付録 1. 双曲空間のモデル（H^3 モデル）

極限球は「そのままの形では」ユークリッド空間内に埋め込めないので，「極限球とユークリッド平面の類似性」から，思い切って極限球を平面の形に描いて見ます．このとき，直線や平面は曲げて描かれることになります．

図1は直線を真直ぐに，平面を平らに，極限球を球面に描いたものです．図2は，同じ図形を極限球を平らに描いたもので，極限円は真直ぐに，直線は上に凸の曲線に，平面は上に凸の曲面になります．

図2では，極限球が「均質にかつ無限に広がる様子」がイメージし易くなります．また直線 AP が真上に来るに従って 極限球との交点 R が A から遠ざかる様子も見やすいです．

一方，図1では「極限球が曲がっている事」が表現されていますが，それは「平面から見て曲がっている事」を表しているだけで，極限球から見ると平面の方が曲がっています．

直線を「最短曲線」，平面を「ある定直線に直交する直線の集合」と定義すると，「直線や平面の概念」と「真直ぐと言う概念」は異なる次元にある事が分かります．よって「何を真直ぐに描くか」と言うのは数学的には全く自由です．

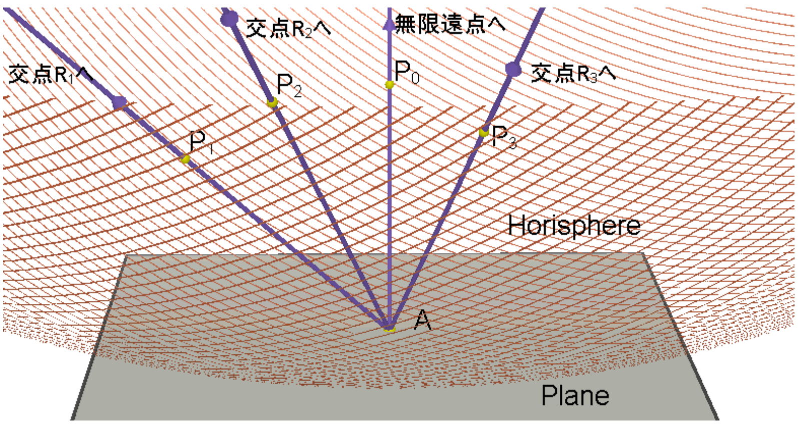


図1
平面を平らに，
直線を真直ぐに
極限球を曲げて
描いた図

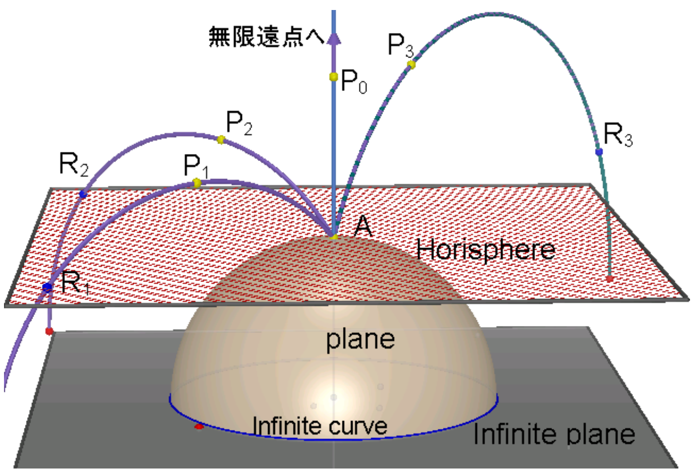


図2
極限球を平らに，
極限円を真直ぐに
直線を上に凸の曲線に
平面を上に凸の曲面で
描いた図

そして「極限球上ではユークリッド幾何が成り立つ」ので，極限球を平らに描くと，様々な定理が見易くなります. 例えば下図では共に「∠P+∠Q+∠R=180°」ですが，この性質は，図2 の方が見易いです.

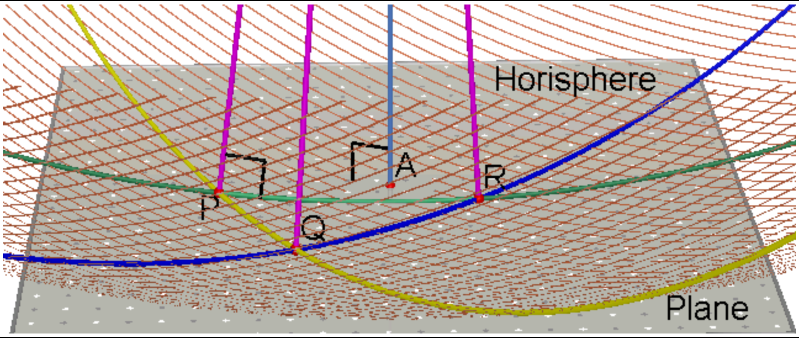
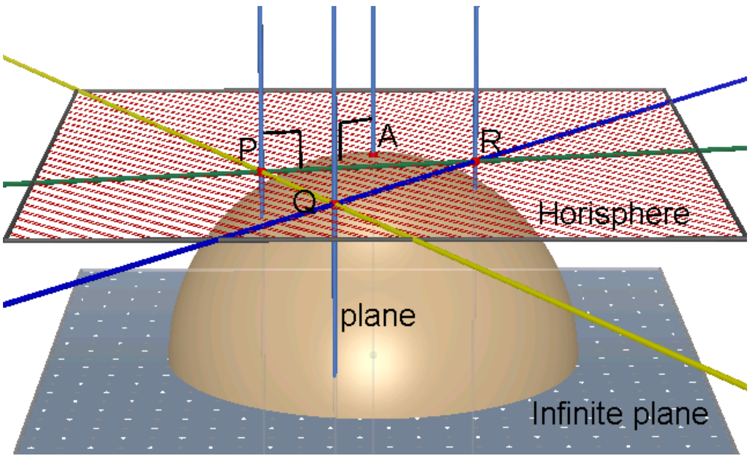
	図1 平面を平らに， 直線を真直ぐに 極限球を曲げて 描いた図
	図2 極限球を平らに， 極限円を真直ぐに 直線を上に凸の曲線に 平面を上に凸の曲面で 描いた図

