付録（2 次曲線と接線）

1.　定理

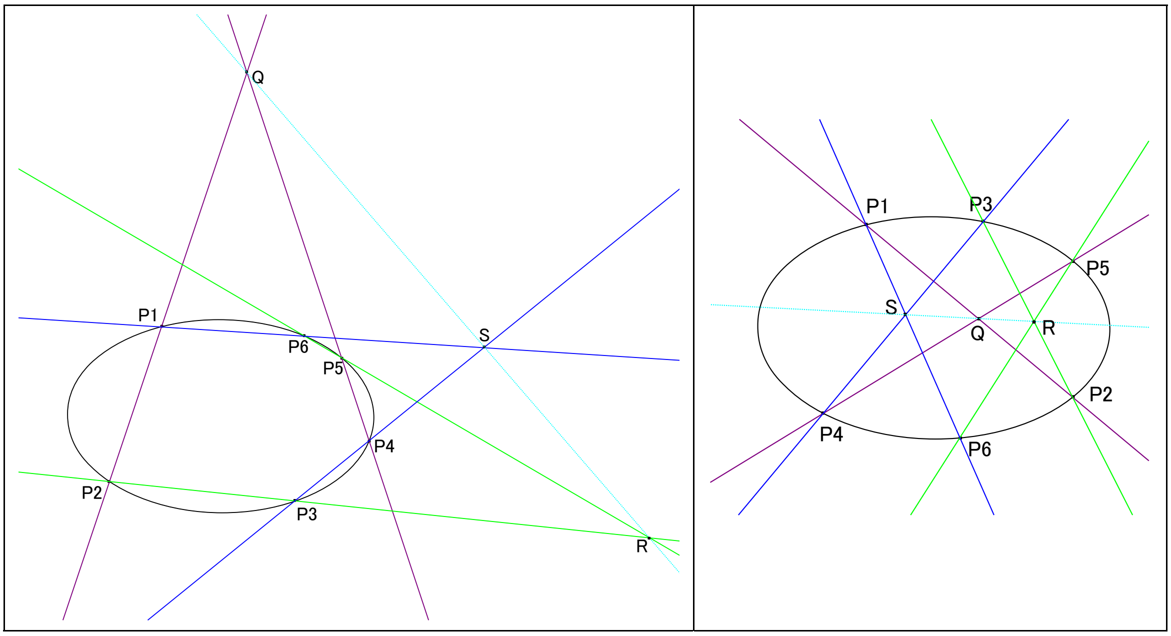
ここでは，「2 次曲線上の点 A に於ける接線」と「点 A から 二次曲線に引いた接線」の作図を考えます．それには，次の二つの定理を利用します．

定理 1. パスカルの定理

二次曲線 K 上に任意の 6 点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ をとり，直線 P_1P_2 と直線 P_4P_5 の交点を Q，直線 P_2P_3 と直線 P_5P_6 の交点を R，直線 P_3P_4 と直線 P_6P_1 の交点を S とすると，Q,R,S は同一直線上にある．即ち，二次曲線に内接する 6 角形の「対辺の交点」は，同一直線上にある．

【注】正 6 角形のとき，P,Q,R は全て無限遠点となり，直線 PQR は無限遠直線となります．この場合も「P,Q,R は同一直線上にある」と約束します．すなわち「無限遠点を集めた直線（無限遠直線）」も直線と考えます．

