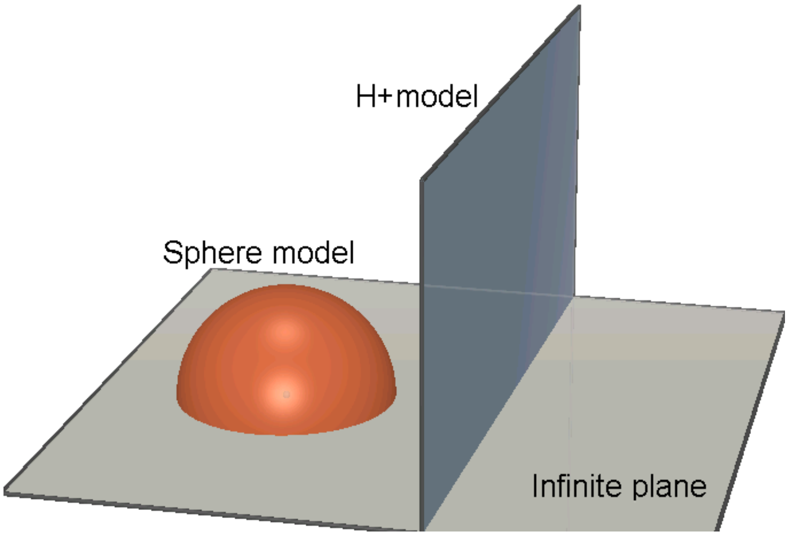
付録３. H^3 モデル以外のモデル

1. H^+モデル，上半球面モデル

H^3 モデルでは，双曲的平面は 2 種類ありました.「$z=0$ に垂直な平面 H^+」と「$z=0$ 上に中心を持つ上半球」です. この各々に対して「平面幾何」を考えたモデルが，H^+モデルと上半球面モデルです. 普通は，上半球面モデルは，単位球面上（$x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$）に作ります. 詳しくは，H+モデルのページと，上半球面モデルのページをご覧ください.

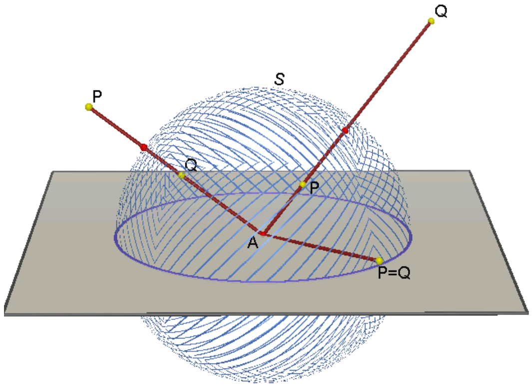


2. ポアンカレ円盤モデル

まず，円に関する鏡像（反転）と同様に，球に関する鏡像を定義します．即ち，

半径 R で中心が A の球 S に関する鏡像で, 点 P が点 Q に移るとすると,

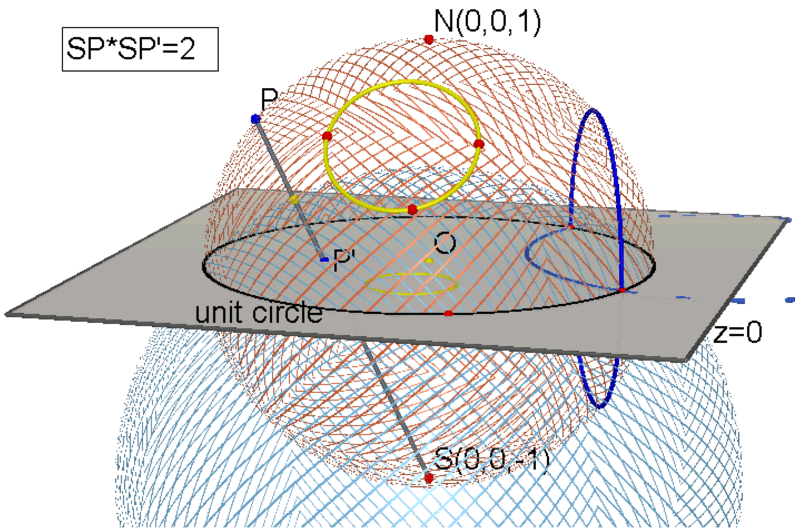
$$\text{Q が半直線AP上にあり，かつ}\quad \mathrm{AP}\times\mathrm{AQ}=R^2$$



