2.ポアンカレ Disk 内の基本図形，双曲的合同変換

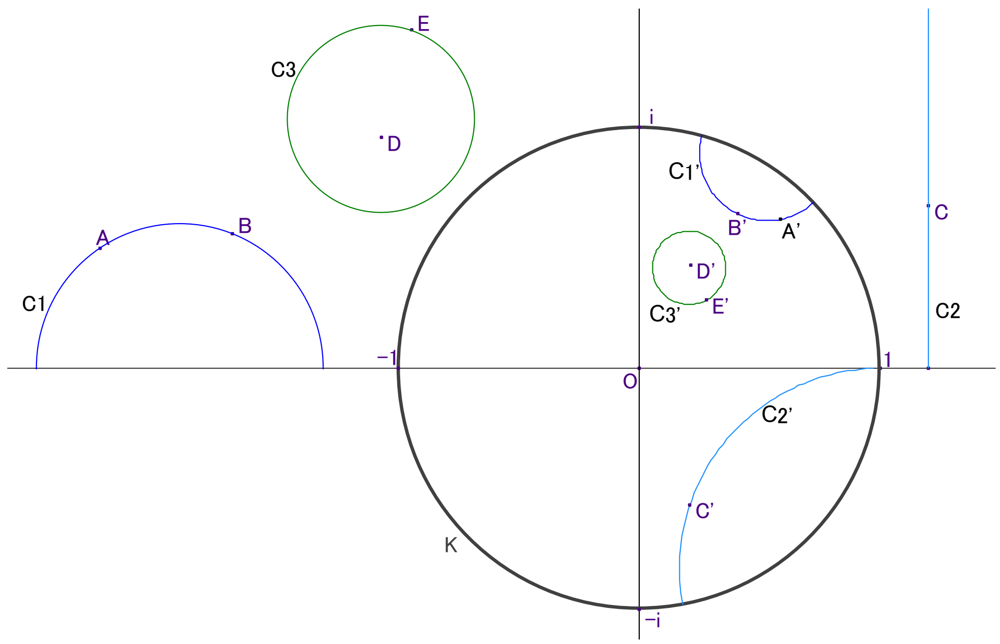
2-1.双曲的直線と双曲的円

Mebius-Cailey 変換「$f:\omega=\dfrac{z-i}{z+i}$」は 1 次分数変換なので「対応する角度は変えず（等角性)」，また「円→円対応」をします．ポアンカレ上半平面(H^{+})では，　双曲的直線は「実軸 l と直交している一般化された円 C」ですから，その像 $f(l)$ と $f(C)$ も直交します．ところが $f(l)$ は単位円 K なので,

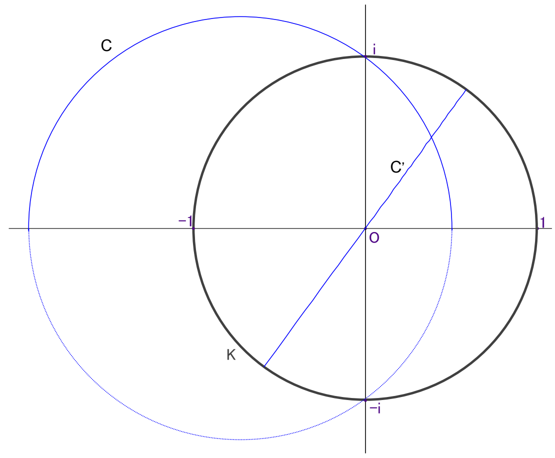
上半平面の双曲的直線は, 単位円と直交する一般化された円に移ります. また, 上半平面の双曲的円は, 単位円内の円に移ります．（注 :「一般化された円」とは「ユークリッド的な 円または直線」です.）

これらが　ポアンカレ円盤に於ける 双曲的直線 と 双曲的円 になります.

下図で，C_1,C_2 はポアンカレ上半平面上の双曲的直線で，C_3 はポアンカレ上半平面上の双曲的円です．それらを Mebius-Cailey 変換で単位円内(ポアンカレ円盤)に移した図形が，それぞれ C_1',C_2',C_3' です．「z が虚軸無限大に近づくとき，　$\omega\to 1$」なので，実軸に直交する双曲的直線 C_2 は，「点1」を通る双曲的直線 C_2' へ移ります.



