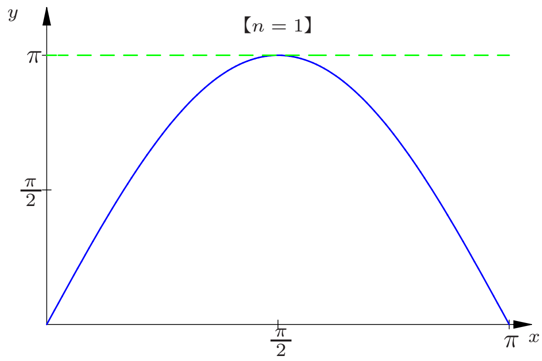
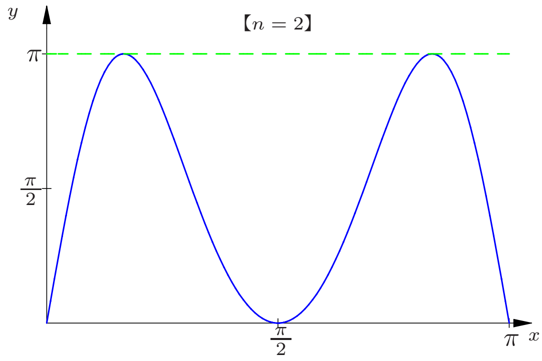
［問 I-1］ $f_1(x) = \pi \sin x$ とし，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して，$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ で関数の列 $f_2(x), f_3(x), f_4(x), \cdots$ を定める．このとき，区間 $0 < x < \pi$ において $f_n(x)$ が極値をとるような x の個数を n で表せ．





上のグラフの例から，次の命題を証明すればよいことが分かる．

命題 P(n) :「$f_n(0) = f_n(\pi) = 0$.　かつ ${f_n}'(x) = 0$ $(0 < x < \pi)$ をみたす x の値を $x = a_i$ $(a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$ とすると，$f_n(x)$ は a_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ で 極値 0 または π をとる」

【証明】（数学的帰納法による）

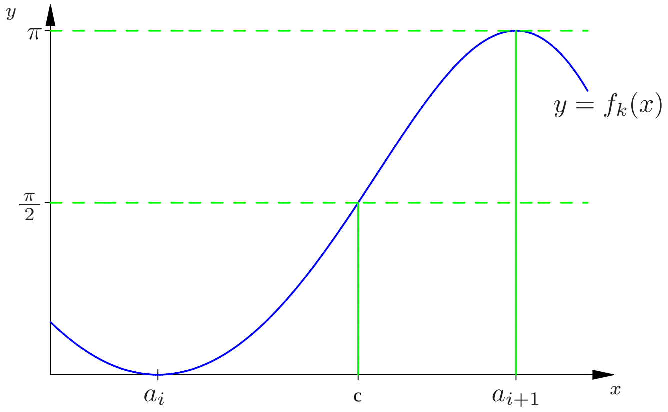
(i)$n = 1$ のとき，正しい．

(ii)$n = k$ のとき，正しいとすると，

$$\begin{cases} f_k(0) = f_k(\pi) = 0 & \cdots ① \\ f'(\alpha) = 0 \text{ ならば「} f(\alpha) = 0 \text{ または } f(\alpha) = \pi \text{」} & \cdots ② \end{cases}$$

① より，

$$f_{k+1}(0) = \pi \sin f_k(0) = \pi \sin 0 = 0, \quad f_{k+1}(\pi) = \pi \sin f_k(\pi) = \pi \sin \pi = 0$$



② より，ある i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ のとき,「$a_i < x < a_{i+1}$ で $f_k{}'(x) > 0$」とすると,

$$f_k{}'(a_i) = f_k{}'(a_{i+1}) = 0,\ f_k(a_i) = 0,\ f_k(a_{i+1}) = \pi \cdots ③$$

$f_{k+1}(x) = \pi \cdot f_1(f_k(x)) = \pi \sin(f_k(x))$ だから,

$$f'_{k+1}(x) = \pi \cos(f_k(x)) f_k{}'(x)$$

「$a_i < x < a_{i+1}$ では，$f_k{}'(x) > 0$」だから，$f_{k+1}{}'(x)$ の符号は, $\cos(f_k(x))$ の符号と一致する.

