはできません.) 故に「$AB = A'B' = a$」で, かつ底辺と軸は直交するので, ２つの青色の擬似四角形 ADEB と A'D'E'B'は合同となり, 「弧$B'E'$ = 弧$BE = 3$」です.




さらに擬似四角形 A'D'E'B'を点線の 3 本の軸で区切ってできる擬似四角形は全て合同となるので, 「弧$A'D'$ : 弧$B'E'$ = 弧$BE$ : 弧$CF$」. (これは有限半径の円でも成り立ちます. )

$$\therefore \quad \text{弧}CF = \text{弧}BE \times \frac{3}{4}$$

したがって 弧 AD, 弧 BE, 弧 CF の長さは「公比が 3/4 の等比数列」となります.

(注) 以上はもちろん弧 AD や BE の長さの比によらず成り立ちます. また Bolyai や Lobachevsky の証明は変数を使ってもっと厳密に書いていますが, 本質的にはこれと同じです. なお, 私は, この証明を初めて読んだ時, 全く分かりませんでした. 机の前に座らず, 何日か考えてみてやっと分かりました.