図2 の図は **H³ モデル**と言います．このモデルの特徴は「極限球を平らに描くことができる」点と「角度は見た目どおり」と言う点です．一方「直線（最短曲線）が曲線」となるので，長さは見た目どおりではありません．例えば「極限円の軸は極限球と直交する直線」ですから，図2 では，z 軸と平行なユークリッド直線に見えます．　しかし，軸は無限遠点を共有するので軸の間の距離は z の減少関数になるはずです．よって「本当の距離」は「見た目の距離」と異なります．

(注)実は，極限球が平らに見えるのは，軸が $z=0$ と直交し $z=\infty$ に向かう直線の時だけで，それ以外は「$z=0$ に接する球面」になります．

この様に， 長さや角度を適当に変換する事で， ユークリッド空間中に双曲空間を作り出す事ができ，それを双曲空間の**モデル**と言います．もし一つでもモデルが作れれば，それを連続写像で写して，無数のモデルが作れることになります．以下，**H³ モデル**について紹介します．

1. 微小距離

H^3 モデルでは，微小線分の「平面 $z=0$ からの高さ」を z，「ユークリッド的長さ（見える長さ)」を ds とする時，その双曲的長さ dl を

$$\boxed{dl = \frac{ds}{z}}$$

で定めます． 故に dl は見た目と異なり，上の方ほど短くなります．逆に「$z \to 0$」の時は，本当の距離 dl は無限に長くなるので,「$z=0$」は無限遠点の集合(無限遠平面)となります．先の図で平面が $z=0$ と共有点を持っているのは，平面は無限に広がっているからです．

2. 双曲的角度

H^3 モデルでは，角度は「見た目のまま」です．即ちユークリッド的に分度器を当てて測った角と同じです．

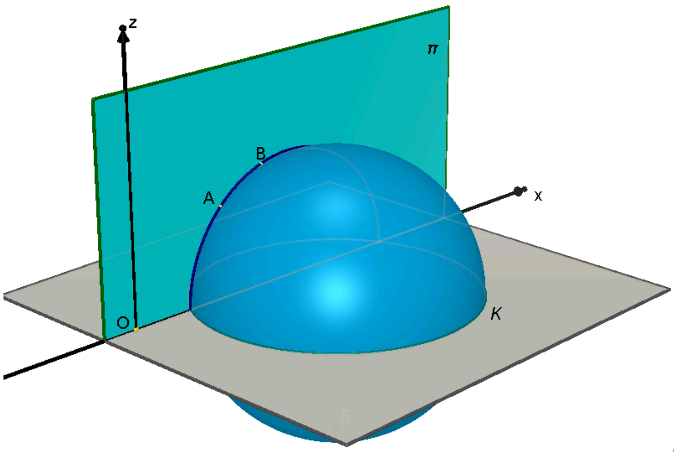
以下，証明抜きで，結果のみ述べます．証明は「H+モデル」などのページをご覧ください．

3. 双曲的平面

H^3 モデルでは，平面は

「$z=0$ に中心を持つ半球（上半球面)」 または 「$z=0$ と垂直なユークリッド平面(H^+)」

で表されます．(下図)



definition of H3.html

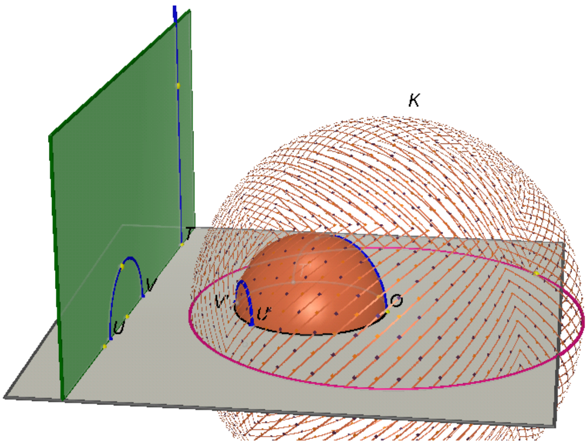
上の図で上半球面と平面 H^+ の紺の交線は，２つの双曲平面の交線で，双曲的直線です．

