ポアンカレ Disk

1-1. Mebius-Cailey 変換

ポアンカレ Disk とは，複素平面上で，単位円の内部と周上を指します．ここで Mebius-Cailey 変換:

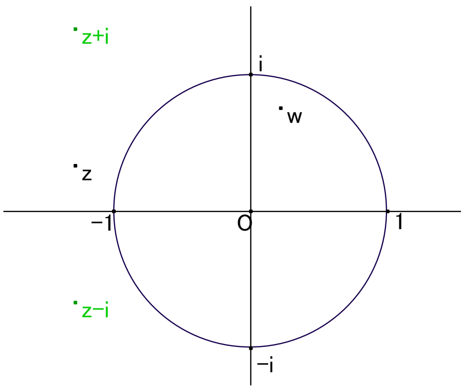
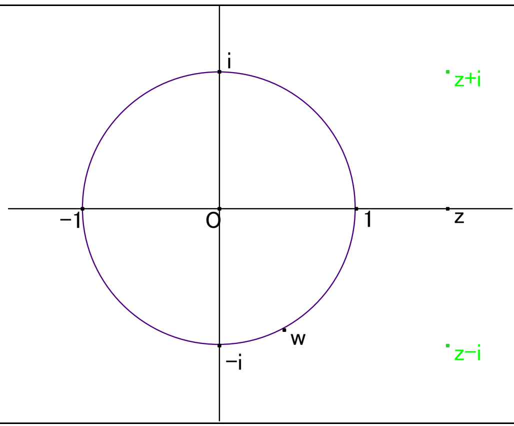
$$f : \omega = \frac{z-i}{z+i}$$

を考えると，

z が上半平面($\mathrm{Im}(z) > 0$)にあるとき，$|z-i| < |z-(-i)| \Longleftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$.

z が実軸上にあるとき，$|z-i| = |z-(-i)| \Longleftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

ゆえに， f は H^{+} 上の点 z を， ポアンカレ Disk 上の点に，1 対 1 かつ連続に 移します.

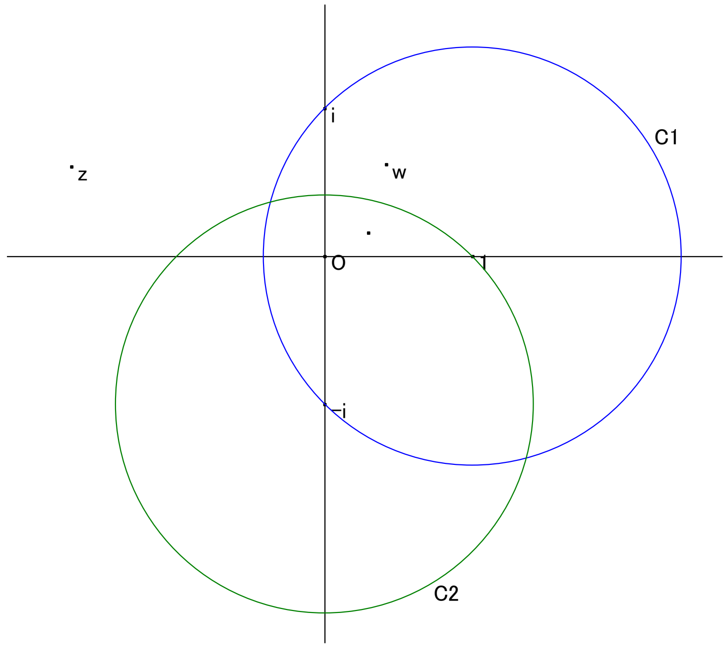
	
$\mathrm{Im}(z) > 0$ のときは，単位円の内部に移る	$\mathrm{Im}(z) = 0$ のときは，単位円の周上に移る

Cabri II による検証

z をつまんで動かしてみてください． mobius0.html

1-2. Mebius-Cailey 変換の合成

Mebius-Cailey 変換 は，2 円に関する鏡像変換の合成で表せます．これを使うと CabriⅡなどのソフトで簡単に作図ができます．



C_1, C_2 をそれぞれ中心が 1，$-i$ で半径が $\sqrt{2}$ の円とします．C_1, C_2 に関する鏡像変換を f_1, f_2 とすると，

$$f_2 \circ f_1(-i) = f_2(-i) = \infty, \quad f_2 \circ f_1(i) = f_2(i) = 0, \quad f_2 \circ f_1(\infty) = f_2(1) = 1$$

一方，

$$f(-i) = \infty, \quad f(i) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

ですから，$f_2 \circ f_1$ と f は 3 点（$\pm i$ と ∞）の像が一致し，かつ共に 1 次分数変換なので

$$f = f_2 \circ f_1 \quad \text{（恒等的に一致 ）}$$

【注】 実際に計算で示すことも出来ます．$z \xrightarrow{f_1} z' \xrightarrow{f_2} \omega$ とすると，

$$\begin{cases} z'-1 = \dfrac{(\sqrt{2})^2}{\overline{z-1}} \Longleftrightarrow z' = \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \\ \omega-(-i) = \dfrac{(\sqrt{2})^2}{\overline{z'-(-i)}} \Longleftrightarrow \omega = \dfrac{1-i\,\overline{z'}}{\overline{z'}-i} \end{cases}$$

よって，

$$\omega = \frac{1-i\cdot\dfrac{z+1}{z-1}}{\dfrac{z+1}{z-1}-i} = \frac{(1-i)z-(1+i)}{(1-i)z+(1+i)} = \frac{z-\dfrac{1+i}{1-i}}{z+\dfrac{1+i}{1-i}} = \frac{z-i}{z+i}$$

CabriⅡによる検証

z をつまんで動かしてみてください． [mobius.html]