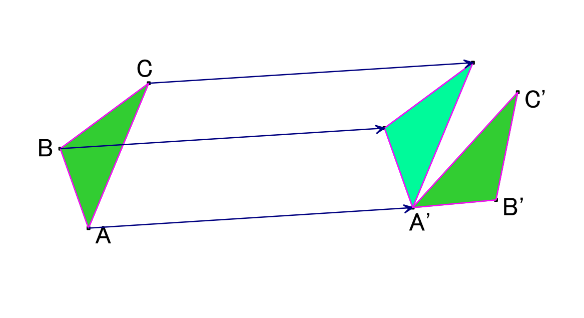
5．双曲的合同変換の分子と原子

5.1. ユークリッド的合同変換の「分子」

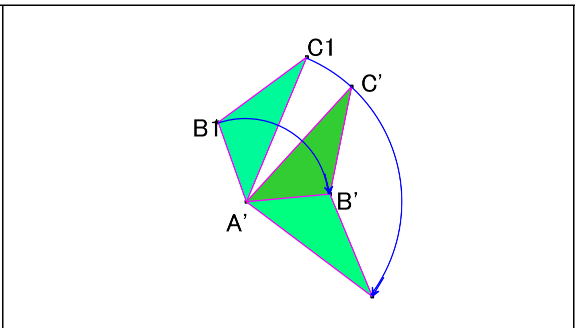
よく知られているように，ユークリッド平面では 全ての合同変換は　**平行移動，回転移動，対称移動**の合成で表すことができます．すなわち「**二つの合同な図形があったとき，平行移動，回転移動，対称移動の合成で，一方の図形を他方の図形に移すことができます**」．この意味で，**平行移動，回転移動，対称移動** は「合同変換を作り上げる分子」のようなものと言えます．

例えば，合同な△ABC と△A'B'C' があったとき，次のようにして△ABC を△A'B'C'へ移すことができます．

①平行移動によって頂点 A を A'へ移す．
②A' を中心とする回転によって，点 B を B'へ移す．
③図形の向きが違っている場合は，直線 A'B'に関する対称移動で C を C'へ移す．



①平行移動によって頂点 A を A'へ移す



②A'を中心とする回転によって，点 B を B'へ移す

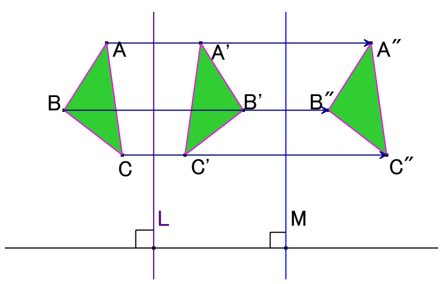
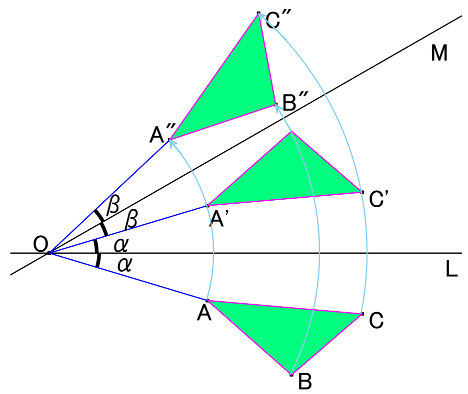
5.2. ユークリッド的合同変換の　「原子」

平行移動，回転移動，対称移動のうち，「平行移動」と「回転移動」は，二つの「対称移動」の合成で表せます.

即ち，f, g をそれぞれ 直線 L，直線 M に関する対称移動 とすると，f と g の合成 $g \circ f$ は，

$$L /\!/ M \text{ のときは，平行移動,} \quad L \nparallel M \text{ のときは，回転移動}$$

となります. すなわち L//M のときは，$g \circ f$ は, L と M に垂直な方向への平行移動となります. L と M が点 O で交わっているときは，$g \circ f$ は点 O を中心とする回転移動となります.（下図）

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overline{AA''} = 2\cdot$(LとMの距離) で一定，$AA'' \perp L$
A は任意の点なので，$g \circ f$ は平行移動</td>
<td>$\overline{OA''} = \overline{OA}$，$\angle AOA'' = 2(\alpha + \beta)$ (一定)
A は任意の点なので，$g \circ f$ は回転移動</td>
</tr>
</table>

このように「平行移動」と「回転移動」は，二つの「対称移動」の合成で表せるので，結局，全ての合同変換は，対称移動だけで表せます. この意味で「対称移動は，合同変換の原子」と言えます.

