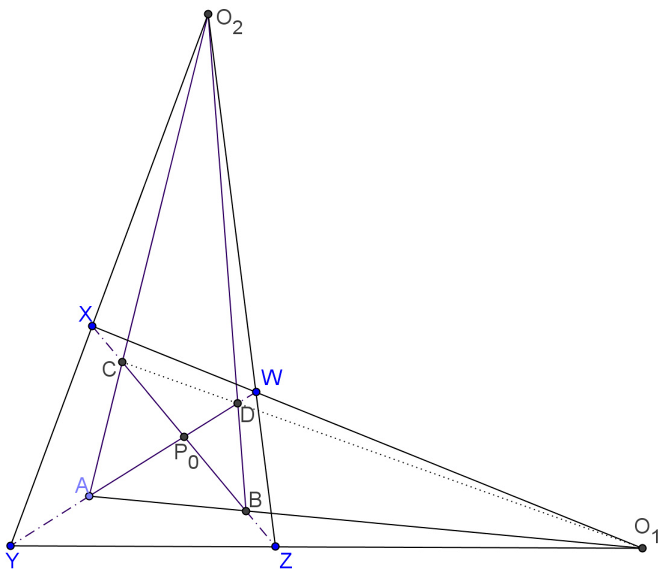
4. 垂直二等分線が直線になる境界条件

3-3 で「垂直二等分線が直線に近づき，射影の中心も余り動かない例」（$n=12$）を見ましたが，ここでは，「垂直二等分線が直線になるための H の境界条件」を求めてみたいと思います．ただこれを厳密に実行するのは私の力に余るので，ここでは　直感的かつ初歩的にやってみます．また，この節では　ユークリッドの公準 1~4 が成り立つものとします．（すなわち，「三角形の 3 つの合同条件」や「直角の存在」は仮定します．）

4-1. 射影幾何による準備(四角形の中の四角形)

完全四角形ＸＹＺＷの対角線の交点を P_0,O_1,O_2 ,線分 YP_0 上に点 A をとり，直線 AO_1とP_0Z の交点を B，直線 AO_2とP_0X の交点を C,直線 BO_2とP_0W の交点を D とすると，D は直線 CO_1 の上にもあります．



quadrangle in quadrangle.ggb

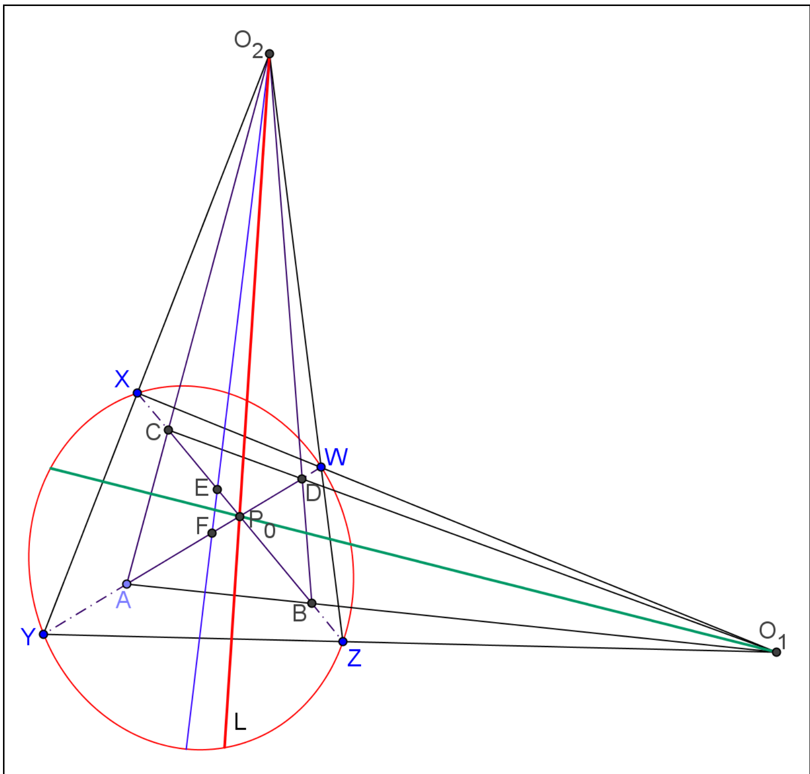
[証明]直線 XA と WB の交点を G とする．△XYA と△WZB にデザルグの定理を使うと，G は直線 O_2P_0 上にあることが分かる．次に△XAC と△WBD にデザルグの定理を使い，直線 CD,XW,AB は 1 点で交わることがいえる．