また，$f_k(x) = \frac{\pi}{2}$ となる x $(a_i < x < a_{i+1})$ は，ただ 1 つ存在する．これを $x = c$ とおくと,

$$f_{k+1}(c) = \pi \sin f_k(c) = \pi \sin \frac{\pi}{2} = \pi \text{ かつ } f_{k+1}{}'(c) = \pi \cos(f_k(c)) f_k{}'(c) = \pi \cos \frac{\pi}{2} \cdot f_k{}'(c) = 0$$

さらに，$i \geqq 2$ のときは,「$a_{i-1} < x < a_i$ で $f'(x) < 0$」となるので，同様にして，$a_i < x < a_{i+2}$ に於ける増減表は 次のようになる．（但し，$f_k(b) = f_k(c) = \frac{\pi}{2}$ とする）

x	a_{i-1}	$\cdots$	b	$\cdots$	a_i	$\cdots$	c	$\cdots$	a_{i+1}
$f_{k+1}{}'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0
$f_{k+1}(x)$	0	↗	π	↘	0	↗	π	↘	0

よって，確かに $x = a_i$ で「極値 0」をとる.（ $i = 1$ のときは，$a_{i-1} = 0$ ，$i = n$ のときは，$a_{i+1} = \pi$ とし，同様に考えると良い.） さらに,「$a_i < x < a_{i+1}$ で $f_k{}'(x) > 0$ 」のときも，同様にして「$x = a_i$ で極値 π をとる」ことが言えるから，$n = k+1$ のときも，命題 P は成り立つ.

(i),(ii) より，命題 P は全ての自然数に関し正しい ことが証明された．また，上の (ii) より,

$f_{k+1}(x)$ は，「$0 < x < a_1$」,「$x = a_1$」,「$a_1 < x < a_2$」,「$x = a_2$」, $\cdots$,「$x = a_k$」,「$a_k < x < \pi$」の各区間（または各点）で 一個ずつ極値を取るので,

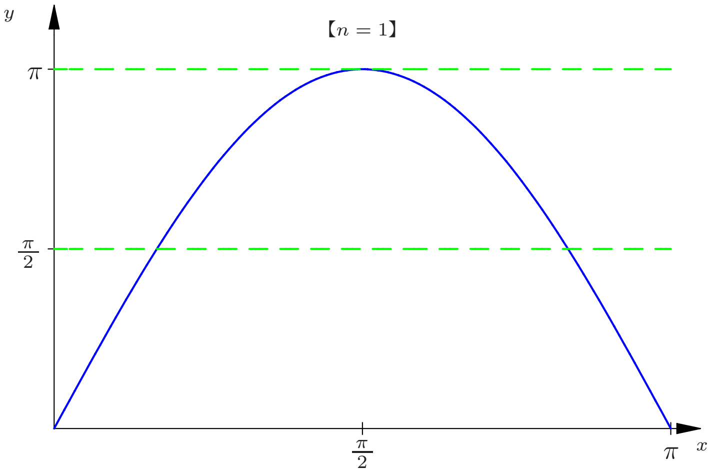
$$a_{k+1} = a_k + (a_k + 1) = 2a_k + 1\ (k = 1, 2, 3, \cdots) \cdots ④$$

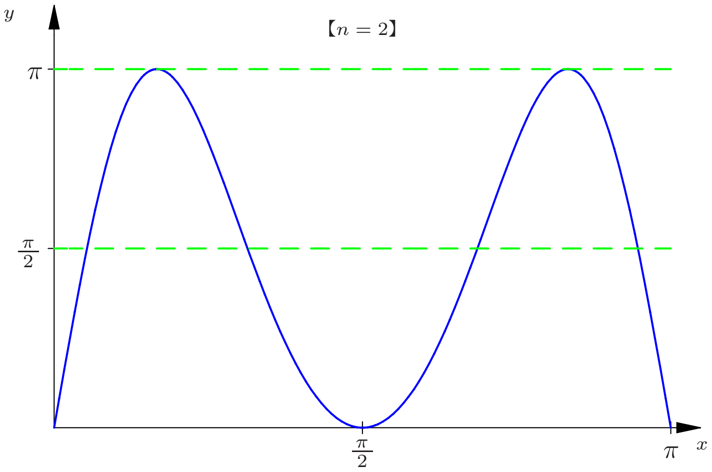
$a_1 = 1$ だから，④ より，$a_n = 2^n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