4.　双曲的直線

「直線は，2 平面の交線」なので，直線は

「$z=0$ と垂直で $z=0$ 上に中心を持つ半円」または 「$z=0$ と垂直な半直線」

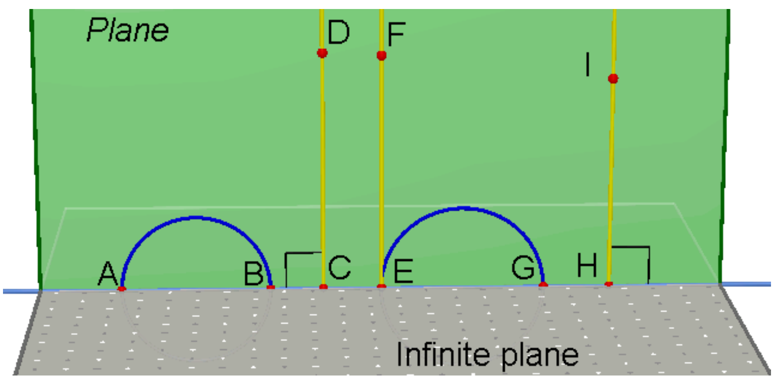
で表されます．



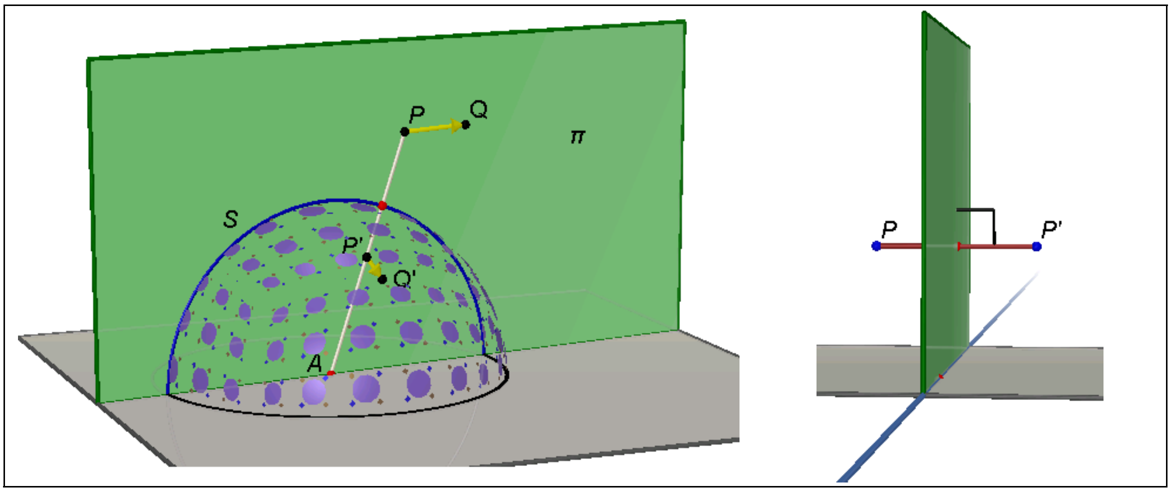
双曲的直線

メッシュの半球は双曲空間内の平面 K で，K に関する対称移動を f とすると，無限遠点 U,V は U',V'に移ります．また緑の半平面に見える双曲平面 π は，赤い球に見える双曲平面 π'に移ります．そして π 上の紺の双曲的直線は，π'上の紺の双曲的直線に移ります．

下図は，双曲平面 H^+と H^+上の双曲的直線です．「$dl=\dfrac{ds}{z}$」なので「$z\to\infty$」の時，直線 CD,EF,HI の距離は限りなく小さくなります．即ちこの 3 直線は**極限平行**です．また，直線 GE と FE も無限遠点 E を共有するので**極限平行**です．なお，これから分かるように「$z\to\infty$」にある無限遠点（上方無限遠点）は，一個の無限遠点です．対して「$z=0$」上の無限遠点は全て異なります．そして，直線は異なる無限遠点を必ず 2 つ持ちます．

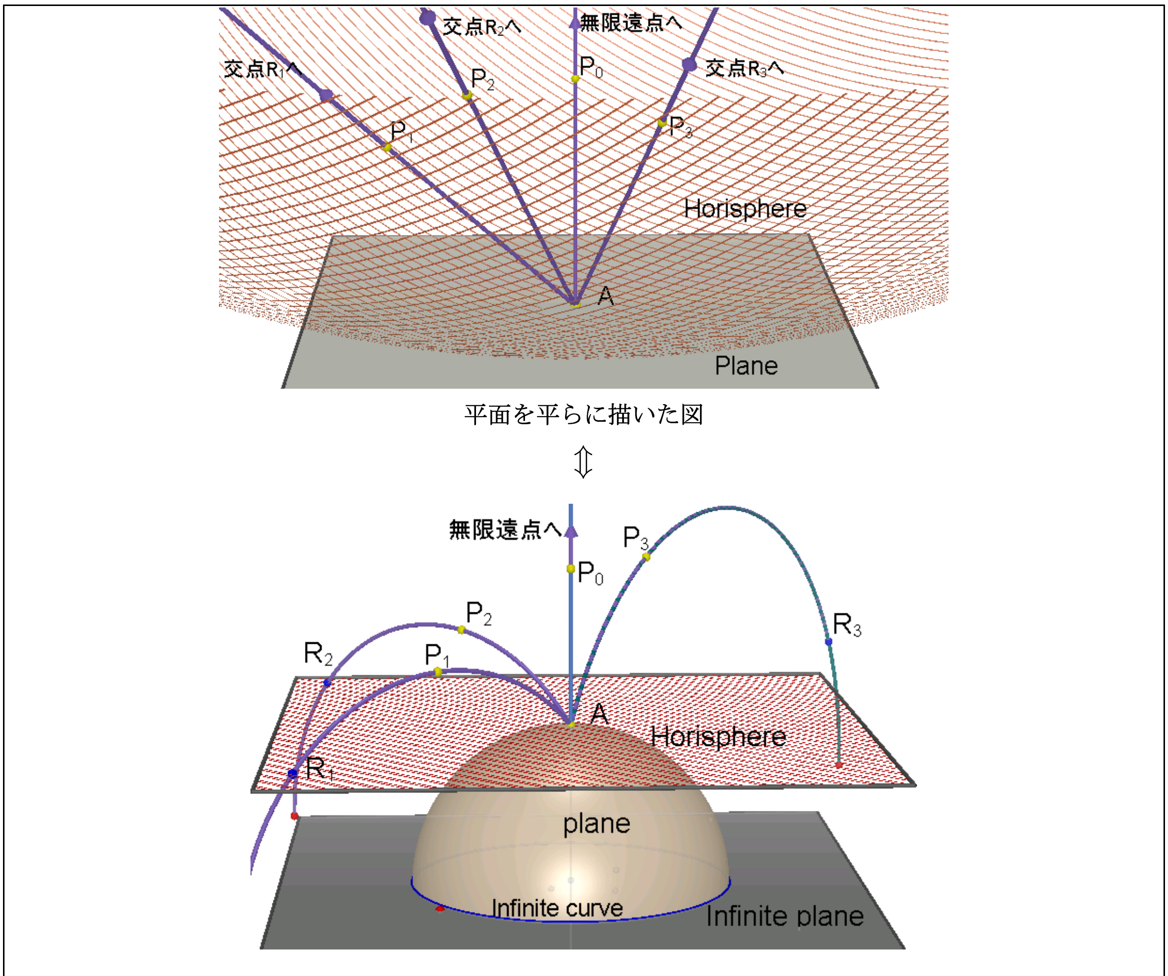


5.　双曲的平面に関する対称移動



双曲平面に関する対称移動は，球に関する反転($\overline{\mathrm{AP}'} \times \overline{\mathrm{AP}} = R^2$,A は中心, R は球の半径)と平面に関する対称移動です．　　transformation.html