4-2. （直線）垂直二等分線の作図

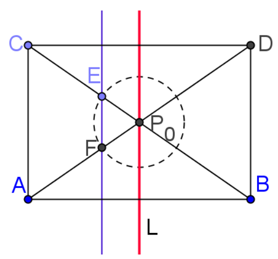
4-1 の四角形 XYZW が H の境界 K に内接しているとし，さらに線分 BC 上の点を E, 直線 O_2E と線分 AD の交点を F とします．点 O_1, O_2 を中心とした XZ から YW への射影を考えて，

$$\mathit{dis}\mathrm{H}(\mathrm{A},\mathrm{P}_0)=\mathit{dis}\mathrm{H}(\mathrm{B},\mathrm{P}_0)=\mathit{dis}\mathrm{H}(\mathrm{C},\mathrm{P}_0)=\mathit{dis}\mathrm{H}(\mathrm{D},\mathrm{P}_0) \text{ かつ } \mathit{dis}\mathrm{H}(\mathrm{P}_0,\mathrm{E})=\mathit{dis}\mathrm{H}(\mathrm{P}_0,\mathrm{F})$$

故に四角形 ABCD は, H 内の長方形です．そしてユークリッド平面上で $\overline{\mathrm{EP}_0}=\overline{\mathrm{FP}_0}$ を保ちながら, E が P_0 に限りなく近づくとき，直線 EF は線分 AB の垂直二等分線 L に限りなく近づきます. よって **H 内における線分 AB の垂直二等分線は, 図の直線 P_0O_2 です. 同様に，線分 AC の垂直二等分線は，直線 P_0O_1 です.**



H 内



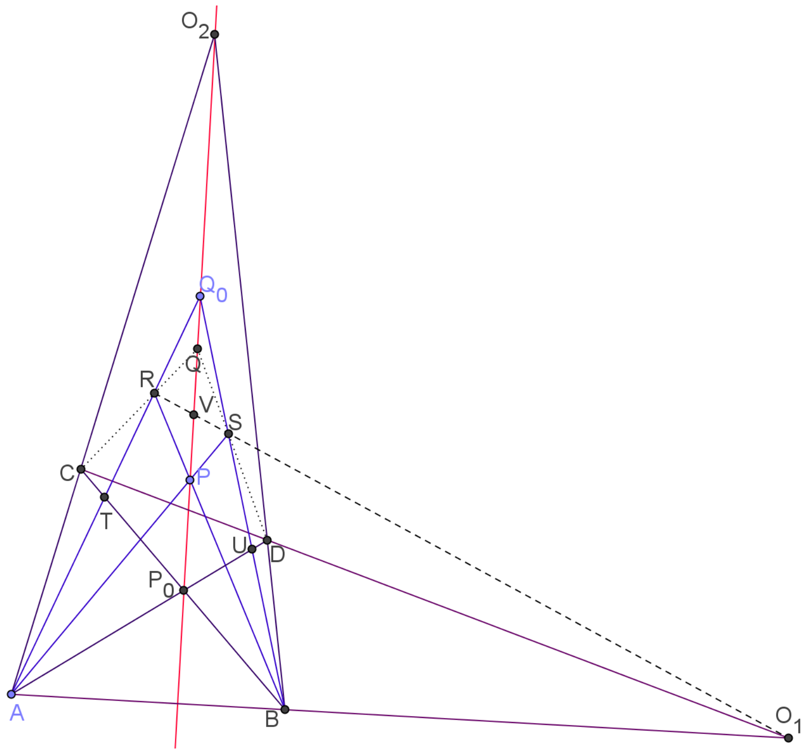
ユークリッド平面内

[construction of perpendicular bisector.ggb]()

4-3. 射影幾何による準備(harmonic homology)

4-1 の四角形 ABDC に於いて直線 P_0O_2 (= L とおく. H 内では,線分 AB の垂直二等分線)上に動点 P と Q_0 をとり, 直線 AQ_0 と BP, BQ_0 と AP の交点をそれぞれ R,S とします. このとき直線 RS は点 O_1 を通り, 直線 CR と DS の交点 Q は直線 L 上にあります.