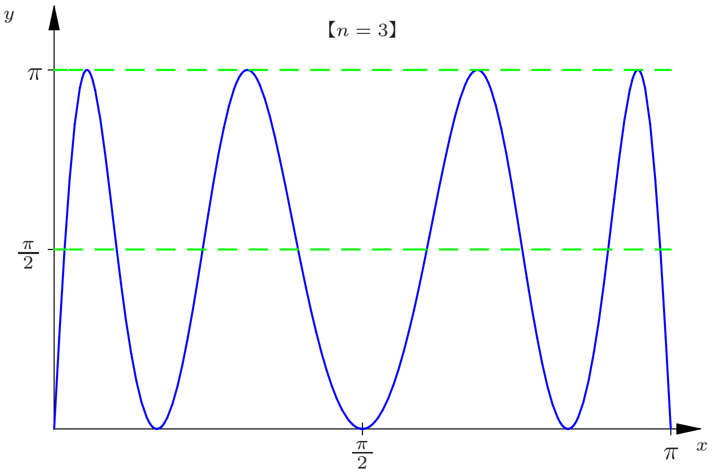
ゆえに求める個数は,

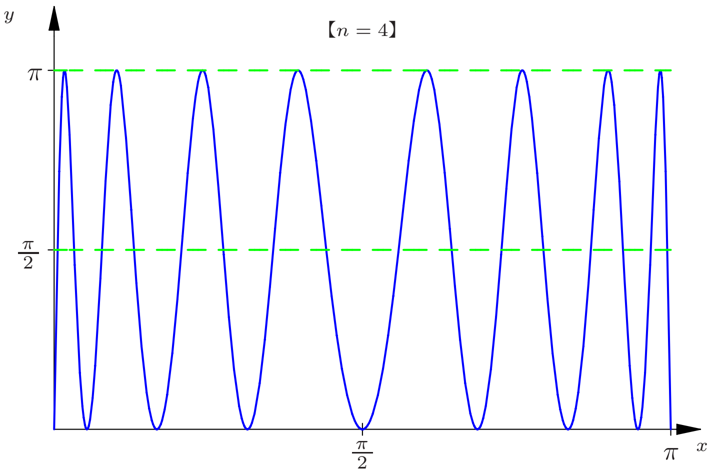
$$(2^n - 1) \text{ 個}$$

「参考１」様々な n に対する $y=f_n(x)$ のグラフです. (by MuPAD)







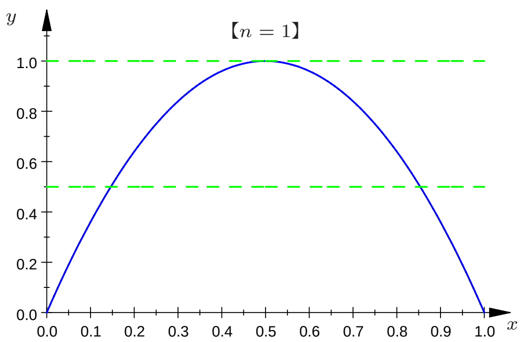


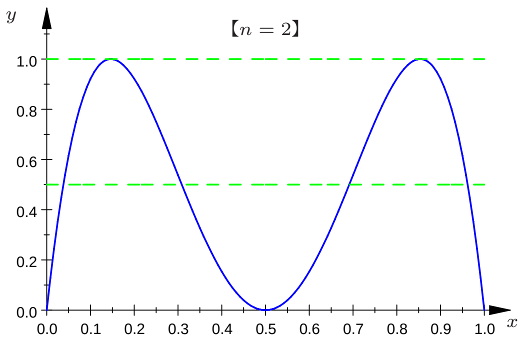
さらに，ビデオは ここ にあります．

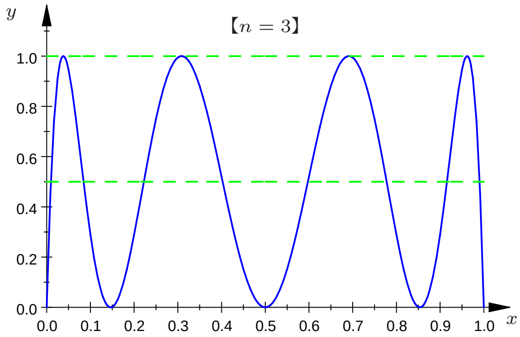
「参考 2-1」 $f_1(x)$ の特質は，定義域と値域が等しく，かつ「極値＝最大値」となっていることです．逆に言うと，命題 P の性質は 様々な関数に関しても成り立ちます．例えば，

