【解答】 正方形の頂点を A,B,C,D とし，監視員は A に居るとする．プールの中 (縁を含む) の点を P とし，「A から P にかかる最短時間」の最大値を求める．対称性から P は △ABC (周および内部) 上を動くとしてよい． このとき線分 AB または BC 上の点を Q とし, 監視員は 点 Q から水中に入り P へ行くとする．

(1) Q が辺 AB 上にあるとき
l を「A を通り 図のように AB と 30° で交わる半直線」, P,Q から l に下ろした垂線の足をそれぞれ A′,G とすると

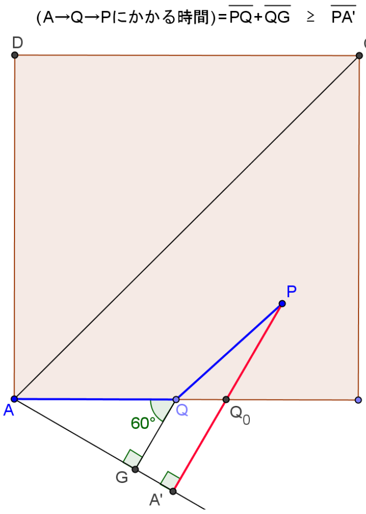
$$\overline{\mathrm{GQ}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AQ}}$$

よって

$$(\mathrm{A} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{P}\text{ にかかる時間}) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AQ}} + \overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{GQ}} + \overline{\mathrm{QP}} \geqq \overline{\mathrm{PA'}}$$

等号は Q が線分 PA′ と AB の交点に来たとき成り立つから，この場合の最短時間は

$$\overline{\mathrm{PA'}} \qquad \cdots ①$$



(2) Q が辺 BC 上にあるとき
図のように, $\mathrm{A_1}$ は，直線 CB 上で「$\overline{\mathrm{A_1B}} = \overline{\mathrm{AB}}$」となる点, m は「$\mathrm{A_1}$ を通り BC と 30° で交わる半直線」, P,Q から m に下ろした垂線の足をそれぞれ A″,H, さらに B から直線 QH に下ろした垂線の足を K とすると

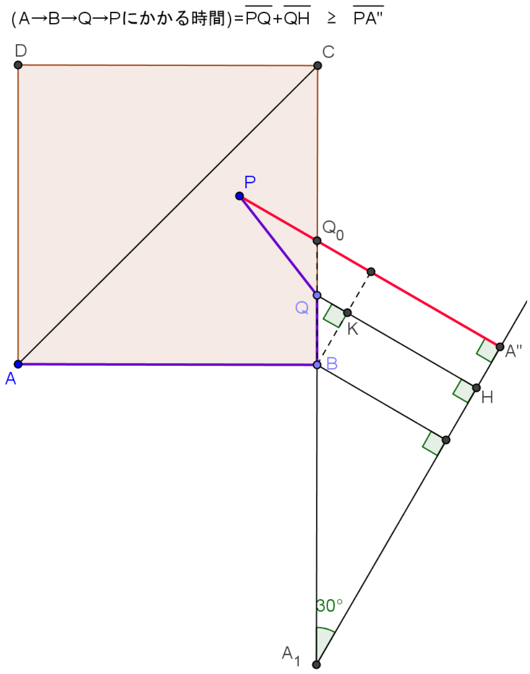
$$\overline{\mathrm{KH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}, \quad \overline{\mathrm{KQ}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BQ}}$$

よって

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{P}\text{ にかかる時間})\\ &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BQ}} + \overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{HK}} + \overline{\mathrm{KQ}} + \overline{\mathrm{QP}} \geqq \overline{\mathrm{PA''}}\end{aligned}$$

等号は Q が線分 PA″ と BC の交点に来たとき成り立つから，この場合の最短時間は

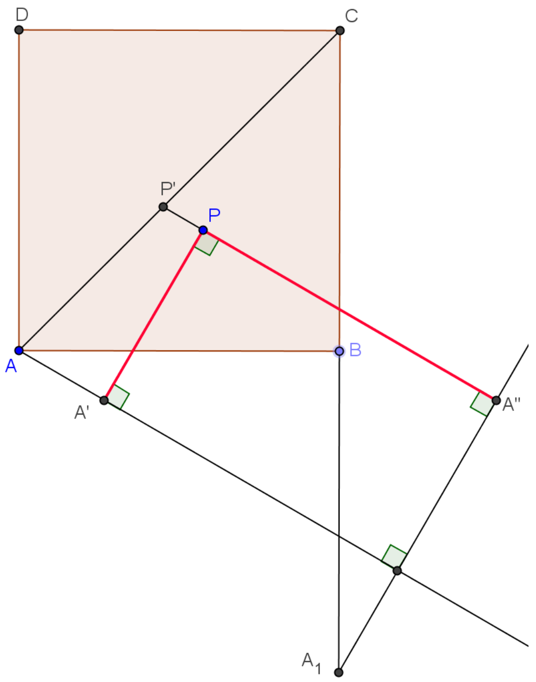
$$\overline{\mathrm{PA''}} \qquad \cdots ②$$

