［問 I-2］漸化式 $c_{n+1}=8c_n-7\ (n=1,2,3,\cdots)$ を満たす数列 $c_1,c_2,c_3\cdots$ を考える．数列 $c_1,c_2,c_3\cdots$ に素数がただ 1 つだけ現れるような正の整数 c_1 を 2 つ求めよ．

漸化式を解いて,

$$c_n=(c_1-1)\cdot 8^{n-1}+1 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots ①$$

よって,「$c_1=2$ 」のとき,

$$c_n=8^{n-1}+1=(2^{n-1})^3+1^3=(2^{n-1}+1)(4^{n-1}-2^{n-1}+1)$$

ここで $n\geqq 2$ のとき,

$$2^{n-1}+1\geqq 3, \quad 4^{n-1}-2^{n-1}+1\geqq 3$$

だから，$c_n\ (n=2,3,4,\cdots)$ は素数でない．かつ c_1 は素数なので,「$c_1=2$ 」は題意を満たす.

次に，漸化式を変形して,

$$c_{n+1}=8c_n-7=c_n+7(c_n-1) \qquad \cdots ②$$

よって，c_1 が 7 の倍数ならば,「$c_2=c_1+7(c_1-1)$ 」より，c_2 も 7 の倍数．以下同様にして，$c_3,c_4,\cdots$ も 7 の倍数となる.（厳密には数学的帰納法.）さらに「$c_n>7\ (n\geqq 2)$ 」だから,「$c_n\ (n=2,3,4,\cdots)$ 」は，素数でない．よって,「$c_1=7$ 」も題意を満たす.

以上より，題意を満たす c_1 の例を 2 つ挙げると,

「$c_1=2$」と「$c_1=7$」

Comment

[1]. この問題は二つの全く異なる性質を利用して,「$c_n\ (n=2,3,4,\cdots)$ が合成数であること」を証明するのがポイントとなります.

まずは,「$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 」を利用して,「$c_1=2$ 」が適切なことを導きました．ところが，同じ因数分解を使おうと思って「$c_1-1=8$ 」と選ぶと,「$c_1=9$」 も合成数となり適しません．よって，次の候補は，漸化式を直接使って導きました.

後者は「$8=7+1$ 」であることを利用し，直接示すこともできます．二項定理より,

$8^n=(7+1)^n=7^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 7^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 7^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_3\cdot 7^{n-3}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot 7+1=7M+1$ (M は整数)

よって① より,

$$c_n=(c_1-1)\cdot(7M+1)+1=7(c_1-1)M+c_1$$

ゆえに,「 c_n を 7 で割った余り」と,「 c_1 を 7 で割った余り」は等しい.（以上のことは，合同式を使うともっとスッキリ言える.）

[2]. 一般に a, n が自然数の時,「$(a+1)^n$ を a で割った余りは 1」ですから,「$c_n = (c_1 - 1) \cdot 8^{n-1} + 1$」が与えられたとき，7 で割った余りと，8 で割った余りは，すぐ求まります．この事を知っていれば，2 つ目の c_1 を見つけることはそんなに難しくないでしょう.

[3]. なお，9 で割った余りと，3 で割った余りも求まります．「$8 = 9 - 1$」ですから,

$$8^n = (9-1)^n = 9^n - {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 9^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 9 + (-1)^n = 9M + (-1)^n \ (M \text{ は整数})$$

よって① より,

$$c_n = (c_1 - 1) \cdot \{9M + (-1)^{n-1}\} + 1 = 9(c_1 - 1)M + (-1)^{n-1}(c_1 - 1) + 1$$

ゆえに c_n を 9 で割った余りは,

$$\begin{cases} c_1 & (n \text{ が奇数の時}) \\ 2 - c_1 & (n \text{ が偶数の時}) \end{cases}$$

すなわち，c_n を 9 で割った余りは,

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots\}, \qquad \{0, 2, 0, 2, 0, 2, \cdots\}, \qquad \{2, 0, 2, 0, 2, 0, \cdots\}$$

のいずれかになります．3 で割った余りも同様です.