$$f_1(x) = 4x(1-x), \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

に関しても成り立ちます．下のグラフを見てください．



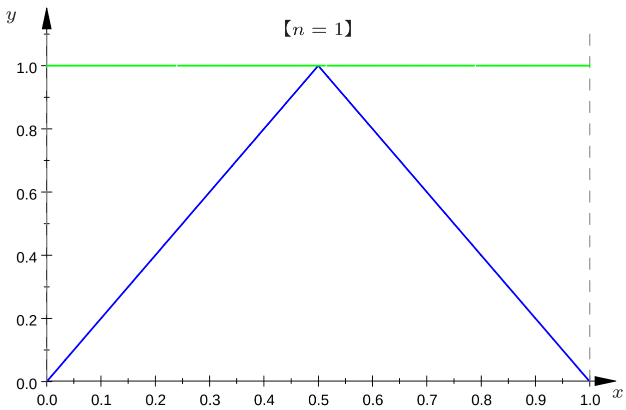


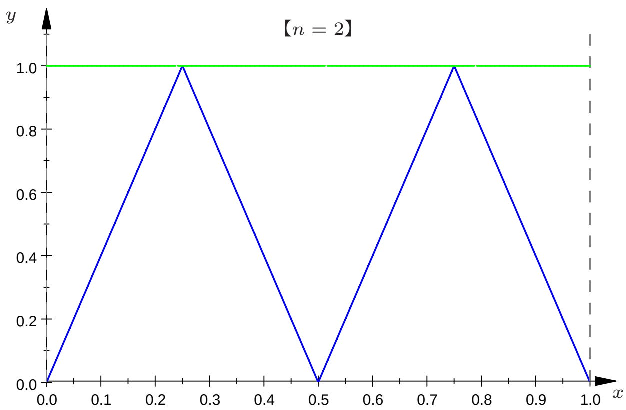


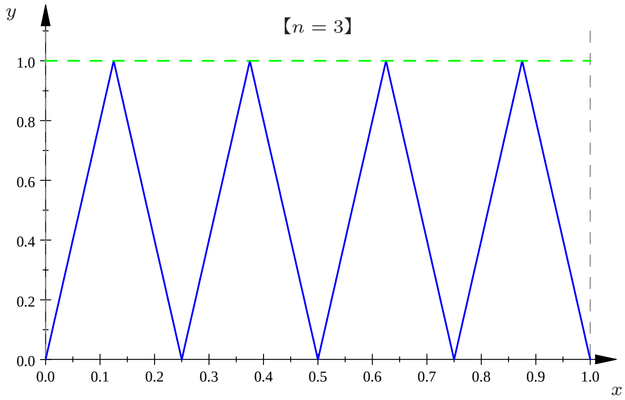
「参考 2-2」今度は,

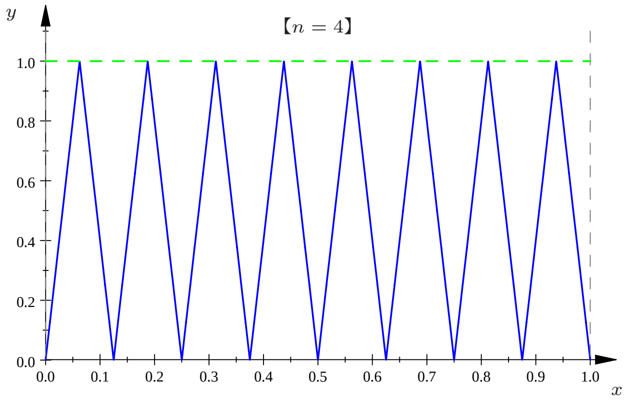
$$f_1(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ 2-2x & (\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

です.






【$n = 3$】
y
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0


【$n = 4$】
y
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0