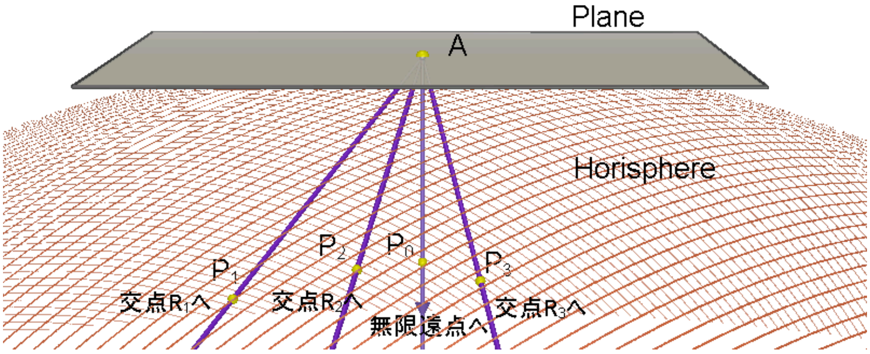
6. 極限球



H^3モデル

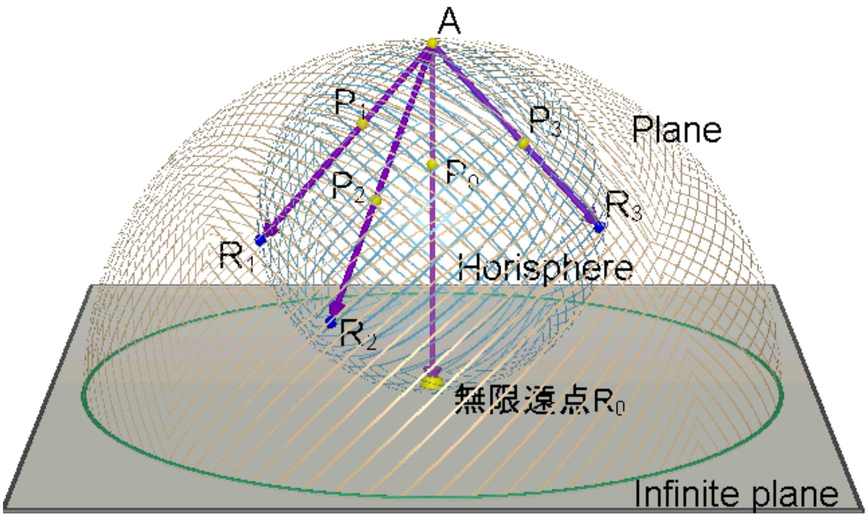
最初にあげた導入例では，極限円の軸は，上方の無限遠点に向かう直線でした．（上図）

逆に，極限円の軸が，下方の無限遠点に向かう直線だとどうなるでしょうか？
極限円の軸が「下方の無限遠点に向かう直線」の時，極限球は「無限円平面に接する球」となります．（次頁）



平面を平らに描いた図

⇕



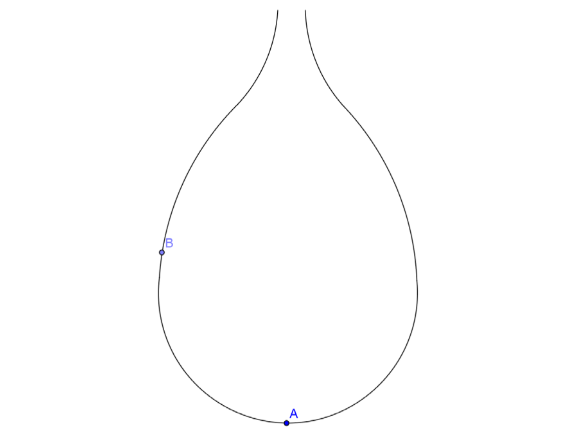
H^3 モデル（直線 AP などは，本当はユークリッド的には円ですが，真直ぐに描いてあります）

すなわち，極限球は，

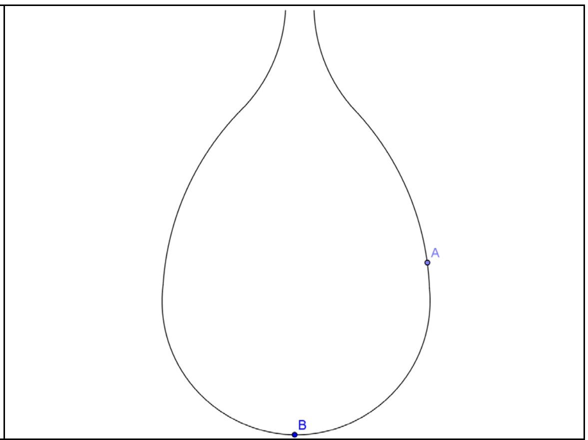
無限遠平面と平行な平面，または無限遠平面と接する球面

となります．

双曲空間で，点 A で平面 π と接する極限球を K とし，直線 AP と K の交点を R とすると，AP が軸と一致しない限り交点 R は存在します．そして AP が K の軸に近づけば 交点 R は，無限遠点 R_0 に近づきます．そして R_0 は軸の無限遠点と一致します．即ち，極限球は，軸方向に「スパーッ」と抜けた「ひょうたん」の様になっています．しかし，それは平面を平らに捉えているからで，本当は平面の方が曲がっています．

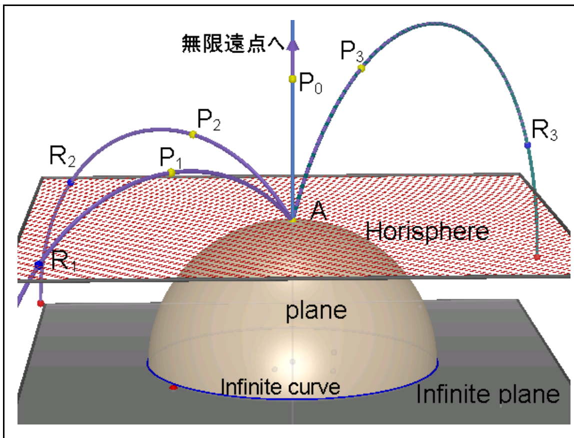


点 A から見た極限球の断面

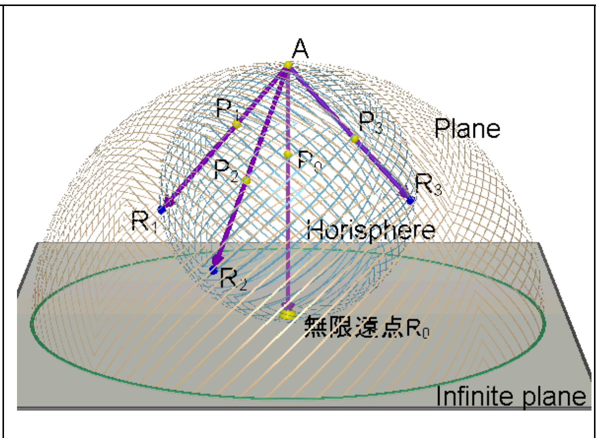


点 B から見た極限球の断面

これは第 4 章で既に述べたイメージで，極限球は，1 つの無限遠点に向かって 360 度の方向から近づいていく曲線の集まりです．（無限遠点は含まない）しかし軸が下方に向かう直線の時は分かりますが，上方に向かう直線の時はどう解釈するべきでしょうか？

