6. 【付録】 H 内の「三角関数」

この節の内容は Mauricio 教授(チリ大学)の ATCM における presentation を, 自分なりに図形的に書き直したものです. また Mauricio 教授の paper はこちらにあります.

6-1. H 内の「三角関数」の定義

「境界 K が三角形のときは, 円周率が一定($\pi = 3$)であること」を利用して, 三角形の内部に 擬三角関数を定義することができます. まず 2-4-1 の繰り返しです.

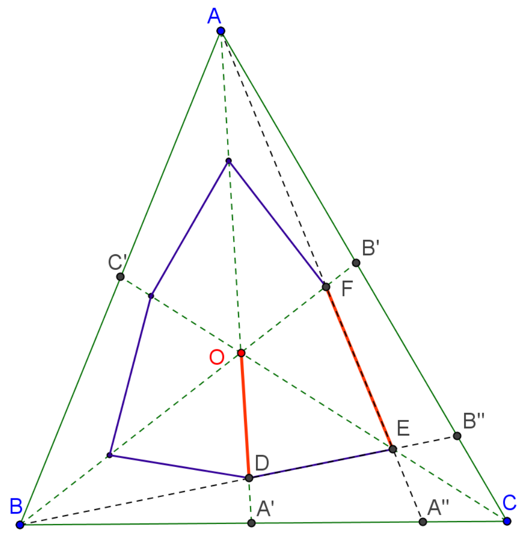
6-1-1. 境界が 3 角形の時の円

境界が三角形のとき, O が中心の円と直線 AO,BO,CO との交点を 図の様に点 D,F,E とすると, 点 B からの射影を考えて,

$$[F,E|A,A''] = [O,D|A,A']$$

故に

$$disH(E,F) = disH(O,D) = (\text{半径})$$



同様にして, 円の他の「辺」の長さも半径と等しくなるから,

$$\frac{\text{円周}}{\text{半径}} = 6$$

即ち「円周率は 3」で一定 となります.

6-1-2. 「角度」の定義

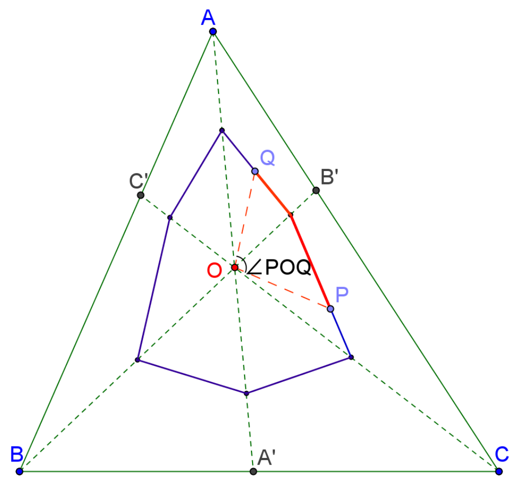
円周率は一定なので, 単位円上に 定点 P と動点 Q をとり,

$$\angle POQ = (\text{PQの弧長})$$

と定めることが出来ます. 「$\pi = 3$」なので,

$$360^{\circ} = 6 \text{ rad}$$

です.



第 5 節で見た様に, この「角度」は, 円の上でのみ定義可能な「角度」ですが, 簡単の為, この節では単に 角度 と書きます.

[pseudo angle in triangle.fig]()

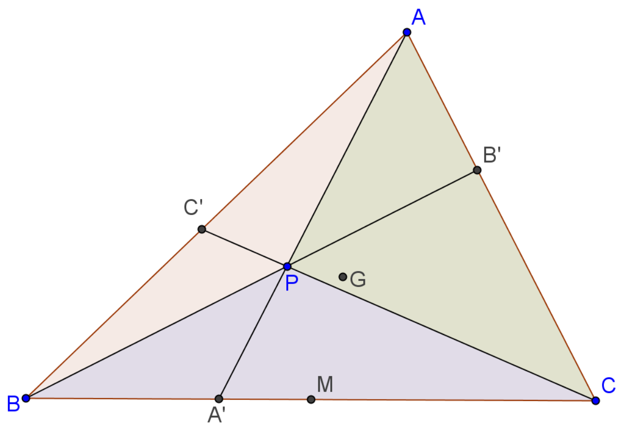
6-1-3. 重心座標の定義

H 内の三角形 ABC と，動点 P を，ユークリッド内の図形と考えたとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (a+b+c=1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ならば，(a,b,c) を P の A,B,C による**重心座標**と言います．例えば△ABC の重心を G,