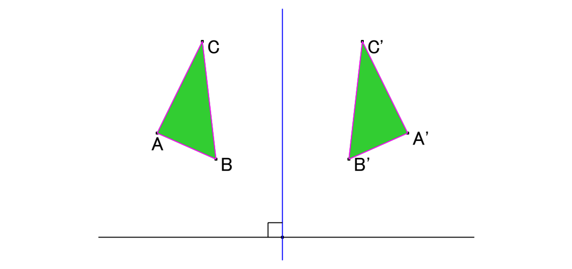
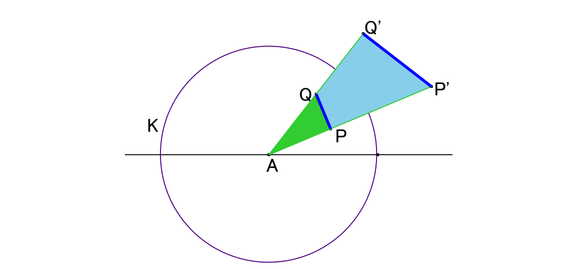
Cabri II による検証（回転移動を鏡像変換で合成）

Drag L, M, A , B, C　　rotation_on_E.html

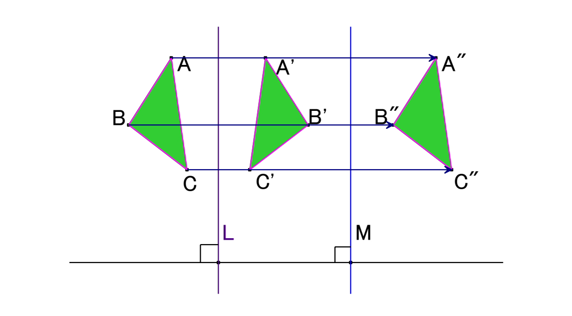
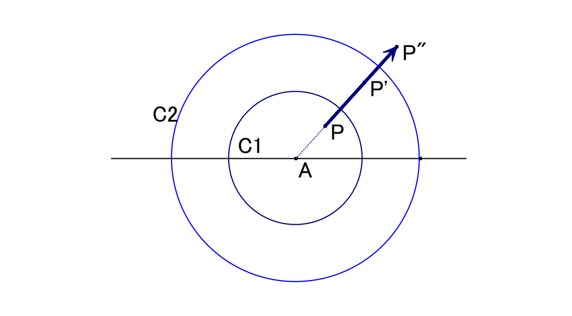
5.3. 双曲的合同変換の原子

ユークリッド平面と同様に，双曲的直線に関する鏡像変換の合成によって，「二つの双曲的合同な図形があったとき，一方の図形を他方の図形に移すことができます」．この意味で，双曲的直線に関する鏡像変換は「双曲的合同変換を作り上げる原子」のようなものと言えます．

[双曲的合同変換の原子は次の 2 つです]

	
実軸に垂直な直線に関する鏡像（対称移動）	実軸上の点 A を中心とする円に関する鏡像

f, g をそれぞれ双曲的直線 L, M に関する鏡像変換 とします．
(ア)「L, M が実軸に垂直な直線」の場合は，$g \circ f$ は「実軸に平行な方向への平行移動 (2.1)」です．
(イ)「L, M が実軸上の点 A を中心とする同心円」の場合は，$g \circ f$ は「点 A を相似の中心とする，相似比が正の相似変換 (2.3)」となります．　・・・(∗)