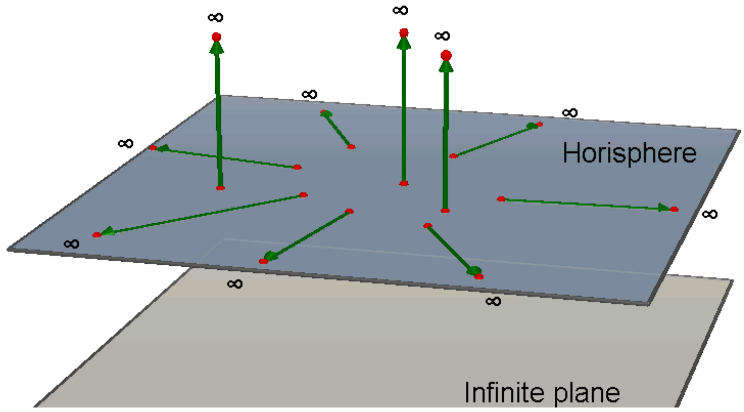


H^3 モデル（軸が上方に向かう直線の時）

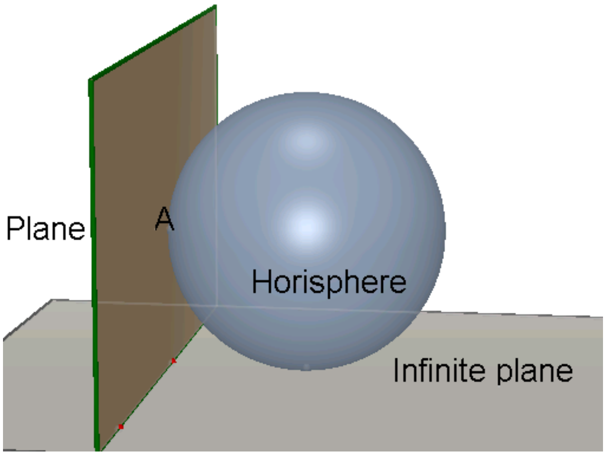


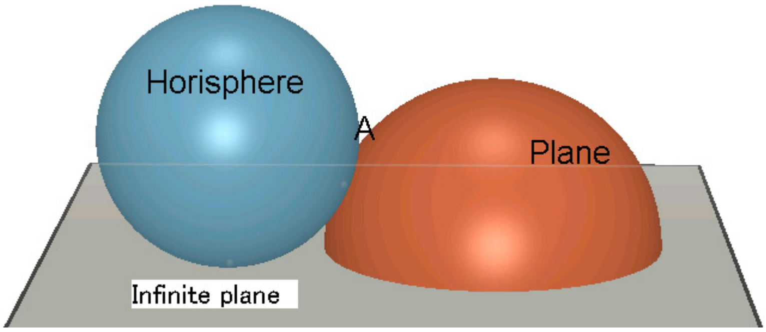
H^3 モデル（軸が下方に向かう直線の時）

無限遠平面と平行な平面上の無限遠点と，上方の無限遠点は「同じ点」と考えるべきでしょうか？　しかし，R が無限遠点に近づく様に「見える」右上図でも，双曲空間ではやはり無限の距離があるので，R が無限遠点に近づく様に「見えない」左上図も矛盾はしません．

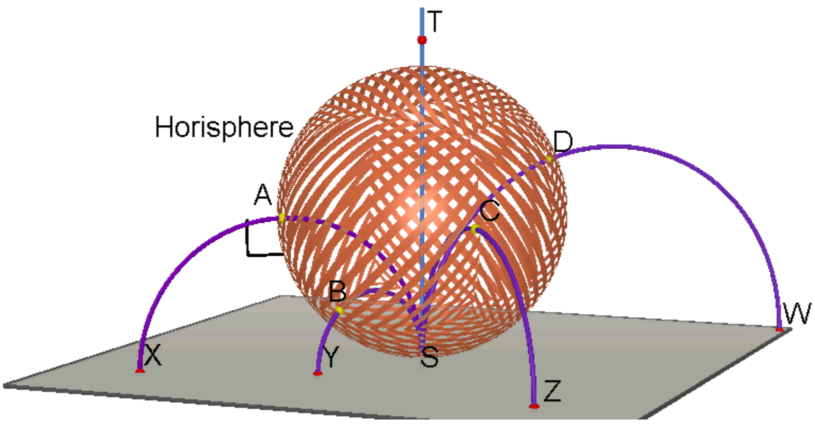


なお平面が「$z=k$」でない時は，平面と接する極限球は，「$z=0$ と接する球」です．





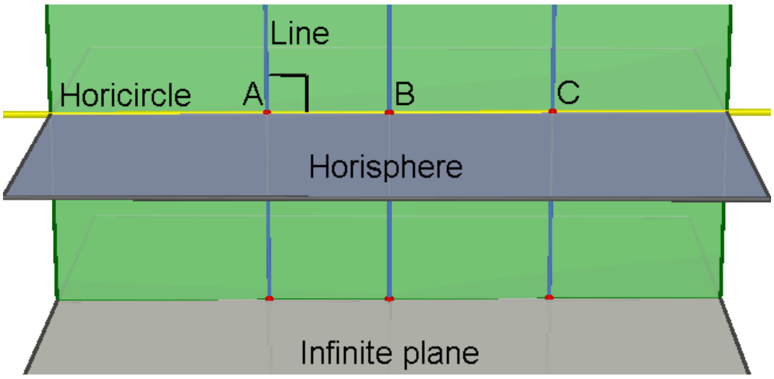
また「$z=0$ と接する球」の軸は，これと直交する双曲的直線で下図では，直線 XS,YS,ZS,WS および直線 TS です．