辺 BC の中点を M とすると，その重心座標は，$\mathrm{G}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ です．



coordinates.ggb

さらに，P が三角形 ABC の内部にある時,

$$a=\frac{\overline{\mathrm{PA'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}=\frac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{ABC}},\ b=\frac{\overline{\mathrm{PB'}}}{\overline{\mathrm{BB'}}}=\frac{\triangle\mathrm{PCA}}{\triangle\mathrm{ABC}},\ c=\frac{\overline{\mathrm{PC'}}}{\overline{\mathrm{CC'}}}=\frac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{ABC}}$$

です．

6-1-4. アフィン座標の定義

P が△ABC の内部で △ABC に対する射影座標が (a,b,c) のとき，**affine 座標** $[x,y]$ を

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\triangle\mathrm{PBC}}{\triangle\mathrm{PAB}} \\ y=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\triangle\mathrm{PCA}}{\triangle\mathrm{PAB}} \end{cases}$$

と定めます．例えば **6-1-3** の G, M の affine 座標は， G[1,1], M[0,1] です．
なお，上の Affine 座標は C を基準にしていますが，A,B を基準にとっても本質的には同じなので， 上の表現を 単に **affine 座標** と書くことにします．

6-1-5. 三角関数: $C(\theta)$ と $S(\theta)$ の定義

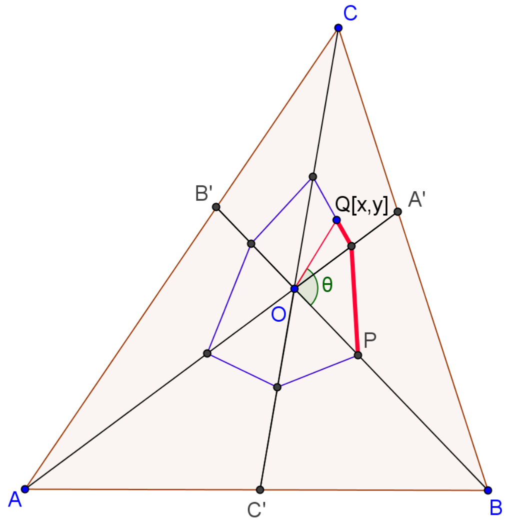
境界 K が三角形の時，6-1-2 と 6-1-4 を使い「三角関数」を定義します．即ち，単位円上に基準点 P(ここでは Mauricio 教授に合わせて，線分 OB と円の交点とします) をとり，

$$\theta \equiv \angle \mathrm{POQ} = (\text{弧長}\mathrm{PQ})$$

さらに， Q の affine 座標 $[x, y]$ をとり，

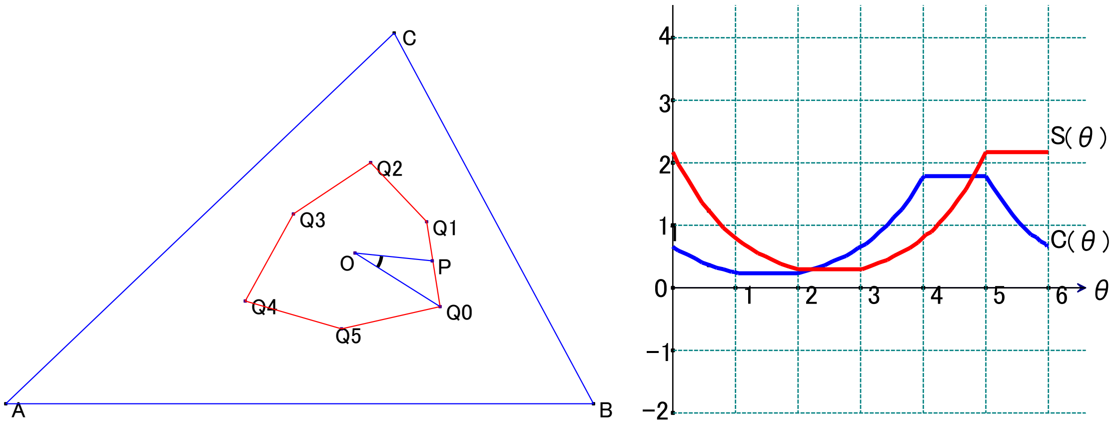
$$C(\theta) = x = \frac{\triangle \mathrm{QBC}}{\triangle \mathrm{QAB}},\ S(\theta) = y = \frac{\triangle \mathrm{QCA}}{\triangle \mathrm{QAB}}$$

