

付録 2. H^3 モデルによる証明

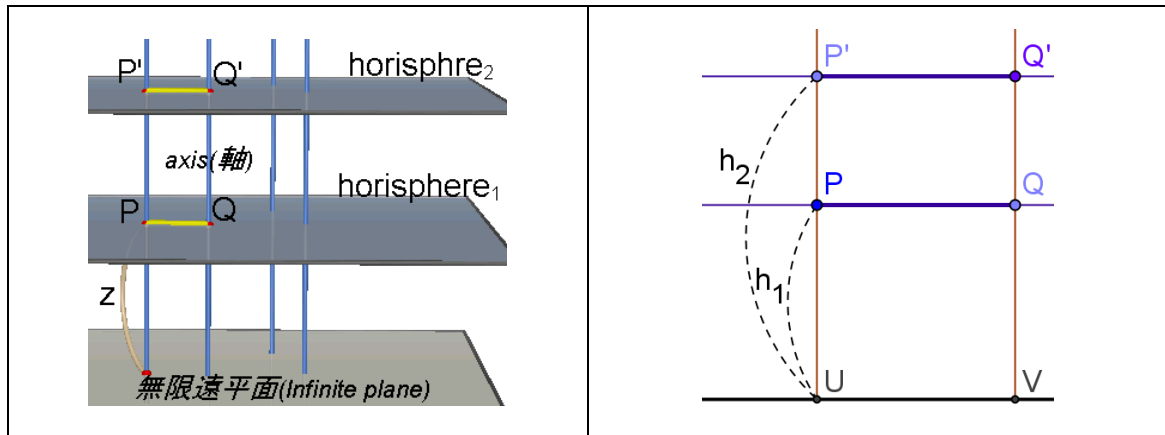
モデルを使うと，苦勞して証明した様々な定理が，あつけ無いほど簡単に証明されます．
 簡単の為「 $k=1$ 」として証明します．即ち「無限遠平面からの高さ」を z ，「ユークリッド的長さ(見た目の長さ)」を ds とする時，その双曲的長さ dl を「 $dl = ds / z$ 」とします．

1. 極限円の対応する弧の長さの定理（第 4 章）

軸を共有する極限球は，見た目では，互いに平行な平面で表されるので，下図で，

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = e^{-\overline{PP'}} = \exp(-\overline{PP'}) \dots (*)$$

が成り立つ事を表します．ここで $\overline{PQ}$ は「極限円に沿って測った双曲的長さ」， $\overline{PP'}$ は「軸に沿って測った双曲的長さ」とします．



P, P' の z 成分をそれぞれ h_1, h_2 ，線分 PQ のユークリッド的長さを a とすると，

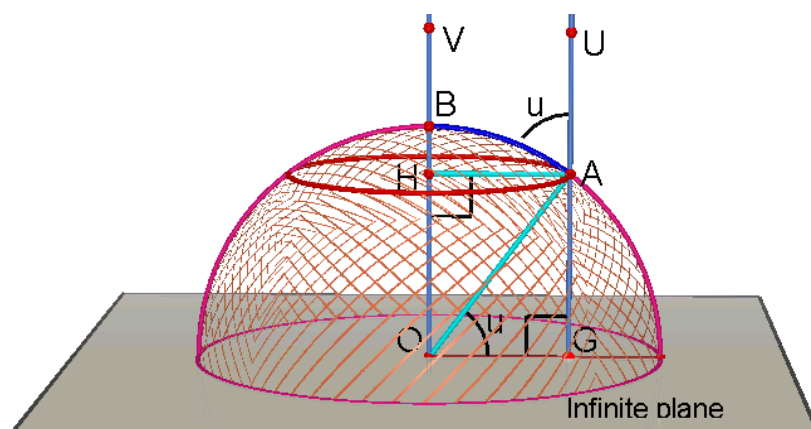
$$\begin{cases} \overline{PQ} = \frac{a}{h_1}, \quad \overline{P'Q'} = \frac{a}{h_2} \quad \dots \textcircled{1} \\ \overline{PP'} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{y} dy = \log \frac{h_2}{h_1} \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①，②より， P と P' の双曲的距離を x とおくと，