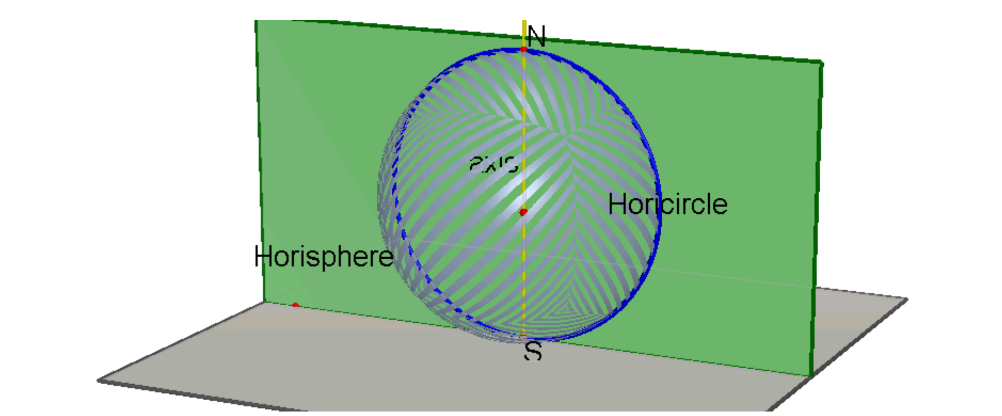
7. 極限円

極限円は，「極限球の軸を含む双曲平面」による「極限球の断面」でした．

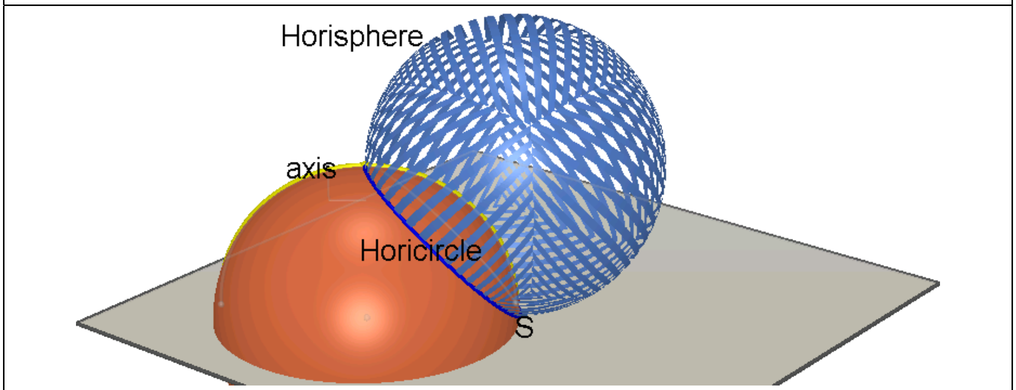
極限球が「$z=0$ と平行な平面」の時，極限円は $z=0$ と平行なユークリッド直線です．（しかし，2 点 A，B の最短距離線ではないので，双曲的直線ではありません．）



極限球が「$z=0$ と接する球」の時，極限円は $z=0$ と接するユークリッド円です．$z=0$ と直交している必要はありません．（$z=0$ と斜交するユークリッド平面は，等距離面です．）



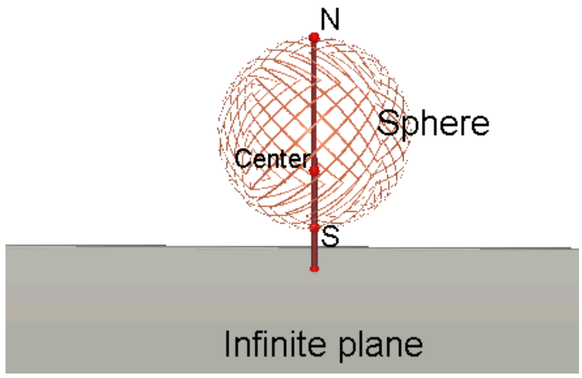
$z=0$ と直角に接する極限円



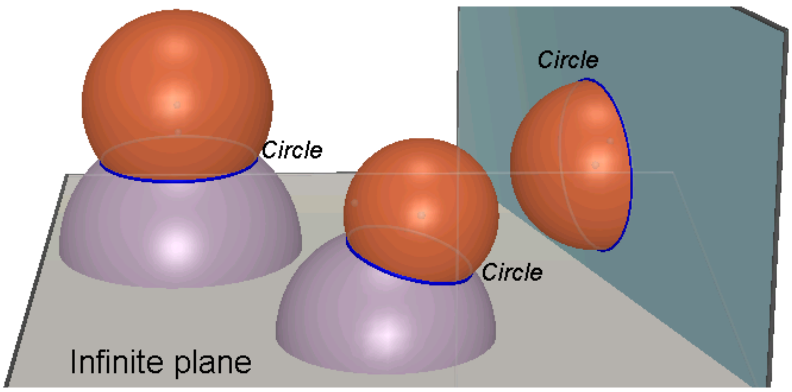
$z=0$ と斜めに接する極限円

8. 双曲的球と双曲的円

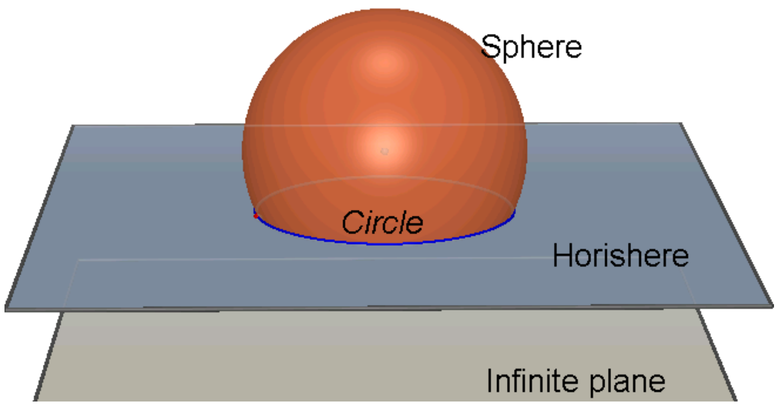
双曲空間の球は，「$z=0$ と共有点を持たないユークリッド球」です．但し中心は「$z=0$」の方に少し寄ります．



双曲空間の円は，双曲的球と双曲的平面の交線です． 従って「$z=0$ と共有点を持たないユークリッド円」になります． $z=0$ と平行，垂直，斜交などの全ての場合があります．