証明は，例えば，G.ジェンングス著「幾何再入門」をご覧ください．下図はその 1 例です．いずれの場合も Q,R,S は同一直線上にあります．

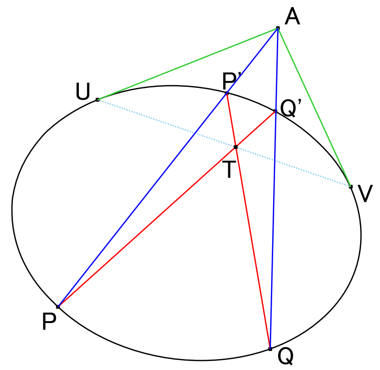


Cabri II による検証

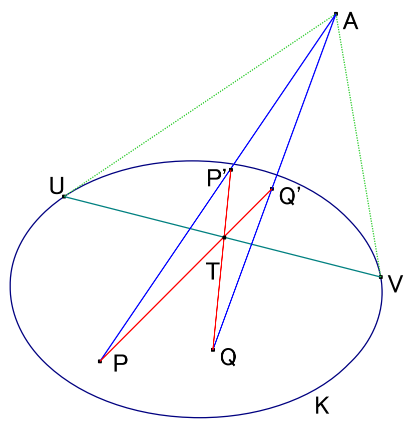
Drag P_1~P_6　　　pascal.html

定理 2. 二次曲線と極線

二次曲線 K 外に 1 点 A を, K 上に 2 点 P,Q を取り　直線 AP, AQ と K の交点をそれぞれ P',Q', A から K に引いた 2 本の接線と K の接点を U,V とします．このとき直線 PQ'と QP'の交点 T は 直線 UV 上にあります.

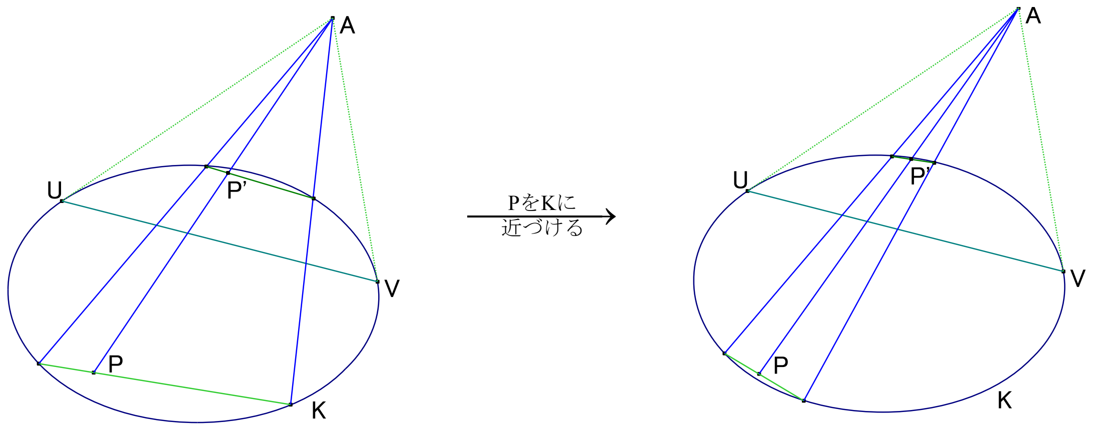


【証明】 射影クラインモデル上で考えます．P,Q が K の「内部」にあるとし，直線 UV に関する（クラインモデルの）鏡像変換を f，P,Q の f による像を P', Q'，さらに直線 PQ'と UV の交点を T とすると，T は f によって動きません. よって直線 PTQ'の像は, 直線 P'TQ となり，直線 PQ'と P'Q は　UV 上の一点 T で交わります.



ここで P と Q を境界 K に（ユークリッド的に）限りなく近づけていくと，P'と Q' は各々，直線 AP，AQ と K の交点に（ユークリッド的に）限りなく近づき，定理の図ができます．(Q.E.D.)

【注】 P が K に（ユークリッド的に）限りなく近づく時， P'は直線 AP と K の交点に限りなく（ユークリッド的に）近づきます．(もちろん K と P の**双曲的距離**は無限大のままです.)