【注】　「$f(i)=0, f(-i)=\infty$」なので，H^+ 上の「i」を通る双曲的直線は，単位円の直径に移ります．



2-1-1．Cabri II による検証

Drag A,B,C,D,E　　　　　　line&circles.html

2- 2 .極限円と等距離線

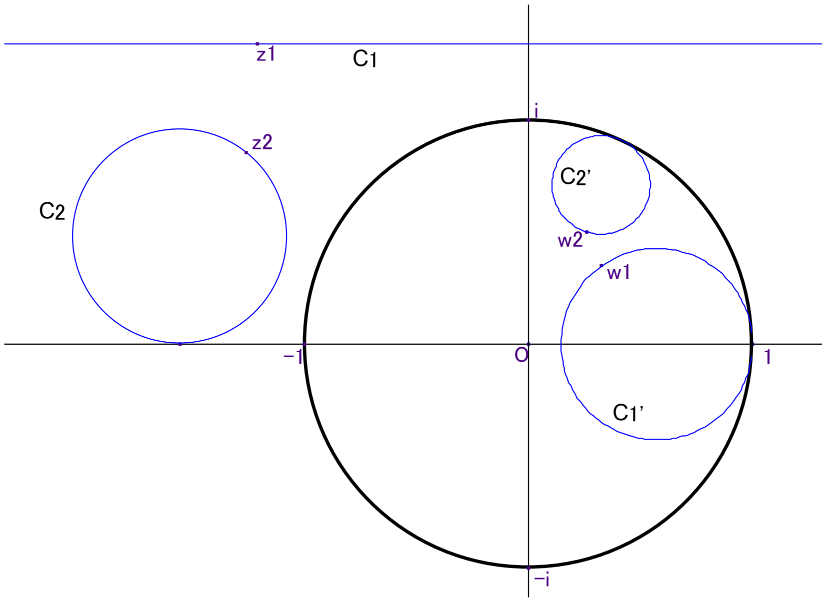
ポアンカレ上半平面(H^+)上の **極限円** や **等距離線** を，**Mebius-Cailey 変換**「$f:\omega=\dfrac{z-i}{z+i}$」で 単位円盤に移した図形が，それぞれ ポアンカレ円盤内の **極限円** や **等距離線** となります．

2-2-1．極限円

ポアンカレ上半平面(H^+)上の **極限円** は，「実軸に接する円」または「実軸に平行な直線」でした．「$f(\infty)=1$」だから「実軸に平行な直線」は，「点1で単位円に内接する円」に移り，「実軸に接する円」は，「点1以外で単位円に内接する円」に移ります．すなわち，ポアンカレ円盤内の**極限円**は，

単位円に内接する円

です．（下図のC_1, C_2は H^+ 内の極限円で，それらを f で移した図形が C_1', C_2' です.）



2-2-1-1. Cabri II による検証

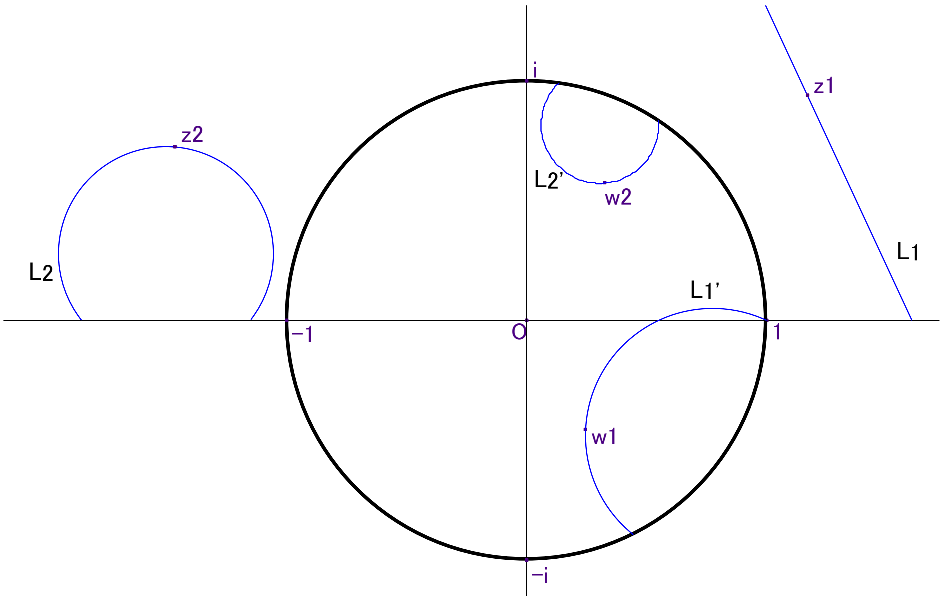
Drag $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, z_1, z_2$ horicircle.html