下図より，「極限球と双曲的平面の交線は円」となることも分かります．



9. 直線からの等距離線

(i) $z=0$ と垂直な双曲平面 H^+に於いて，直線からの等距離線は，2 種類あります．

「$z=0$ と垂直な双曲直線(紺色)」からの等距離線は，「無限遠点を共有しかつ $z=0$ と斜交する直線(黄色)」です．下図で，弧 AB,CD,EF 上の微小ユークリッド距離を ds_1, ds_2, ds_3，対する双曲的微小距離を dl_1, dl_2, dl_3 とすると「$dl = ds / z$」より，$dl_1 = dl_2 = dl_3$．故に AB,CD,EF は長さが等しくなるので，線分 AE の等距離線は BF です．

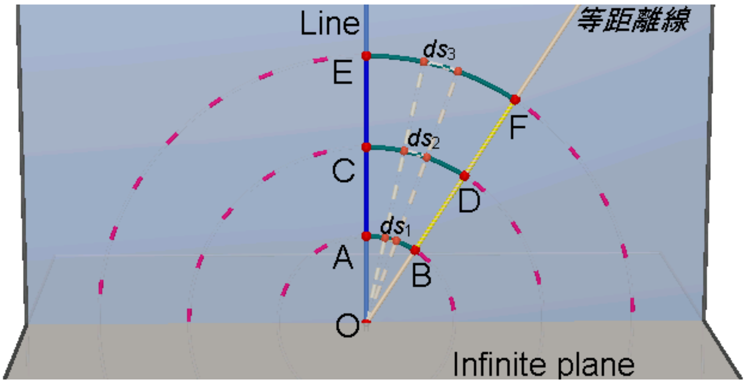


図 1

「$z=0$ 上に中心をもち，$z=0$ と垂直な半円に見える双曲直線（紺色)」からの等距離線は，「無限遠点を共有しかつ中心が $z=0$ 上にない円(黄色)」です．証明は省略します．

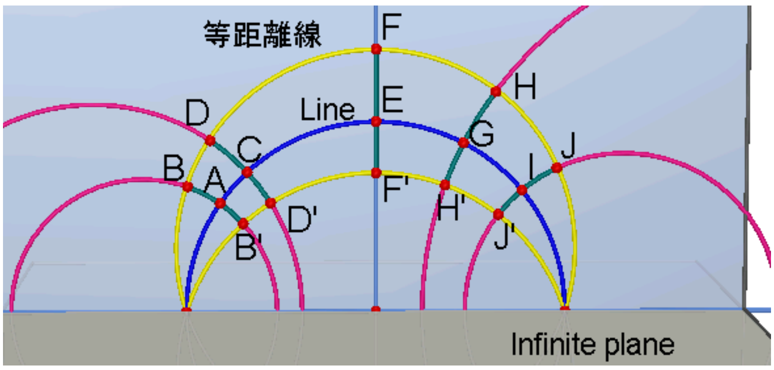


図 2

(ii)上半球面上の双曲的直線(紺色)からの等距離線は，無限遠点を共有し，$z=0$ と斜交する円（黄色）です．図 1 と同様の理由で，AB,CD,EF の長さが等しい事から明らかです．

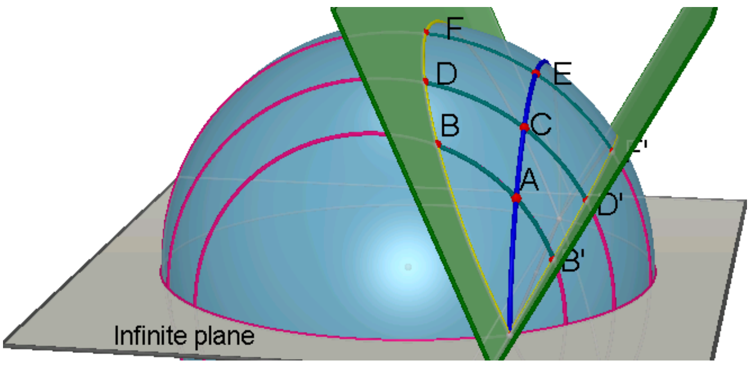
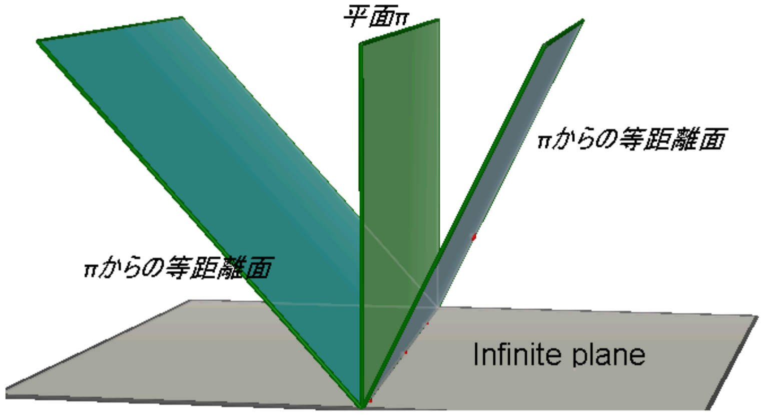