【注】「パスカルの定理」と「デザルグの定理」を使っても証明できます.（「幾何再入門」）

CabriⅡによる検証

Drag A,P,Q　　　　　kyokusen.html

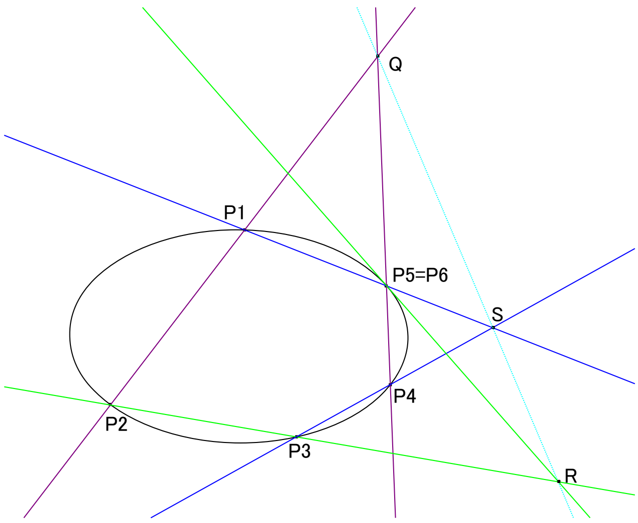
２．　接線の作図

作図 1. 「2 次曲線上の点に於ける接線」

パスカルの定理に於いて，P_5 と P_6 が一致した場合を考えます．この場合も，直線 P_5P_6 を「$P_5(=P_6)$ に於ける接線」に変えると，パスカルの定理は成り立ちます．即ち，点 $P_5(=P_6)$ に於ける接線 l と直線 P_2P_3 の交点を R とすると，Q,R,S は同一直線上にあります．
これを利用して，$P_5(=P_6)$ に於ける接線 l を作図することができます。

① 2 次曲線上に 5 点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 をとり，直線 P_1P_2 と直線 P_4P_5 の交点 Q，直線 P_3P_4 と直線 P_5P_1 の交点 S を作図します.

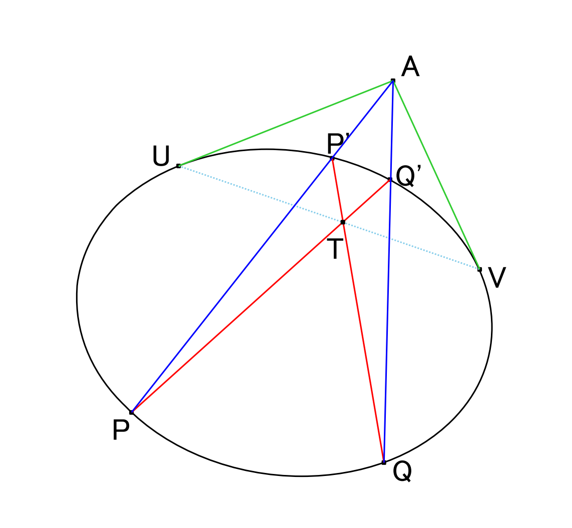
② 次に，直線 P_2P_3 と直線 QS の交点 R を作図して，R と P_5 を結びます．この直線 P_5R が，「2 次曲線上の点 P_5 に於ける接線 l」になります.



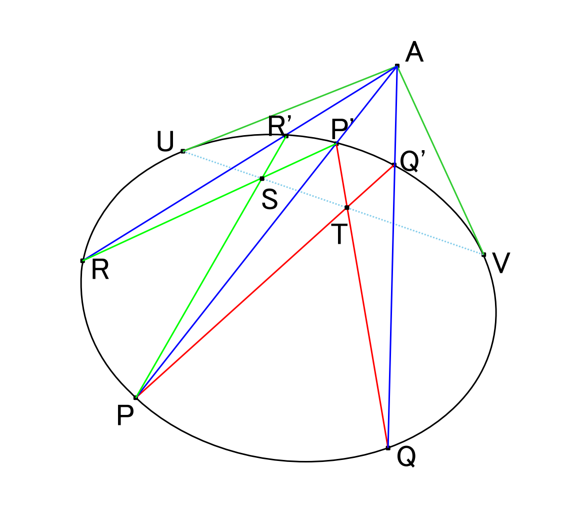
作図２．「点Aから２次曲線に引いた接線」

定理2を使えば，2次曲線K外の1点Aから，Kに引いた接線を引くことができます．
定理2より，K上に2点P,Qを取り 直線AP，AQとKの交点をそれぞれP',Q'とし，直線PQ'とQP'の交点をTとすると，TはAからKに引いた極線UV上にあります．（左下図）
これを利用して，Aから，Kに引いた接線を作図することができます．（右下図）

① K上に2点P,Qを取り 直線AP, AQとKの交点をそれぞれP',Q'とし，直線PQ'とQP'の交点Tを作図します．
② さらに K上にもう1点Rをとり，直線ARとKの交点をR'，直線PR'とRP'の交点Sを作図します．
③ この時，TもSも極線UV上にあるので，直線STとKの交点U,Vを作図すればU,Vは接点になります．よってAとU, AとVを結べば，「Aから引いた接線」となります．



定理２



AからKに引いた接線の作図