［証明］ 直線 AR と BC の交点を T, 直線 BS と AD の交点を U とします. デザルグの定理を 3 回使います. まず△ACT と△BUD に適用して, 直線 TU は O_1 を通ることが分かります. 次に△TRB&△USA に適用して, 直線 RS も O_1 を通ります. 最後に△ACR&△BDS に適用し, CR と BS の交点は直線 P_0O_2 上にある事が分かります.【証明終】



harmonic homology.ggb

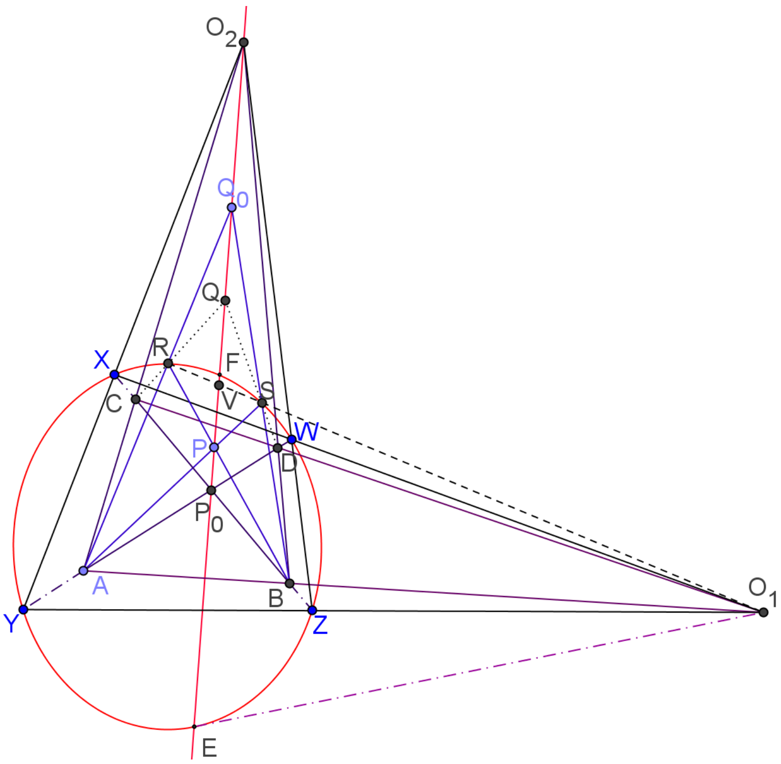
したがって, 直線 L と直線 RS の交点を V とし, 完全四角形 P_0DQC と直線 RS に注目すると, V と O1 は点 R,S に関して調和共役(harmonic conjugate)な点となります.
ところが P は L 上の任意の点なので, この性質は O_1 を通る直線と K が共有点を持つ時常に成り立ちます. このように「V と O1 が点 R, S に関して 調和共役な点となる変換（S を R に移す変換)」を, 中心が O_1 で 軸が L の "*harmonic homology*"といいます.

【注】定理「周期が 2 の共線変換は harmonic homology である」を使うと明らかです.

4-4. (直線)垂直二等分線と harmonic homology

記号は 4-2 と同じ．ＰがＡＢの垂直二等分線 P_0O_2 (= L とおく)上を動く時，直線 BP,AP と K の交点を R,S,直線 AR と BS の交点を Q_0 とすると，4-2 より Q_0 は L 上にある．従って 4-3 より，直線 RS は点 O_1 を通り，直線 CR と DS の交点 Q は L 上にあります．すなわち，垂直二等分線が直線の時，射影の中心は「定点」です．