	
実軸に平行な方向への平行移動	実軸上の点 A を相似の中心とし，相似比が正の相似変換

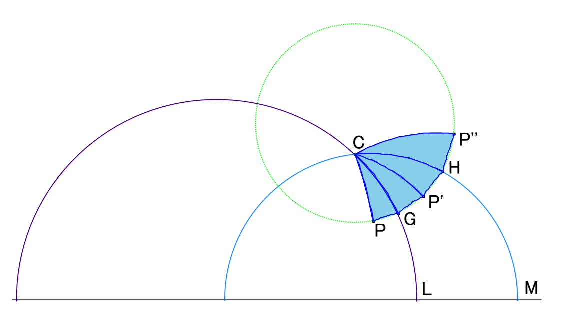
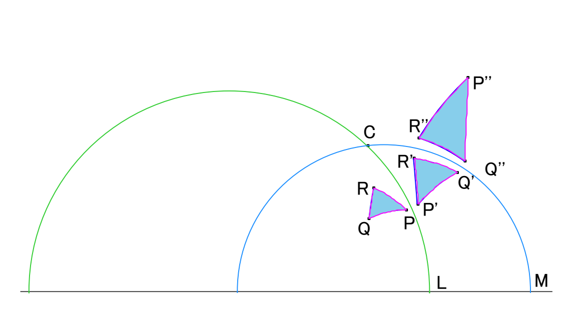
【注】(∗)の証明.

A が原点にくるように平行移動しても一般性を失わない．このとき，A を中心とする半径 R_1, R_2 の円に関する鏡像変換をそれぞれ f, g とすると，　$f : z \mapsto \dfrac{R_1{}^2}{\overline{z}}$，　$g : z \mapsto \dfrac{R_2{}^2}{\overline{z}}$

故に，f と g の合成は，　$g \circ f :\ z \mapsto \dfrac{R_2{}^2}{\overline{\left(\dfrac{R_1{}^2}{\overline{z}}\right)}} = \dfrac{R_2{}^2}{R_1{}^2} z = kz$　(kは正の定数)　　(Q.E.D.)

(ウ)「L, M が H+ 内の点 C で交わる場合」は，$g\circ f$ は「点 C を中心とする双曲的回転移動」となります．左下図で「$P \xrightarrow{f} P' \xrightarrow{g} P''$」とします．さらに弧 CP,CP',CP'',PG,P'G,P'H,P''H は全て双曲的線分とします．このとき，△CPG≡△CP'G，△CP'G≡△CP''G (双曲的合同)だから，

$$[C,P]=[C,P']=[C,P''],\quad \angle PCP'=2\times(\angle GCP'+\angle P'CH)=2\angle GCH\ (一定)$$

	
点 C を中心とする双曲的回転移動	点 C を中心とする双曲的回転移動

【注】上の説明で「角」は「双曲的角度」を表しています．双曲的角度は双曲的合同変換で変わらないので，「$\angle PCG=\angle P'CG$」などの相対的関係は成り立ちます．

以上より，f, g をそれぞれ双曲的直線L, Mに関する鏡像変換 とすると，$g\circ f$ は，

(ア) L,M が実軸に垂直な直線のときは，実軸に対する平行移動，

(イ) L,M が実軸に中心 A を持つ同心円のときは，A を中心とする相似変換，

(ウ) L,M が H+内の点 C で交わる円のときは，C を中心とする双曲的回転移動

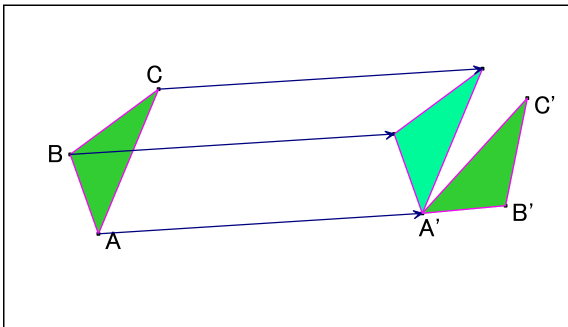
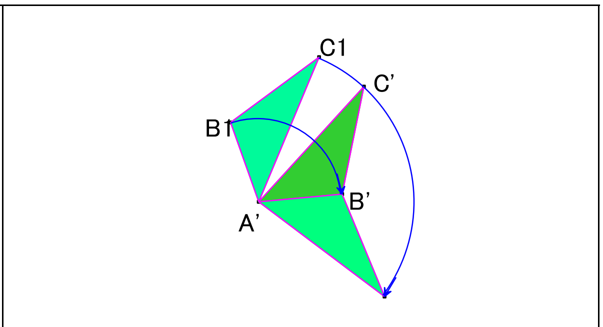
を表します．