と定義します.



6-2.　$C(\theta)$ と $S(\theta)$ の性質

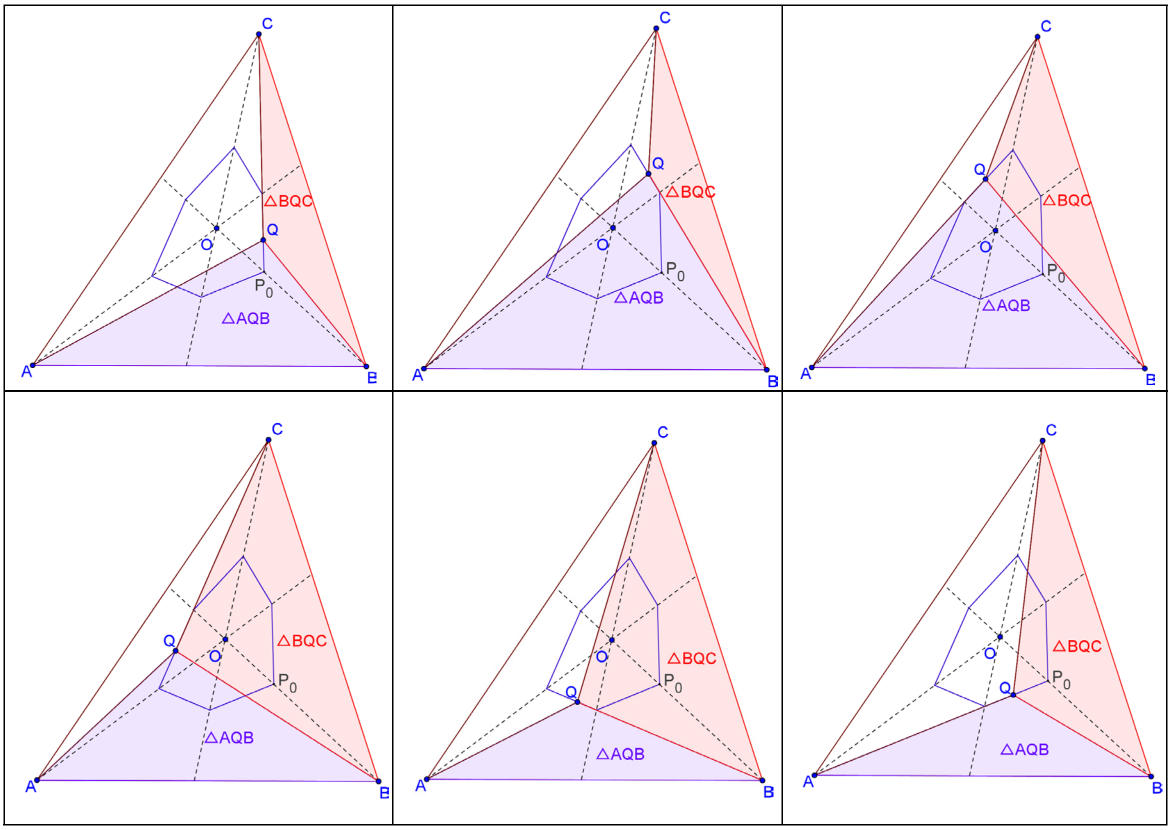
左下の三角形 ABC と中心 O に対して, $C(\theta)$ と $S(\theta)$ のグラフは, 図のようになります.