更に L と K の交点を E,F とし，R,S が E に近づいた極限を考えると，K が E に於いて接線を持つならば，その接線は O_1 を通ります．F における接線があれば，それも O_1 を通ります．



perpendicular bisector and harmonic homology.ggb

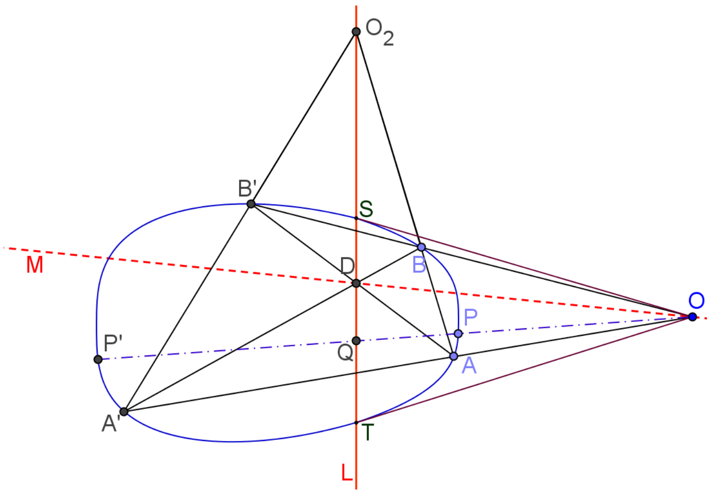
また L と RS の交点を V とすると，4-3 より V と O_1 は点 R,S に関して調和共役な点となります．P は L 上の任意の点なので，K 上の任意の点 R を S に移す変換は 「中心が O_1 で軸が L の *harmonic homology*」です．これを 境界 K は L に関し「対称」と簡単に表すことにします．(ここだけの話です．)

上の例では　実は，境界が楕円でした．次に 2 次曲線でない例をあげます．

4-4-1. 【対称な図形の例】卵形境界

下図は，$L(x=0)$ に関し右側の曲線 c を「$(x,y)=\left(2-0.25\cdot|t|^3, t\right), (0\le t\le 2)$」で描き，

c を，点 O が中心で軸が L の *harmonic homology*（f とする）で移して作成しました．



egg boundary.ggb

c 上に定点 A，B,動点 P をとり，A,B,P を f で移した点が A',B',P'です．直線 DO を M，直線 AB と A'B'の交点を O_2 とします．作り方から明らかに，上の図形は L に関し「対称」で，4-4 で述べた全ての性質を持っています．繰り返すと，

(i) L と K の交点 S,T における接線の交点が *harmonic homology* の中心 O.
(ii) O を通る 2 本の直線と K の交点で作られる四角形の対角線の交点は L 上の動点.
(iii) 上の四角形の L と交わらない 2 辺の交点も L 上の動点.

しかし，図より M と K の交点における接線が O_2 を通らないことが”見えます”．故に，M に関しては「対称」ではありません．

この様に, **1 本の軸** に関して「対称」な図形 K は（c の作り方は無数なので）無数に存在します．しかし**無数の軸**に関し「対称」な図形は 2 次曲線だけになります．［後述］

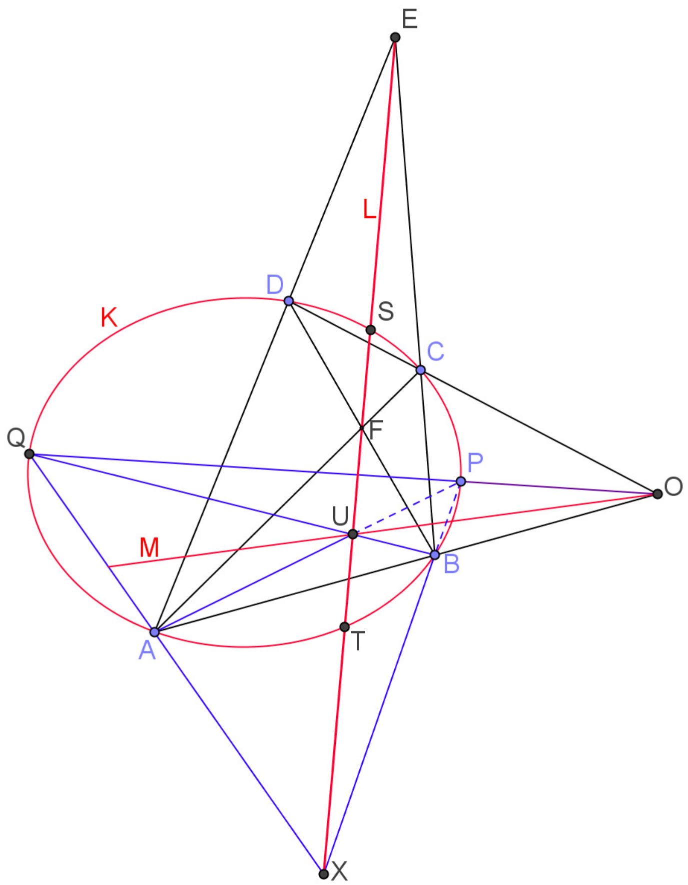
【注】直線 M と A'B'の交点を G とすると，「点 O_2 ,G に関し A'と B'は調和共役」ですが，A や B が動くと O_2 も動くので，A'と B'は M に関し「対称」では 在りません．