反転によって，球は平面または球に移ります．また角度は保存します．

単位球面$(x^2+y^2+z^2=1)$上の上半球面モデルを，球「$x^2+y^2+(z+1)^2=2$」による反転で移したモデルを，ポアンカレ円盤モデル（Poincare Disk）といいます．この反転によって上半球面は，単位円の内部に移り，また角度は保存するので，**$\mathbf{H}^3$ モデル，$\mathbf{H}^+$モデル，上半球面モデルと同様，角度は見たままです．** ポアンカレ円盤での直線と円は，それぞれ「単位円に直交する円」と「単位円と共有点を持たない円」です．（下図）

詳しくは，ポアンカレ円盤モデルのページをご覧ください．



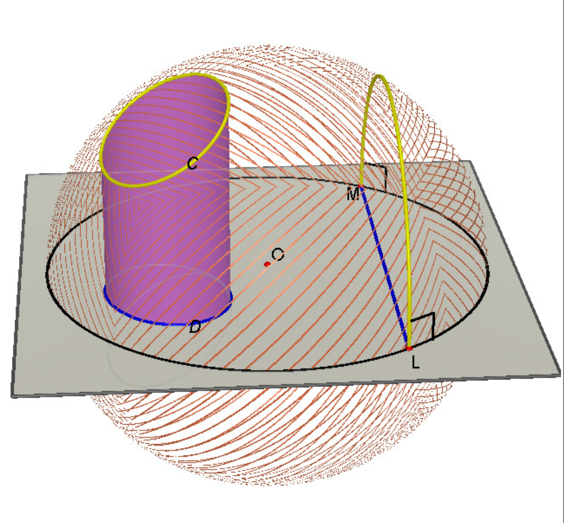
poincareDisk&sphere.cg3

3. クラインモデル

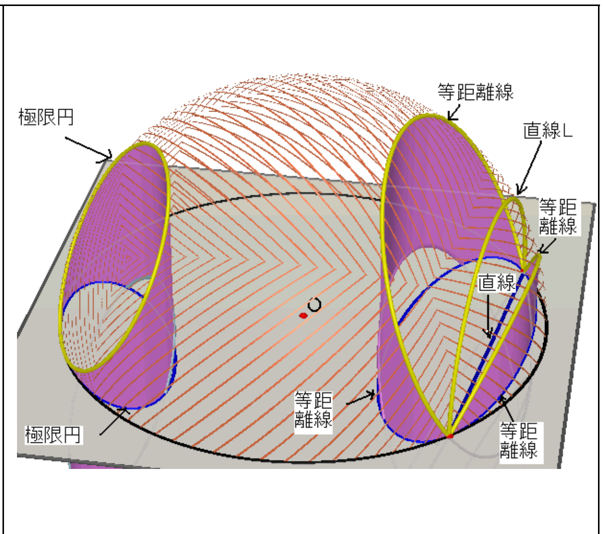
単位球面上の**上半球面モデル**を，平面 $z=0$ 上に， z 軸に平行な正射影で移したモデルを，クラインモデル（Klein model）といいます．存在領域は，単位円「$x^2+y^2 \leq 1,\ z=0$」で，ポアンカレ円盤モデルと同じですが，双曲的直線と双曲的円は，それぞれ「線分」と「楕円」になります．正射影なので角度は保存されず，角度も長さも見た目とは違います．

解析的に長さや角度を定義するのは複雑になるので，複比を使って，長さや角度を定義します．この複比による長さと角の定義は，他のモデルでも有効です．なお，クラインモデルは，円の中だけでなく，2 次曲線の中に作る事もできます．