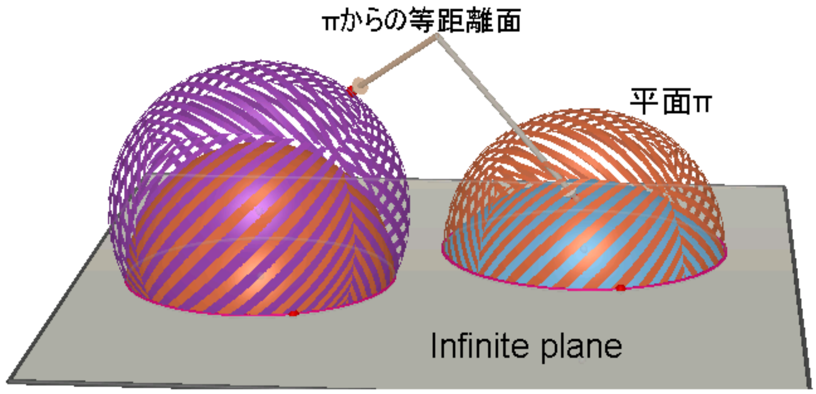
図 3

10. 等距離面

「$z=0$ と垂直なユークリッド平面 π」からの等距離面は，　$z=0$ と π の交線を共有するユークリッド平面です．但し $z=0$　とは斜交します．



「$z=0$ に中心を持つ半球 π'」からの等距離面は，$z=0$ と π'の交線を共有するユークリッド球です．但し中心は「$z=0$」上には 有りません．



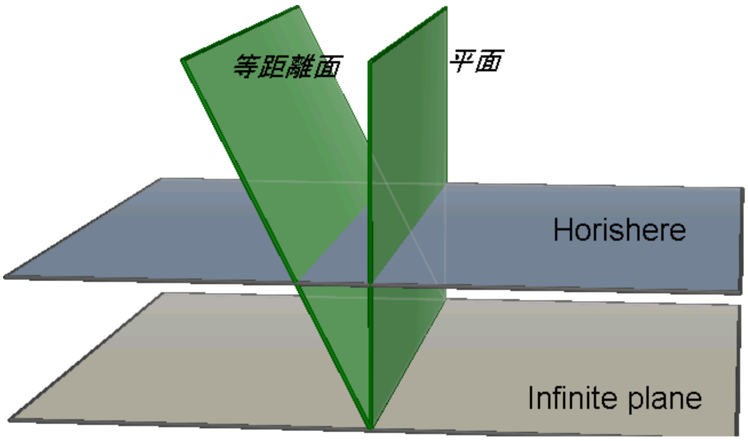
等距離面は，当然，平面の両側に作れます．また平面とその等距離面は，無限遠点を共有します．すなわち，地平線を共有します．

11.　H^3 モデルのまとめ

H^3 モデルに於ける平面，直線，球などの幾何図形を，別の視点から見てみましょう．

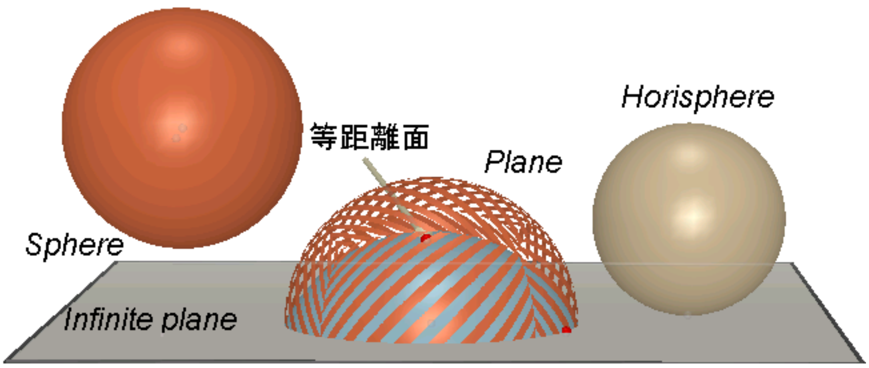
11-1. ユークリッド平面

ユークリッド平面は，双曲平面($z=0$ と垂直なとき)，等距離面($z=0$ と斜交しているとき)，極限球($z=0$ と平行なとき)のいずれかになります．



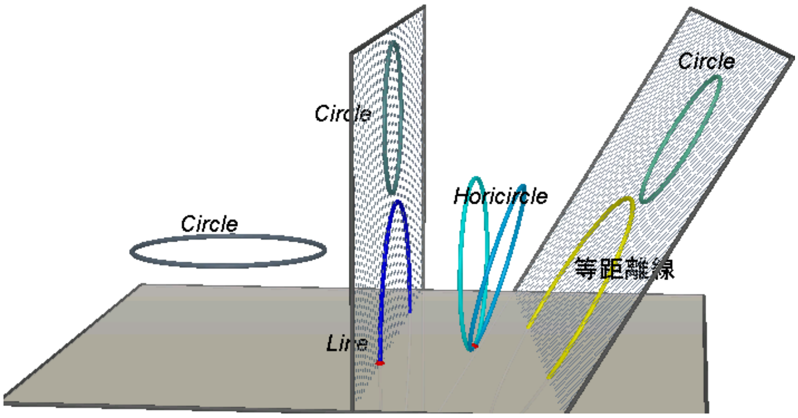
11-2. ユークリッド球

ユークリッド球は，双曲的球（$z=0$ と共有点を持たない時），双曲的平面（中心が $z=0$ 上にある時），等距離面（中心が $z=0$ 上にない時），極限球（$z=0$ と接する時）です．



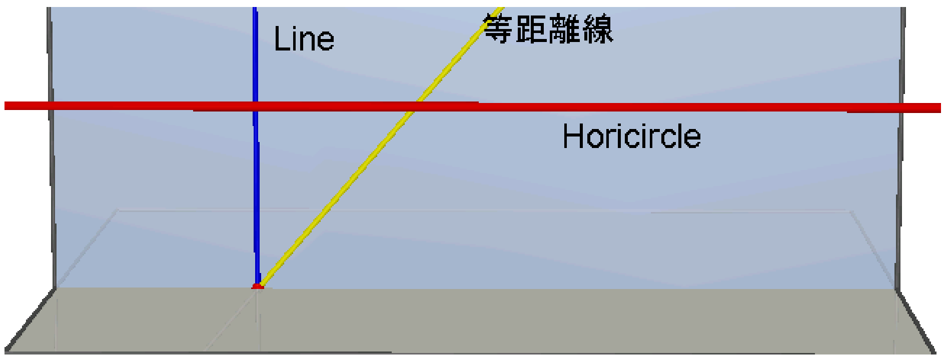
11-3. ユークリッド円

ユークリッド円は，双曲的円($z=0$と共有点を持たない時)，極限円($z=0$と接する時)，双曲的直線(中心が$z=0$上にあり，$z=0$と直交する時)，直線からの等距離線($z=0$と 2 点で交わる双曲的直線ではない円)のいずれかになります．



11-4. ユークリッド直線

ユークリッド直線は，双曲的直線($z=0$と直交するとき)，極限円($z=0$と平行なとき)，直線からの等距離線($z=0$と斜交する時) のいずれかになります．



ユークリッド球，ユークリッド平面，ユークリッド円，ユークリッド直線の とり得る全ての状態に，双曲空間の図形が対応しているのが素晴らしいです．