(ア),(イ),(ウ)の変換と鏡像変換を利用して，双曲的に合同な△ABC と△A'B'C' は，互いに移せます．即ち，

① (ア) または (イ) の変換によって頂点 A を A'へ移す．

② A' を中心とする双曲的回転(ウ) によって，点 B を B'へ移す．

③ 図形の向きが違っている場合は，双曲的直線 A'B'に関する鏡像で C を C'へ移す．

	
① 平行移動・相似 によって，頂点 A を A'へ移す	② A'を中心とする回転によって，点 B を B'へ移す

（ア),(イ)の変換も「鏡像変換の合成」で作れるので,

鏡像変換の繰り返しにより，２つの双曲的合同な図形を, 互いに他方の図形に移すことができます.

この意味で,

双曲的直線に関する鏡像変換は「双曲的合同変換を作り上げる原子」

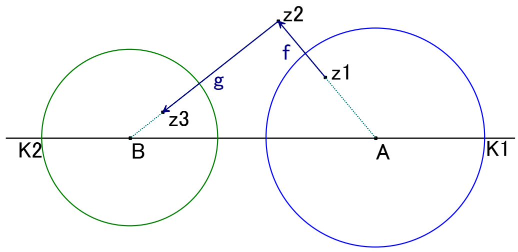
と言えます.

CabriⅡによる検証　(双曲的回転移動)

Drag　C,D,E,P.　rotation_on_H+(no1).html ,　　Drag　C,D,E,P,Q,R.　rotation_on_H+(no2).html

5.4. 双曲的合同変換の分子

「(ア)実軸と平行な移動，(イ)実軸上の点 A を中心とする相似変換，(ウ)双曲的回転移動」([5.3])の 3 つは，双曲的合同変換の分子 といえますが，これ以外にも「双曲的直線に関する鏡像変換」の合成で表される変換はあります．しかも，偶数回の合成は，全て一次分数変換 (2-6)となります．



点 A(a)，点 B(b)を実軸上の点,

A が中心で半径 R_1 の円 K_1 に関する鏡像変換を f ,

B が中心で, 半径 R_2 の円 K_2 に関する鏡像変換を g

とすると,

$$f: z \mapsto \frac{R_1^{\ 2}}{\overline{z}-a}+a, \quad g: z \mapsto \frac{R_2^{\ 2}}{\overline{z}-b}+b$$

よって f と g の合成は,

$$g \circ f: \ z \mapsto \frac{R_2^{\ 2}}{\dfrac{R_1^{\ 2}}{z-a}+a-b}+b=\frac{\{R_2^{\ 2}+b(a-b)\}z-aR_2^{\ 2}+bR_1^{\ 2}-ab(a-b)}{(a-b)z-a(a-b)+R_1^{\ 2}}$$

「$A=R_2^{\ 2}+b(a-b)$，$B=-aR_2^{\ 2}+bR_1^{\ 2}-ab(a-b)$，$C=(a-b)$，$D=R_1^{\ 2}-a(a-b)$」

とおくと,

$$\begin{aligned} AD-BC &= \left\{R_2^{\ 2}+b(a-b)\right\}\left\{R_1^{\ 2}-a(a-b)\right\}-\left\{-aR_2^{\ 2}+bR_1^{\ 2}-ab(a-b)\right\}\cdot(a-b) \\ &= (R_1R_2)^2>0 \end{aligned}$$

故に,

$$g \circ f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D} \quad (A,B,C,D \text{ は実数で}, AD-BC>0)\cdots(*)$$

即ち，$g \circ f$ は一次分数変換(2-6)です．f や g が「実軸に垂直な直線」の時も同様にして示せます．

ゆえに，鏡像変換の偶数回の合成は，全て一次分数変換 (2-6)となります．　（ 次頁【注】 ）
「一次分数変換の合成は　やはり一次分数変換」なので，鏡像変換を偶数回合成すると，全て一次分数変換 (2-6)となります．

すなわち，

「図形の向きを変えない」（ひっくり返さない）双曲的合同変換は，全て１次分数変換

また，

「図形の向きを変える」合同変換の場合でも，鏡像変換の合成で表せる

この意味で，

１次分数変換は，双曲的移動の分子，　鏡像変換は，双曲的移動の原子

です．

【注】実際，一次分数変換(2-6)；

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \text{ は実数}, ad-bc>0) \cdots (*)$$