4-5. 垂直二等分線が直線になるときの境界条件

H 内において，任意の線分の垂直二等分線が直線とします．境界 K 上に定点 A,B,C,D を取り直線 AB と CD の交点を O，直線 AD と BC の交点を E，EF を L， L と K の交点を S,T， 更に K 上の動点を P，OP と K の他の交点を Q とします．***L*** に関して K は「対称」なので，P を Q に移す変換は「L を軸，O を中心とする *harmonic homology*」です．**4-4** より 直線 AP と BQ の交点 U, AQ と BP の交点 X は 共に L 上にあります．

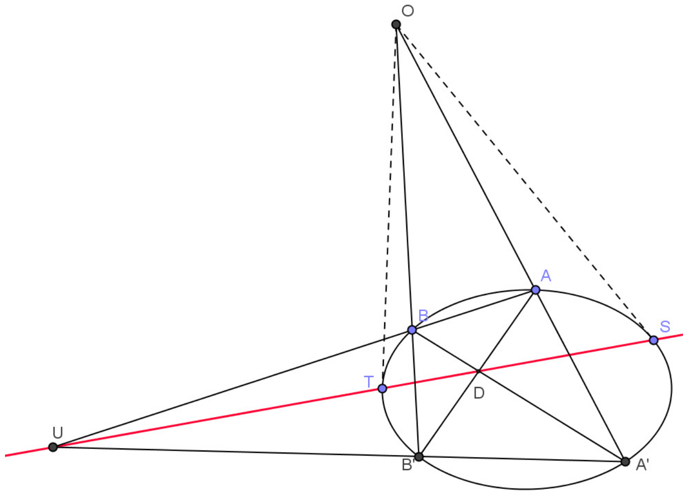
次に直線 OU を *M* ， *M* を軸とする *harmonic homology* を考えます．中心は X です．***M*** **に関しても K は「対称」なので「T と S は，X と U に関し調和共役」ですが，調和共役の性質により，「X と U は， T と S に関して調和共役」**です．そして T と S は定点なので，直線 AU と BX は適当な射影変換で移ります．（harmonic conjugate.pdf）
故に Steiner の定理より，直線 AU と BX の交点 P は,A,B を通る 2 次曲線(conic)上を動きます．

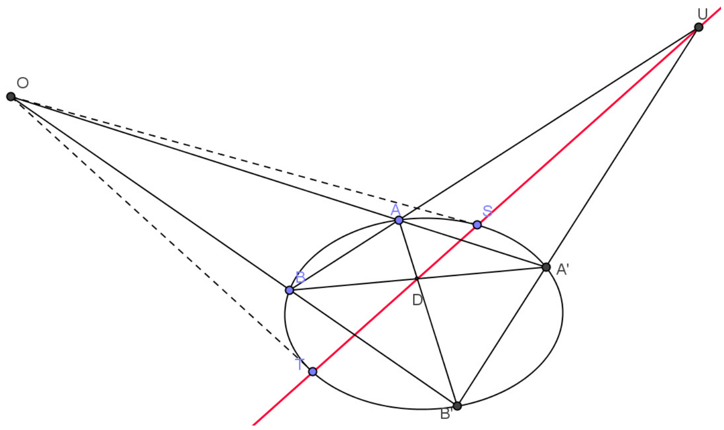
即ち，任意の **線分の垂直二等分線が直線になるような境界 K は 2 次曲線に限ります．**



boundary condition.ggb

実際，境界が 2 次曲線の時は，任意の K と交わる直線 L に関し「対称」となります.
下図は境界 K が楕円ですが，S,T をどのように動かしても,K は直線 ST に関し「対称」となっています.