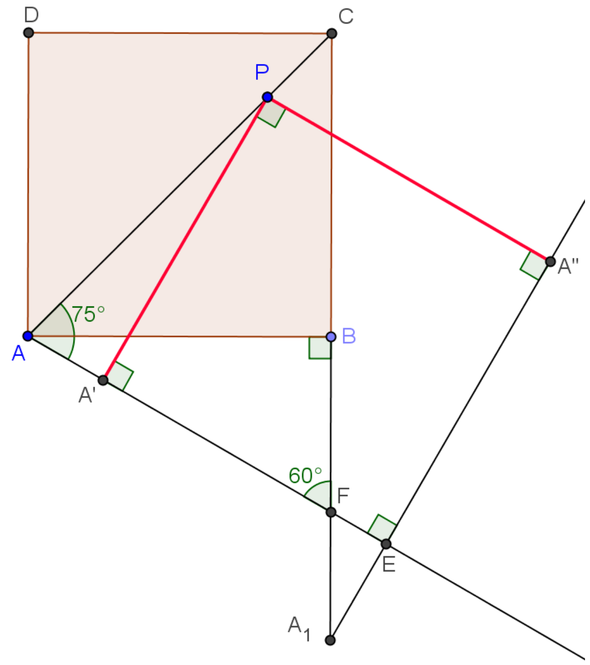


直線 AC に関する対称性 から「① と② の最小値」が,「A から P までの最短時間」となる．

(3) P が線分 AC 上にないとき，直線 A″P と AC の交点を P′ とすると,「P′ から l までの距離」と「P から l までの距離」は変わらず,「P′ から m までの距離」は「P から m までの距離」より長い．故に A から P や P′ に行くとき,「B を通らないなら」P と P′ は同じ時間が掛かり,「B を通るなら」P′ の方が長く掛かる．ゆえに **「P が対角線 AC 上にあるとき」の最短所要時間の最大値 M を求めれば良い．**[注1)]

以下 P は線分 AC 上にあるとする．P が A から C に向かって 動くと, $\overline{\mathrm{PA}'}$ は増加し $\overline{\mathrm{PA}''}$ は減少する．ゆえに **最短所要時間が最大となる点 P は $\overline{\mathrm{PA}'}=\overline{\mathrm{PA}''}$** をみたす点である．





このとき l と m の交点を E, l と直線 BC の交点を F とすると,

$$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FE}}=\frac{20}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\left(10-\frac{10}{\sqrt{3}}\right)=5(1+\sqrt{3})$$

ゆえに「$\overline{\mathrm{AP}'}=\overline{\mathrm{PA}''}=x$」とおくと,

$$(\tan 15^\circ)x+x=\overline{\mathrm{AE}}=5(1+\sqrt{3})$$

$$\therefore \quad x=\frac{5(1+\sqrt{3})}{1+\tan 15^\circ}=\frac{5(1+\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})}=\frac{5(3+2\sqrt{3})}{3}$$

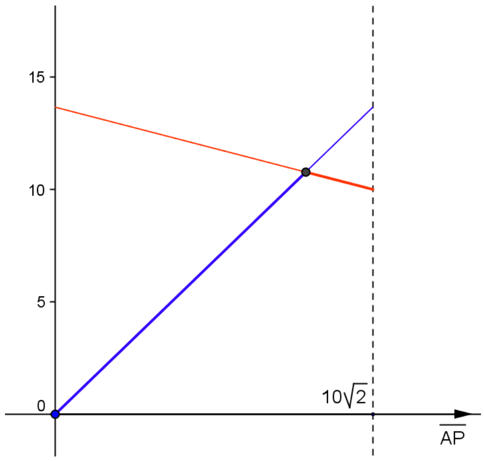
即ち 求める所要時間は

$$\frac{5(3+2\sqrt{3})}{3}\ \text{秒} \quad (\approx 10.7735\ \text{秒}) \qquad \cdots(\text{答})$$

注1) 「P が線分 AC 上にないとき」でも, M と同じ最短所要時間をとる点があるかもしれない．しかし「最短所要時間が M を超えることはない」というのが ここまでの議論．同様にして「最短所要時間が最大になる点は △ABC 内に 1 つしかなく，かつそれは線分 AC 上にある」ことも簡単に言えるが 省略する．

Comment

「$\overline{\mathrm{AP}} = x$」とおくと,「$y = \overline{\mathrm{PA'}} = (\sin 75°)x = f(x)$」と「$y = \overline{\mathrm{PA''}} = 5(1+\sqrt{3}) - (\cos 75°)x = g(x)$」のグラフは図のようになる．$y = f(x)$ は増加関数，$y = g(x)$ は減少関数なので,「$\min\{f(x), g(x)\}$ が最大」となるのは,「$f(x) = g(x)$」のときと分かる．



【参考】以下のリンクをクリックすると 図形を動かしてみることが出来ます．GeoGebra というフリーのソフトと, CabriⅡ の両方で作りました．Geogebra を動かすには JAVA の動作環境 (JRE) がインストールされている必要があります．(普通はインストール済みです.) Cabri を動かすには Plug in が必要です．

(リンクから戻る時はブラウザの「戻る」ボタンを使ってください.「閉じる」ボタンを押すと元のファイルも閉じてしまいます．)

Q が辺 AB 上を動く時	*Geogebra*	*Cabri*
Q が辺 BC 上を動く時	*Geogebra*	*Cabri*
Q が辺 AB と BC 上を動く時	*Geogebra*	*Cabri*