2-2-2. 等距離線

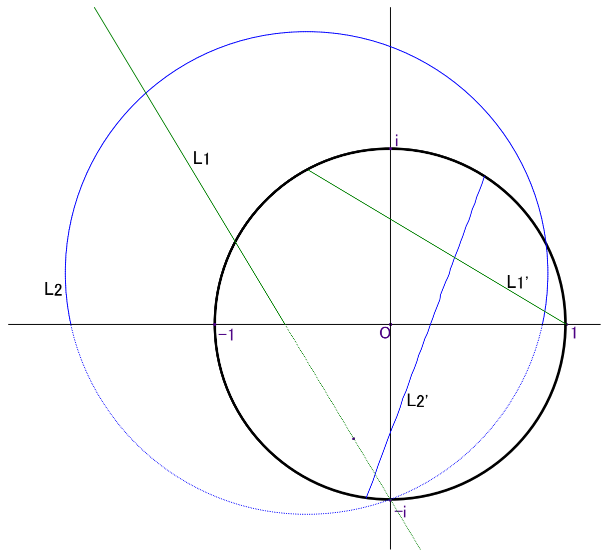
H^+ 上の **等距離線** は，「実軸と斜交する半直線」または「実軸と斜交する円」でした．「$f(\infty)=1$」だから「実軸と斜交する半直線」は，「点1を通り単位円と斜交する円」に移り，「実軸と斜交する円」は，「点1を通らない単位円に斜交する円」に移ります．すなわち，ポアンカレ円盤内の**等距離線**は,

単位円と２点で交わるが　直交しない一般化された円

です．（下図の L_1, L_2 は H^+ 内の等距離線で，それらを f で移した図形が L_1', L_2' です.）



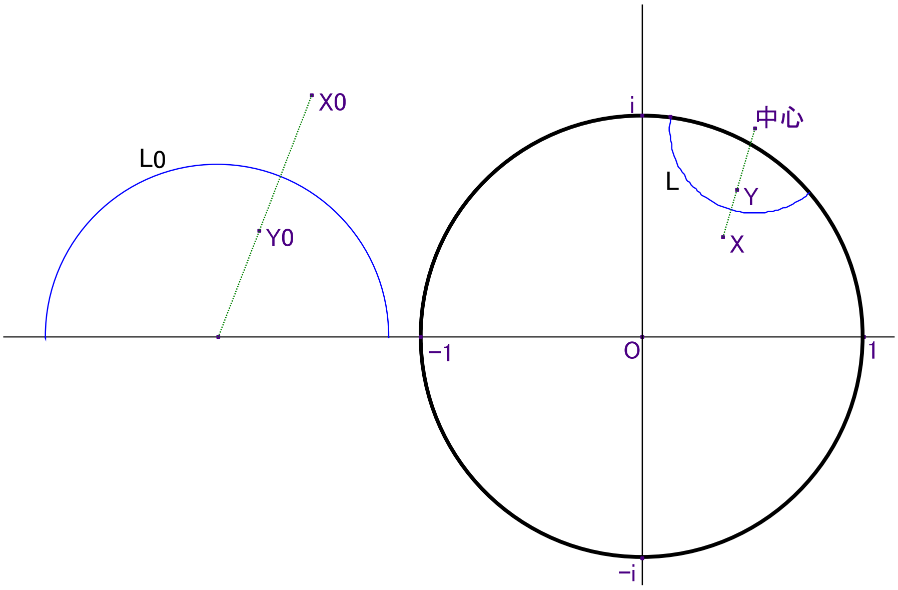
【注】「$f(-i)=\infty$」なので，L_1, L_2 を延長した直線が 点 $(-i)$ を通る時，L_1', L_2' は単位円の（直径ではない）弦となります.