[symmetry of conic.ggb]

4-6. 境界条件の「ユークリッド的な意味」

4-4-1 の卵形境界の例を使います．(右図)

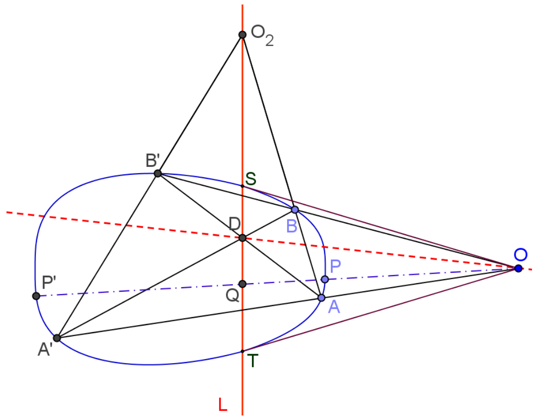
P と P'は, O と Q に関し調和共役なので,

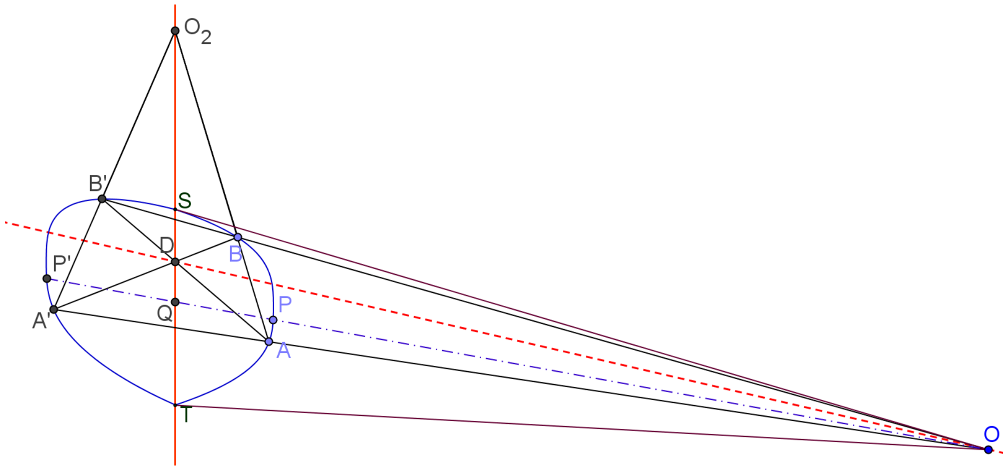
$$[O,Q|P,P'] = \frac{\overline{OP}\cdot\overline{QP'}}{\overline{OP'}\cdot\overline{PQ}} = 1$$

よって，O を無限遠点にすると,

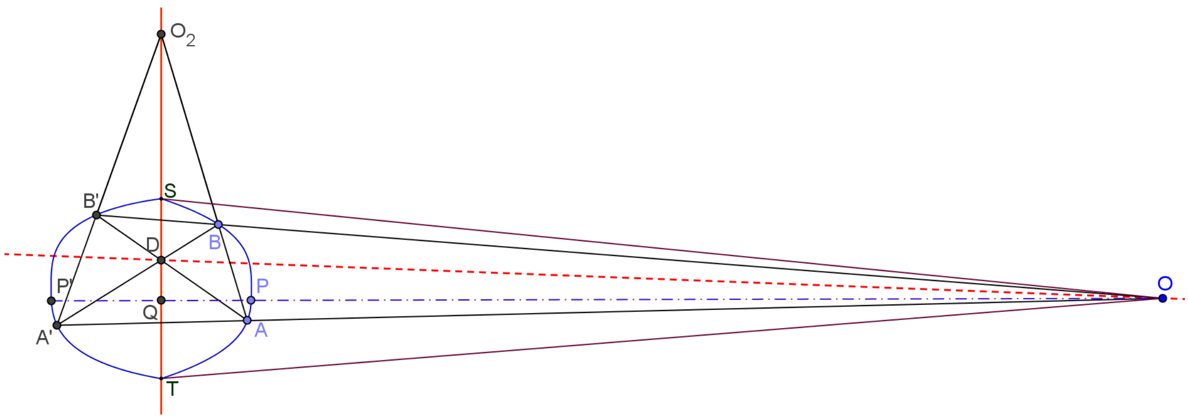
$$\frac{\overline{OP}\cdot\overline{QP'}}{\overline{OP'}\cdot\overline{PQ}} = 1 \iff \frac{\overline{QP'}}{\overline{PQ}} = 1 \iff \overline{PQ} = \overline{QP'}$$