trigonometric functions.fig

$C(\theta)=\dfrac{\triangle \mathrm{QBC}}{\triangle \mathrm{QAB}}$ なので, $C(\theta)$ は「$0\le\theta\le1$ で減少, $1\le\theta\le2$ と $4\le\theta\le5$ で一定, それ以外では増加」することが容易に分かります. $S(\theta)$ に関しても同様に概略は分かります.

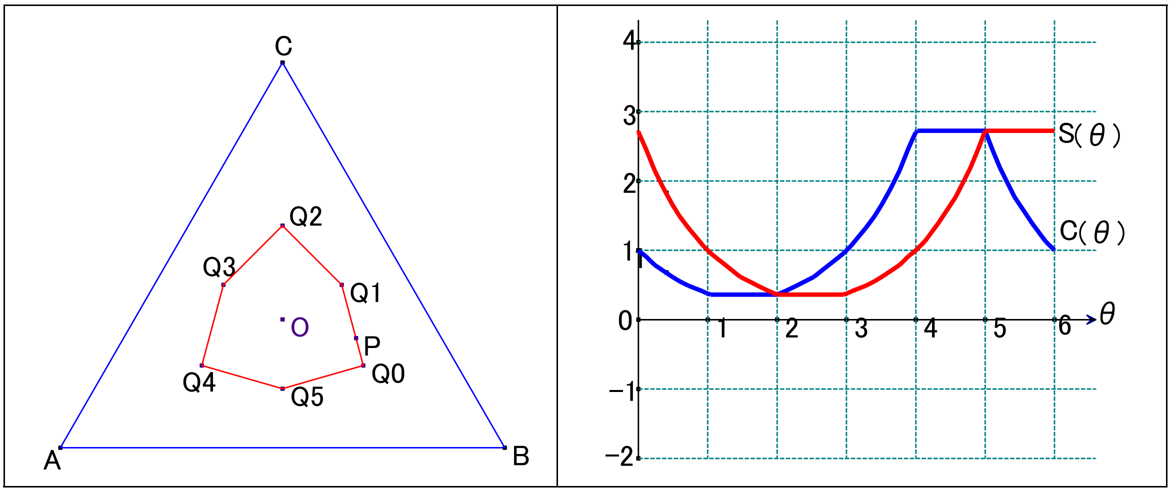
また 定数関数でない区間は 指数関数 です.