詳しくは，[クラインモデル]，[射影クラインモデル]のページをご覧ください．



双曲的直線と双曲的円



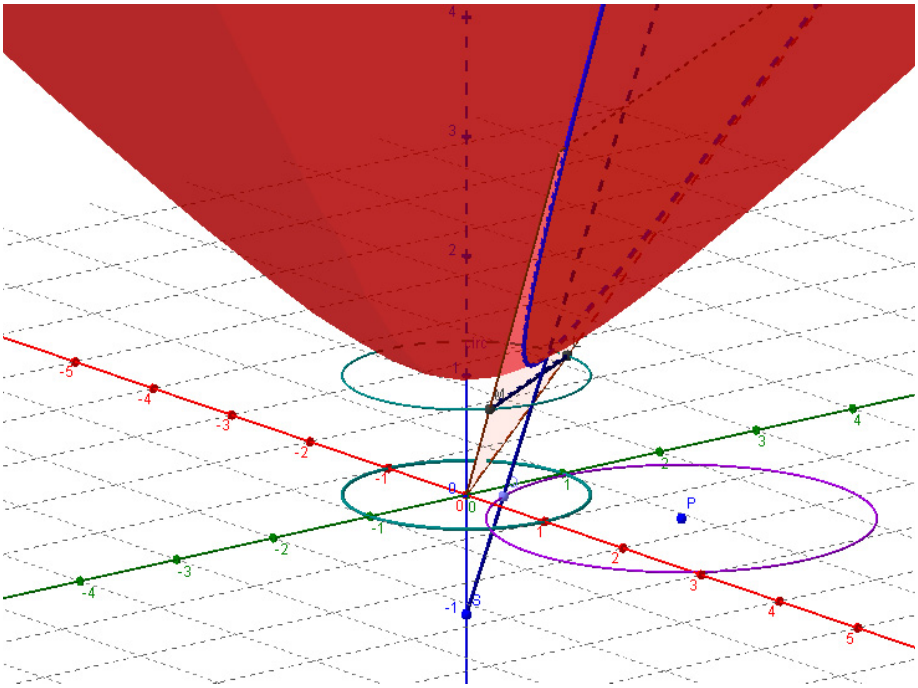
極限円と等距離線

line&circle_with_SphereModel.html　　horicircle&equiline_with_Sphere.html

4. 双曲面モデル

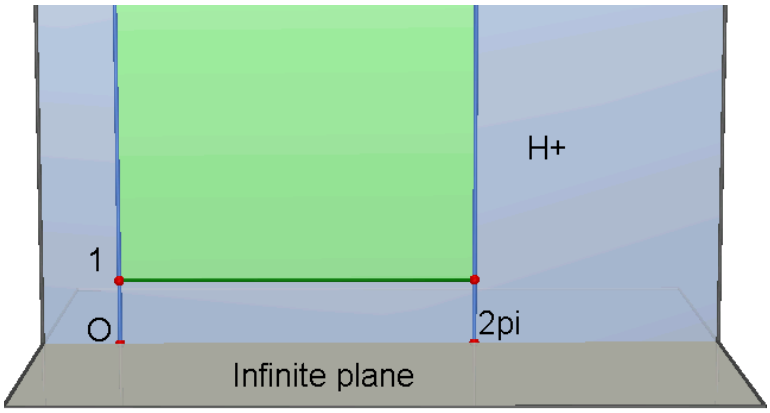
ポアンカレ円盤モデルを，点 $S(0,0,-1)$ から，双曲面「$z^2 = x^2 + y^2 + 1,\ z \geq 1$」の上に射影したモデルを，双曲面モデルと言います．図の青い太線が双曲的直線になります．

このモデルは，平面 $z = 1$ 上の単位円「$x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1$」を，原点から，双曲面の上に射影しても得られます．このモデルの特徴は，双曲的距離 dl が「$dl^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$」となり，相対性理論と同じ計算式となる事です．



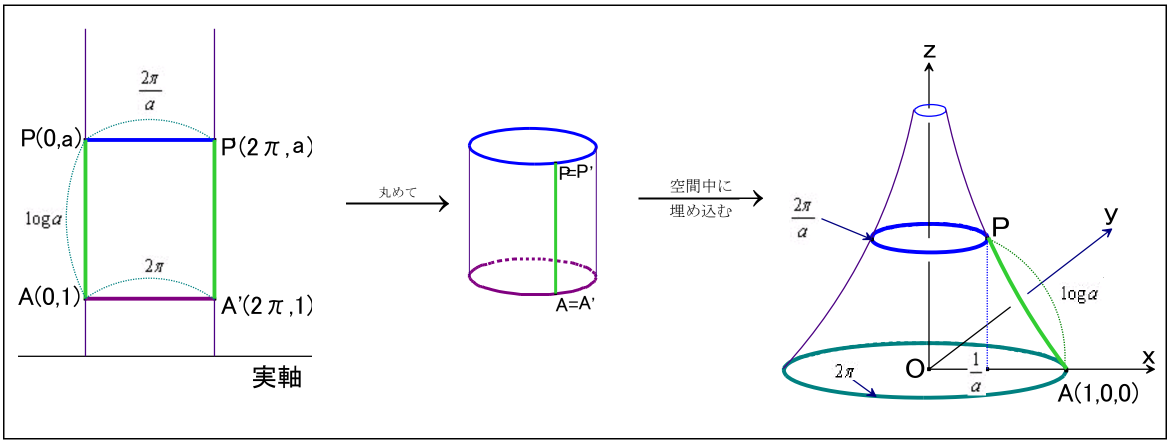
（注）上の図は，Geogebra5.0 β で作成したものです．βバージョンなので，動作が非常に不安定で，皆さんにマウスで動かしてもらう事は 残念ながら出来ません．正式リリース(2012 年予定)されたら，upload するつもりでいます．