（更に OQ ⊥ L のときは, P と P'は L に関しユークリッド的に線対称です.）





[O が L から遠ざかると，$\overline{PQ} \approx \overline{P'Q}$ となる]

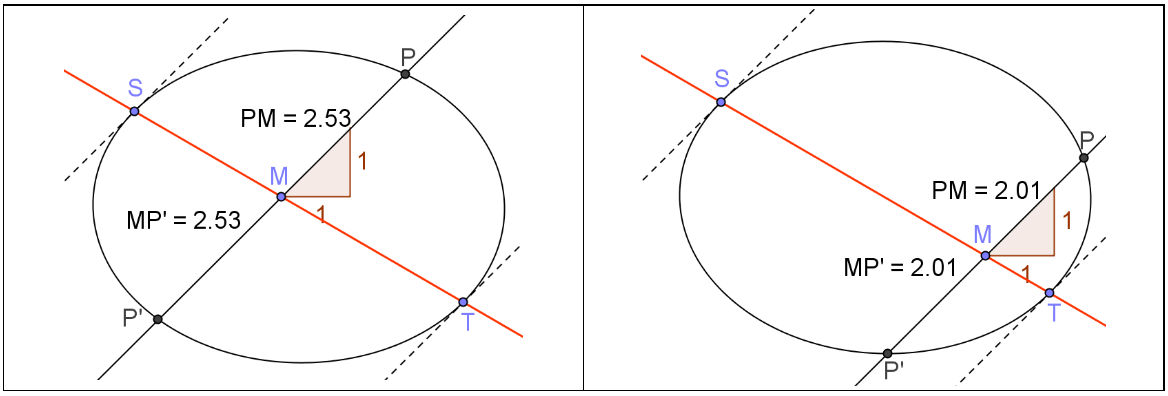


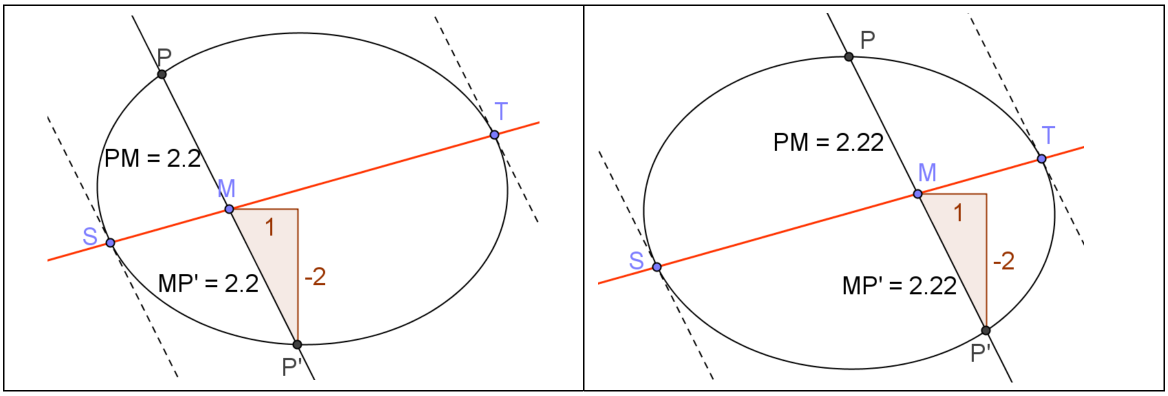
[さらに OQ ⊥ L のときは，P と P'は L に関し線対称となる]

O が無限遠点になるとき，S,T における接線や直線 PP'，直線 AA',BB'は全て平行になります．すなわち求める図形 K は「**傾き m の直線を，K によって切断して出来る線分 PP'の中点 M が，直線 L_m 上にある図形**」です．ここで L_m は m のみで定まる直線です．

そして 4-5 は，そのような曲線は 2 次曲線に限ることを言っています．

下の例は，上段が「$m=1$」で，下段が「$m=-2$」の場合です．





[conic's symmetry from Euclidian standpoint.ggb]