2-2-2-1. Cabri II による検証

Drag $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, z_1, z_2$ equi_distant_line.html

2-3．ポアンカレ円盤内の双曲的合同変換



ポアンカレ円盤内の２点をＸとＹ，双曲的直線をＬ，Mebius-Cailey 変換を f とすると，

「ＸとＹがポアンカレ円盤内でＬに関し対称（鏡像）」⇔「f^{-1}(X) と f^{-1}(Y) が f^{-1}(L) に関し鏡像」

とします．（上図では $X_0 = f^{-1}(X)$ と表示しています.）ところが，

「g を１次分数変換とすると，点Ｐ とＱ が円Ｃに関し鏡像ならば，g(P) と g(Q) も，g(C) に関し鏡像となる.」(「鏡像原理」)

が成り立つので，ＸとＹは「通常の意味でも」Ｌに関し鏡像になっています．即ちＬに関する（通常の）「複素数平面上の鏡像変換」によってＸはＹに移ります． わざわざ H^+ に f^{-1} で戻してから鏡像を取る必要はありません．

また， H^+ では「全ての H^+ の双曲的合同変換は， H^+ の双曲的直線に関する鏡像の合成で表せます.」それと同様に，ポアンカレ円盤(Disk)では，Disk 上の全ての双曲的合同変換は，Disk 上の双曲的直線に関する鏡像の合成で表せます．

2-3-1．CabriⅡによる検証

Drag A,B,P　　　　　mirror.html

2-4. ポアンカレ円盤内の「幾何」

Mebius-Cailey 変換「$f:\omega=\dfrac{z-i}{z+i}$」は「一対一かつ連続な変換」なので，ポアンカレ上半平面での点，双曲的直線と双曲的円などの結合関係（交わるとか，同一直線上にあるとか双曲的合同であるなどの関係）は，そのままポアンカレ円盤でも成り立ちます．すなわち，

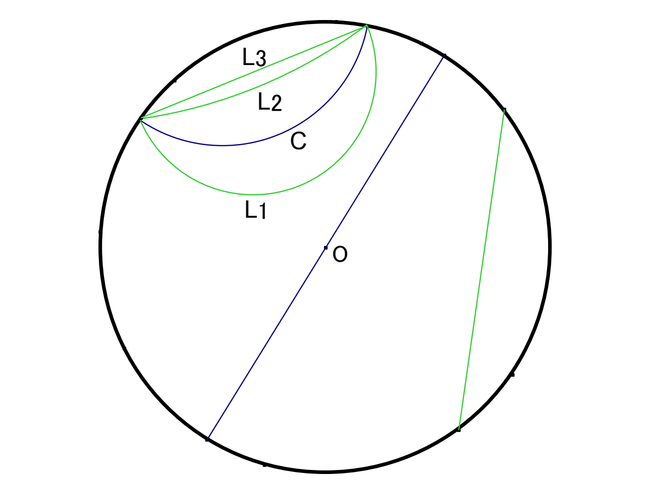
ポアンカレ上半平面で成り立つ幾何の定理は，ポアンカレ Disk 上でも成り立ち，また逆に，ポアンカレ Disk 上で成り立つ幾何の定理は上半平面上でも成り立ちます．

このように

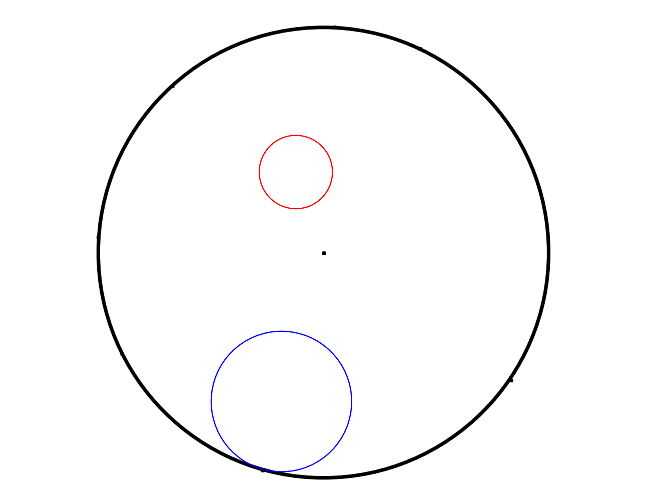
一対一かつ連続な変換によって移されたモデルは，元のモデルと幾何的には同一視できます．