trigonometric function.ggb

6-2-1. 境界が正三角形のときの $C(\theta)$ と $S(\theta)$

左下の正三角形 ABC に対して，$C(\theta)$ と $S(\theta)$ のグラフは，図のようになります．

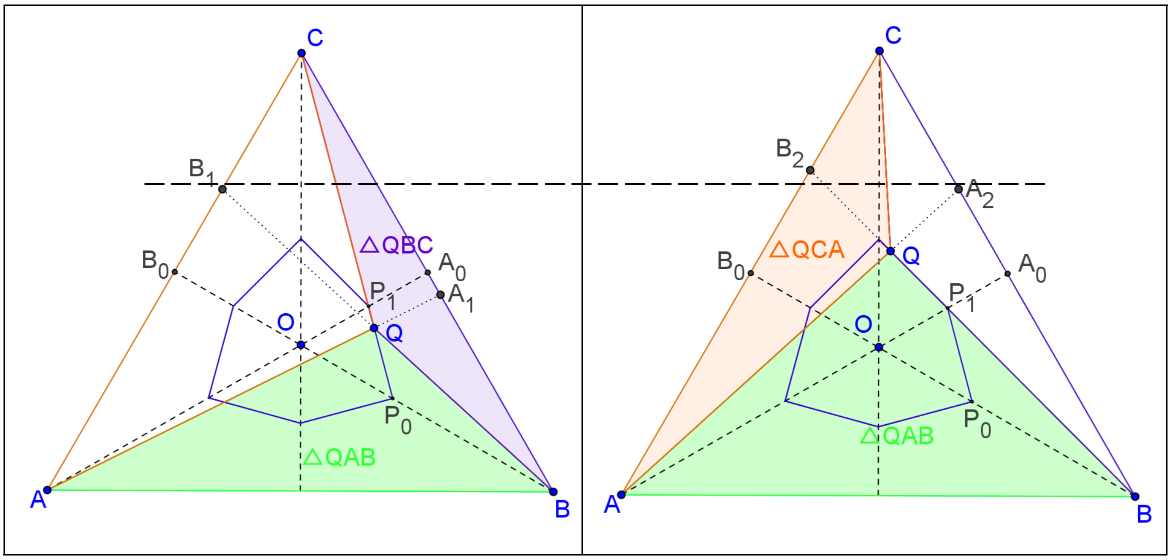


trigonometric functions in regular triangle.fig

$S(\theta)$ のグラフは $C(\theta)$ のグラフを θ 軸方向に 1 平行移動したグラフになります．即ち，

$$C(\theta) = S(\theta+1)$$

です．これは正三角形の対称性を使っても示せます．（次頁）



左上図で$\angle P_0OQ=\theta$ $(0<\theta<1)$，また左図のB_1と右図のA_2の高さは等しいとすると，

$$C(\theta)=\frac{\triangle QBC}{\triangle QAB}=\frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{A_2C}}{\overline{BA_2}}=\frac{\triangle QCA}{\triangle QAB}=S(\ 1+disH(P_1,Q)\ )$$

射影により複比は変わらないので，

$$disH(P_1,Q)=\log([P_1,Q|B,B_2])=\log([A_0,A_2|B,C])=\log([B_0,B_1|A,C])=disH(P_0,Q)=\theta$$

ゆえに，「$0<\theta<1$のときは，$C(\theta)=S(\theta+1)$」が成り立ちます．θが他の区間にある時も同様に示すことが出来ます．

6-3. 他の「三角関数」の定義

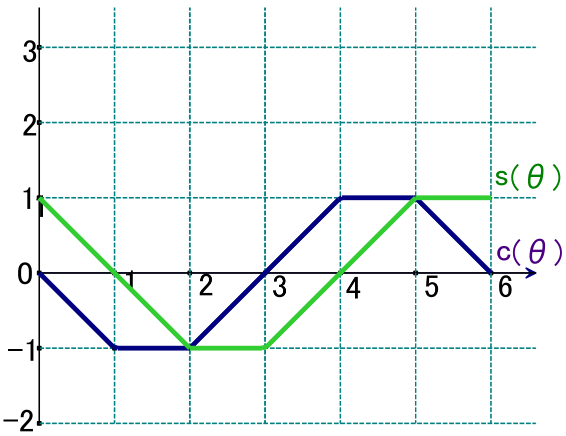
$C(\theta)$ と $S(\theta)$ 以外にも 様々な「三角関数」を定義できます.

6-3-1. *c(θ)* と *s(θ)* の定義

6-2 の $\mathrm{C}(\theta)$ と $\mathrm{S}(\theta)$ を用いて,

$$\mathrm{c}(\theta) = \log C(\theta), \quad \mathrm{s}(\theta) = \log S(\theta)$$

と定義します. するとグラフの形が通常の $\cos\theta, \sin\theta$ と近くなります. 下図は, △ABC が 正三角形のときのグラフです.



trigonometric functions in regular triangle.fig

6-3-2. *T(θ)* と *t(θ)* の定義

$$T(\theta) = \frac{S(\theta)}{C(\theta)}, \quad t(\theta) = \frac{s\left(\theta - \frac{1}{2}\right)}{c(\theta)} = \frac{\log\left(\mathrm{S}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right)}{\log\left(C(\theta)\right)}$$

と定義します. $t(\theta)$ のグラフの形は通常の $\tan\theta$ と近くなります. 詳しくは Mauricio 教授の paper をお読みください.