5. 擬球モデル



H^+モデルの帯状の部分「$0 \leq x < 2\pi,\ y = 0,\ z \geq 1$」を，両端の2直線「$x = 0,\ x = 2\pi$」で張り合わせて円筒形にし，ユークリッド空間$R^3$の中に埋め込んだ曲面が　偽球モデル です．

下図で，H^+の長方形AA'P'Pが 偽球上の帯領域に「あるがままの長さで」移っています．
aはどんなに大きくとも良いので， **偽球では，長さと角度が見た目のまま** です．



line&circle.nbp　（無料の mathematica player が必要）

詳しくは，擬球のページ　をご覧ください．

以上のモデルは全て「双曲平面のモデル」です．双曲空間のモデルとしては，**H^3モデル**を，鏡像変換で球面の中に移した**B^3モデル**があります．連続な変換で移せば，いくらでもモデルは作れるので，モデルの種類は無数にあります．

[独り言]

最初のモデルは「ベルトラーミの**擬球**」(1868 年)で，次に「**クラインモデル**」(1871 年)が発見されました．しかし寺坂先生によると，2 人の間でかなりの先取権争いが繰り広げられた模様です．（ 数学の歴史「幾何学 1」）現在，最も使われているモデルは，**ポアンカレ円盤モデル**でしょう．Cinderella というソフトはユークリッド幾何，双曲幾何，球面幾何がマウス 1 つで切り替えられるのですが，ここでも**円盤モデル**を使用しています．私の個人的な好みは，**H³ モデル**とその平面版である **H⁺モデル**です．このモデルは最も直感的で，計算も楽です．（双曲三角法の証明も本当に楽でした．）

初めて非ユークリッド幾何を勉強し始めた頃は，私はモデルが大好きでした．最初に作成したページは「**H⁺モデルのページ**」で，その後，色々なモデルのページを試行錯誤で作りました．（これらは今読むと不完全で，作り直したいのですが，時間がありません．すみません．）その頃 CabriⅡや Cabri3D を使い出したと言う事もあり，ソフトを使う面白さとも相まって，モデルに惹かれて行きました．後には「**擬球モデルのページ**」を作るために *Mathematica* の使い方も覚えました．途中 Cinderella や Archimedes などのソフトを使った事もあります．現在は，おもに Geogebra と Cabri3D を使っています．

しかし，モデルばかりやっていると，何かゲームをしている様で，「**この世界の**幾何を勉強している」と言う感じが薄くなります．逆に Bolyai 等を読んでいると，「**この世界の**幾何は，もしかしたら，この通りかもしれない」と感じてスリリングです．(ちなみに宇宙論で，「宇宙はほぼ平らしい」と言う予想が出ています．私としては「予想が外れて欲しい」と思っています．)

一方モデルには「厳密に，かつ簡単に考えられる」と言うメリットがあります．やはり両方大切と言う事ではないでしょうか？

しかし，日本では，何故か殆ど全ての本はモデルだけです．　逆に，英語で書かれた本だと，一般向け(大学レベル)の本が沢山あり，その多くはユークリッド的に公理からスタートして書かれていて，「モデルの章はあっても少しだけ」です．やはり伝統の違いを感じます．

そのうちの一冊「Greenberg 著 Euclidian and Non-Euclidian Geometries」の amazon.com のコメントに「10 年掛かって読んだ．本当に良かった．特にサッケリーに惹かれた．」とありました．しかも，その方は数学専攻ではなく 趣味で勉強されている方みたいです．なんとなく「日本人は真面目でコツコツやるが，外国人はパワーでやる」と言うイメージがありますが，それは全くの（希望的?）幻想です．海外にも（むしろ海外の方が）コツコツやる方は多いみたいです．今の日本に，一冊の本を 10 年もかけて読む方は非常に少ないと思います．「この様な方が海外には大勢いる」というのは 励ましでもあり，また「われわれ日本人も頑張らなくちゃ」と言う気持ちにさせられました．