よって双曲的幾何のモデルは無数に作ることが出来ます．

	ポアンカレ上半平面	ポアンカレ Disk
双曲的直線	実軸と直交する一般化された円	単位円と直交する一般化された円
双曲的円	実軸と共有点を持たない円	単位円の内部の円
等距離線	実軸と 2 点で交わる円，実軸と斜交する直線	単位円と斜交する一般化された円
極限円	実軸と接する円，実軸と平行な直線	単位円と接する円
無限遠直線	実軸	単位円
双曲的合同変換	双曲的直線に関する鏡像の合成	双曲的直線に関する鏡像の合成



紺色は双曲的直線，緑色は等距離線．また，
L_1, L_2, L_3 は全て，双曲的直線 C からの等距離線



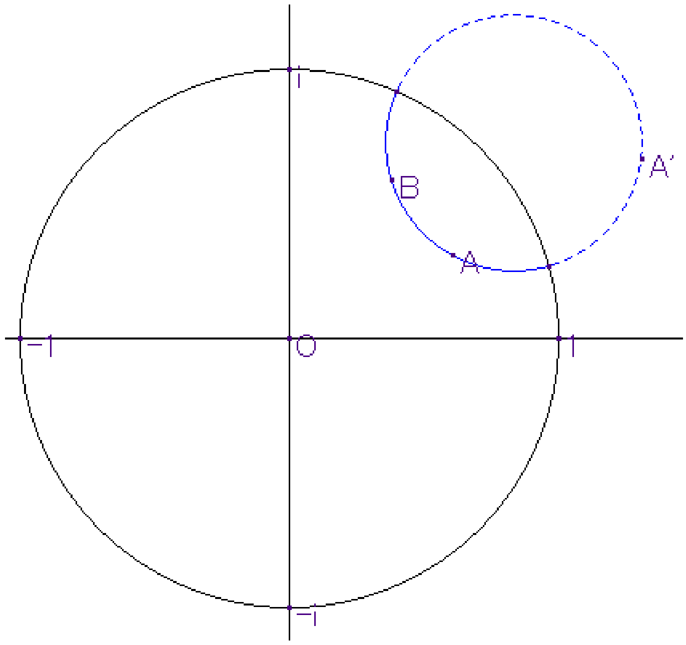
赤色は双曲的円，青色は極限円

2-5. 双曲的直線と双曲的円の CabriⅡによる作図

【注】双曲的直線，双曲的円などは全て　ポアンカレ円盤内の基本図形とします.

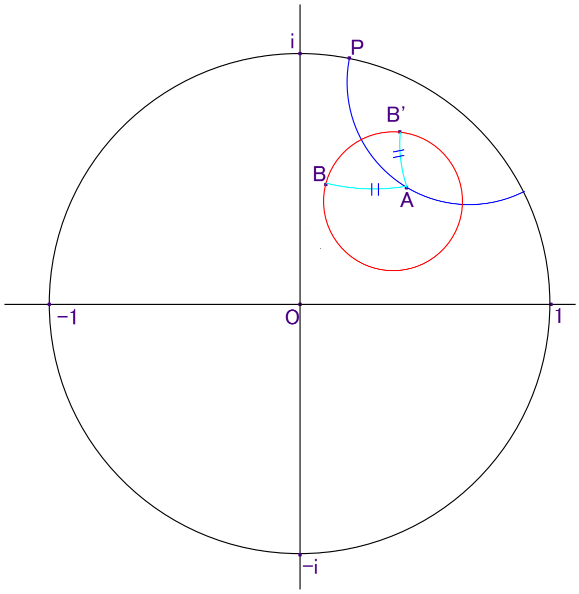
2-5-1. 双曲的直線の作図

下図で単位円に関する点 A の鏡像を A'とし，3 点 A,A',B を通る円 C を描くと，鏡像変換の性質より，円 C は単位円と直交します．よって C は双曲的直線です.



2-5-2. 双曲的円の作図

単位円上に動点 P をとり，双曲的直線 AP を L とします．L に関する点 B の鏡像を B'とすると，鏡像変換は双曲的合同変換なので，[A,B]=[A,B'] （ただし，点 A と点 B の双曲的距離を[A,B]と書きます.）よって，点 P が単位円上をくまなく動く時，点 B'の軌跡は「A を中心とし B を通る双曲的円」です.



2-5-2-1. CabriⅡによる検証

Drag A,B,P　　　　　draw_circle.html