[4]. 2 と 7 以外にも適当な c_1 があるかも知れません. MuPAD で調べたところ,「c_1 が素数で，c_n $(2 \leqq n \leqq 2000)$ が合成数」となるのは，$7 < c_1 \leqq 2000$ の範囲では，$c_1 = 257$, $c_1 = 431$, $c_1 = 1787$ の 3 つだけでした.
しかし，この 3 つにしても，$n > 2000$ では どうなるか分かりません.

［参考］ MuPAD を使って実際に，c_n $(n = 1, 2, 3, \cdots, 10)$ の値を求めてみました.（次のページを見てください.）

[準備]関数として，数列を定義しています．実は，MuPADでは，漸化式の定義もできます．

```
A:=(a,n)->(a-1)*8^(n-1)+1;
```

$(a,\ n) \to (a-1)\cdot 8^{n-1}+1$

[1]「初項が2」の場合です．上の行は，A1,A2,A3,・・・の値で，下の行はそれを素因数分解したものです．

```
A(2,k) $k=1..10;
ifactor(A(2,k)) $k=1..10;
```

2, 9, 65, 513, 4097, 32769, 262145, 2097153, 16777217, 134217729

$2,\ 3^2,\ 5\cdot 13,\ 3^3\cdot 19,\ 17\cdot 241,\ 3^2\cdot 11\cdot 331,\ 5\cdot 13\cdot 37\cdot 109,\ 3^2\cdot 43\cdot 5419,\ 97\cdot 257\cdot 673,\ 3^4\cdot 19\cdot 8721$

[2]「初項が3」の場合です．A1,A2 が素数なので不適です．

```
A(3,k) $k=1..10;
ifactor(A(3,k)) $k=1..10
```

3, 17, 129, 1025, 8193, 65537, 524289, 4194305, 33554433, 268435457

$3,\ 17,\ 3\cdot 43,\ 5^2\cdot 41,\ 3\cdot 2731,\ 65537,\ 3\cdot 174763,\ 5\cdot 397\cdot 2113,\ 3\cdot 11\cdot 251\cdot 4051,\ 17\cdot 15790321$

[3]「初項が5」の場合です．A1,A3 が素数なので不適です．

```
A(5,k) $k=1..10;
ifactor(A(5,k)) $k=1..10
```

5, 33, 257, 2049, 16385, 131073, 1048577, 8388609, 67108865, 536870913

$5,\ 3\cdot 11,\ 257,\ 3\cdot 683,\ 5\cdot 29\cdot 113,\ 3\cdot 43691,\ 17\cdot 61681,\ 3\cdot 2796203,\ 5\cdot 53\cdot 157\cdot 1613,\ 3\cdot 59\cdot 303$

[4]「初項が7」の場合です．

```
A(7,k) $k=1..10;
ifactor(A(7,k)) $k=1..10
```

7, 49, 385, 3073, 24577, 196609, 1572865, 12582913, 100663297, 805306369

$7,\ 7^2,\ 5\cdot 7\cdot 11,\ 7\cdot 439,\ 7\cdot 3511,\ 7\cdot 28087,\ 5\cdot 7\cdot 44939,\ 7\cdot 313\cdot 5743,\ 7^3\cdot 269\cdot 1091,\ 7\cdot 37\cdot 139\cdot 2$

[5]「初項が11」の場合です．A1,A3,A5,A9 が素数なので不適です．

```
A(11,k) $k=1..10;
ifactor(A(11,k)) $k=1..10
```

11, 81, 641, 5121, 40961, 327681, 2621441, 20971521, 167772161, 1342177281

$11,\ 3^4,\ 641,\ 3^2\cdot 569,\ 40961,\ 3^2\cdot 23\cdot 1583,\ 131\cdot 20011,\ 3^3\cdot 103\cdot 7541,\ 167772161,\ 3^2\cdot 149130809$

[参考] 以下は，適切なa1を見つけるためのプログラムです．このように，2000以下では，
Cn(1<n<2001)が合成数となるのは，2,7,257,431,1787　の5つしかありません．
(私のコンピュータでは，この計算に4分かかりました.)

```
for i from 2 to 2000 do
k:=1:
   if  isprime(A(i,k)) then
        while not isprime(A(i,k+1)) and k<2000 do
```

```
            k:=k+1;
        end_while;
        if k=2000 then print(i);
        end_if:
   end_if:
end_for:
```

```
2
7
257
431
1787
```