において，

$a=1, c=0, d=1$ とすれば，$\omega = z+b$
$a \neq 1, c=0, d=1$ とすれば，$\omega = az+b \Longleftrightarrow \omega - \alpha = a(z-\alpha)$，但し $\alpha = a\alpha + b$

これらはそれぞれ，「実軸に平行な平行移動(ア)」と「α を相似の中心とする相似変換(イ)」を表しています．「双曲的回転移動(ウ)」も，$c \neq 0$ の 一次分数変換(2.6) となるはずです．　（【注】終わり）

5.5.　一次分数変換の合成に必要な回数

「双曲的直線に関する鏡像」の偶数回の合成は，下の 1 次分数変換(∗) になります. (5.4)

$$\omega=\frac{az+b}{cz+d}\ \ (a,b,c,d\ \text{は実数},\ ad-bc>0)\quad\cdots(*)$$

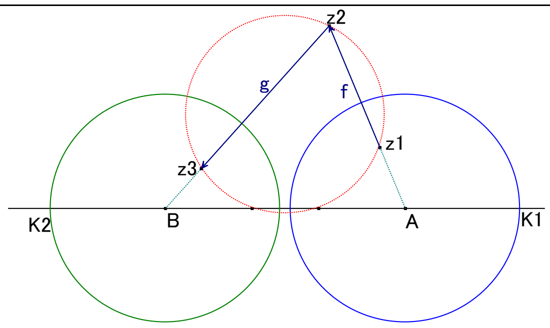
逆に，双曲的合同変換は「二つの双曲的直線 L,M に関する鏡像の合成」で作られる(5-3)ので，(*)のタイプの 1 次分数変換 も「直線 L,M に関する鏡像の合成」(2 回の鏡像の合成) で作られます.

【注】(∗)の形の 任意の一次分数変換は，「実軸に平行な移動」と「相似比が正の相似変換」と「$\omega=-\dfrac{1}{z}$ の変換」の合成で作られるので，(∗)の形の一次分数変換は， 偶数回の鏡像変換の合成で作れること は明らかです. しかし，「 2 回で充分！」というのがポイントです. これは，一般の 1 次分数変換 では成り立ちません.

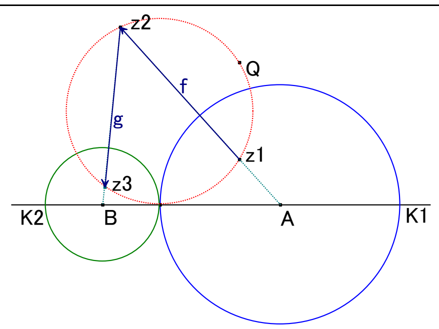
さらに， f,g をそれぞれ双曲的直線 L, M に関する鏡像変換 とすると， $g\circ f$ は，

(ア） L,M が交点を持たないならば，平行移動や，相似変換 を一般化した双曲的移動 ，
(イ）L,M が双曲的平行ならば，ユークリッド平面では存在しないタイプの双曲的移動 ，
(ウ）L,M が H^{+} 内の点 C で交わる時は，C を中心とする双曲的回転移動

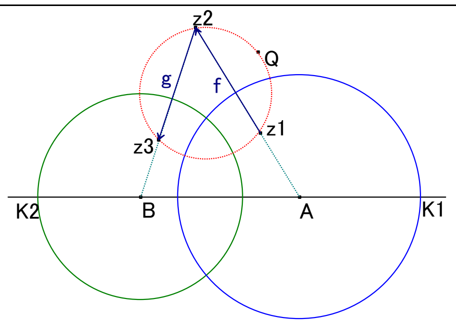
と 3 種類に分類され，それぞれ「双曲型」,「放物型」,「楕円型」と呼ばれます.（後述)



「双曲型」の一次分数変換（ア)



「放物型」の一次分数変換（イ)



「楕円型」の一次分数変換（ウ)

Cabri による検証

Drag z_1,Q,A,B,K_1,K_2

双曲型: hyperbolic_move.html
放物型: parabolic_move.html
楕円型: elliptical_move.html