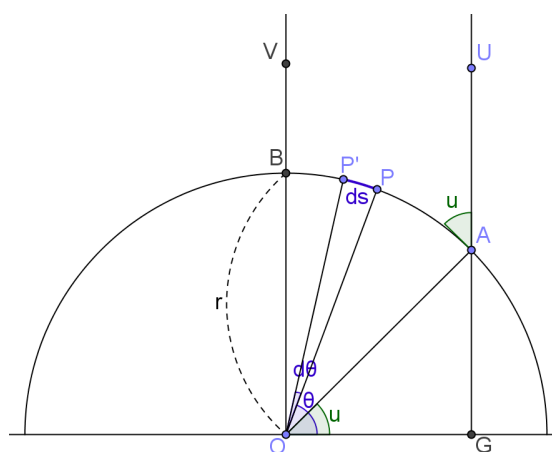
$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{h_1}{h_2} = e^{-\overline{PP'}} = e^{-x}$$

とても簡単に証明できました．

2. 平行線角と線分の長さの関係式 (8-3, 8-7-2)



H³モデル



平面 AOB による断面

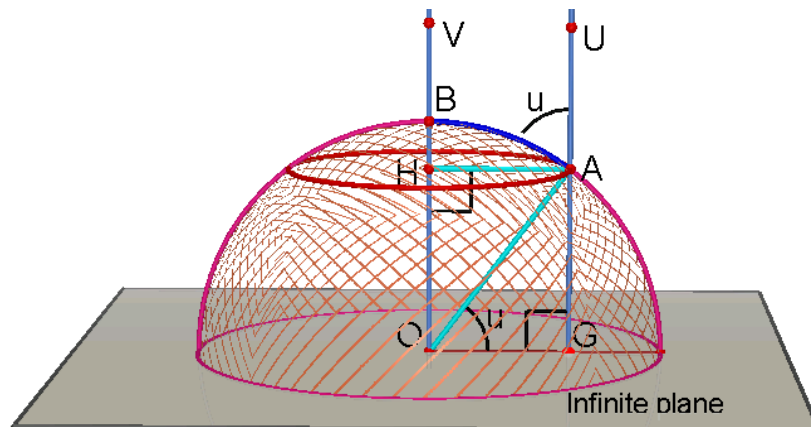
双曲的直線 AB に関する平行線角 $\Pi(AB)$ と 線分 AB の長さの関係を求めます. 上半球面の半径を r , A,B の偏角をそれぞれ u と 90° とします. このとき弧 AB 上の点 $P(x, z)$ は, 「 $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ ($u \leq \theta \leq 90^\circ$)」と表されるので, 「 $dl = ds / z$ 」より,

$$[A,B]=\int_u^{\frac{\pi}{2}}\frac{ds}{z}=\int_u^{\frac{\pi}{2}}\frac{rd\theta}{r\sin\theta}=\int_u^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\left[\log\tan\frac{\theta}{2}\right]_u^{\frac{\pi}{2}}=-\log\tan\frac{u}{2}$$

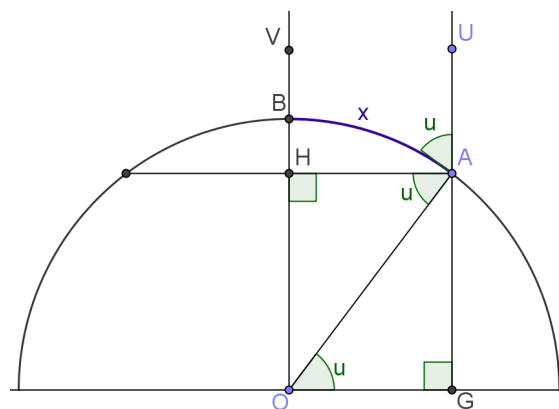
ただし, $[A,B]$ は双曲線分の長さです. 「 $[A,B]=x$ 」とおくと,

$$\tan \frac{u}{2} = e^{-kx}$$

これが、平行線角と線分の長さの公式です。8-7-2 の証明と比べてみてください。



H^3 モデル



平面 AOB による断面

また，極限円弧 AH の長さを $[A,H]$ と書くと，

$$[A,H] = \frac{\text{AH のユークリッド的長さ}}{\text{AH の } z \text{ 成分}} = \frac{1}{\tan u}$$

故に，「半球面上の半径が x の双曲的円の弧長 $C(x)$ 」は

$$C(x) = 2\pi \times [A,H] = \frac{2\pi}{\tan u} = 2\pi \cdot \frac{1 - \tan^2 \frac{u}{2}}{2 \tan \frac{u}{2}} = 2\pi \cdot \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}} = 2\pi \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2\pi \sinh(x)$$

これが円周の長さの公式です。8-3 と比べてみてください。この2つと 8-1, 8-2 の比較的証明の楽な公式を組み合わせると，双曲三角比の公式が全て導かれます。(8-1, 8-2 もモデルだけから証明できます。) モデルを使うと，あっけないほど簡単に公式を導けます。