［問 II-1］自然数 n に対し，第 1 象限において 不等式

$$nx \geqq y \geqq x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$$

の表す領域の面積を $S(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)$ を求めよ．

$\frac{1}{n}S(n)$ は，第 1 象限において 不等式

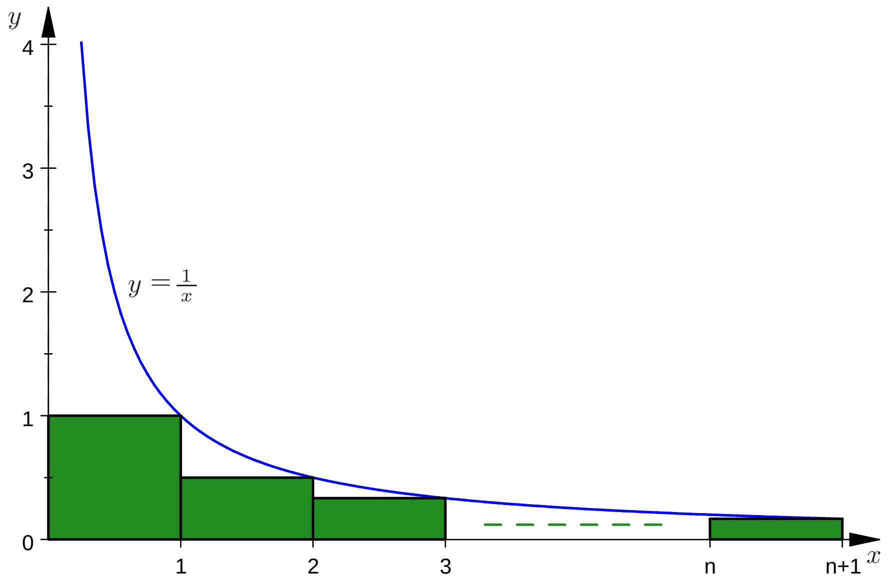
$$x \geqq y \geqq \frac{1}{n}\left(x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}\right)$$

の表す領域の面積と等しい．これを $T(n)$，さらに，上の不等式の右辺を，

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\left(x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}\right)$$

とおく．下図より，

$$f_n(1) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \leqq \frac{1}{n}\left(1 + \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\right) = \frac{1+\log(n+1)}{n}$$



ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ だから，十分大きい n に 対して，「$f_n(1) < 1$」.

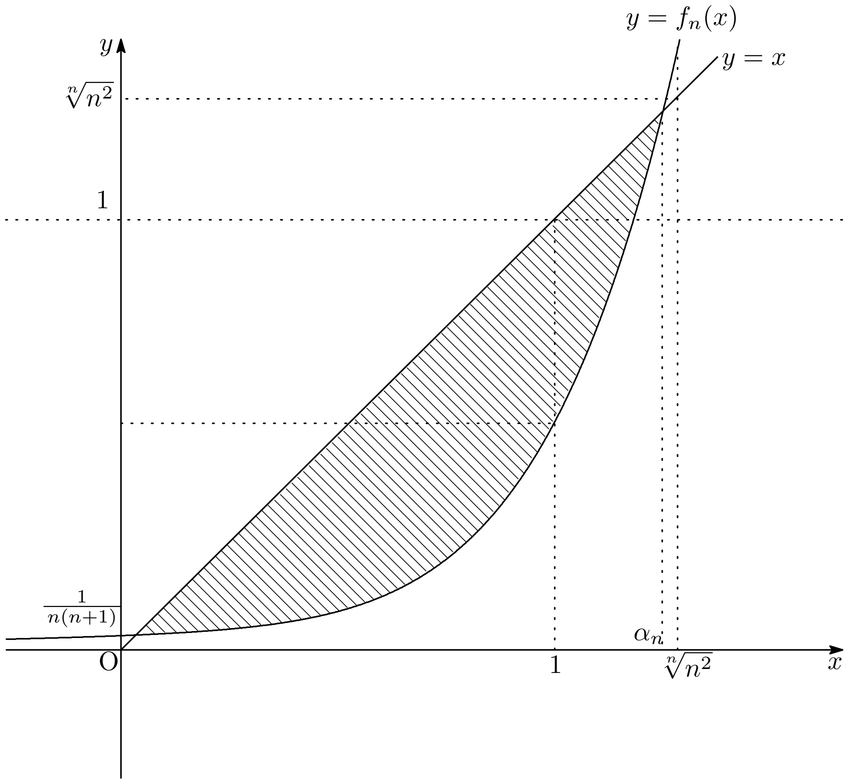
また「$x > 0$ において $f_n(x) > \frac{1}{n}x^n$ 」だから，十分大きい n に 対して，

$$f_n(\sqrt[n]{n^2}) > \frac{1}{n}(\sqrt[n]{n^2})^n = n > \sqrt[n]{n^2}$$

よって「$g_n(x) = f_n(x) - x$」とおくと，十分大きい n に 対して，

$$g_n(0) = f_n(0) > 0, \quad g_n(1) < 0, \quad g_n(\sqrt[n]{n^2}) > 0$$

さらに 「$g_n{}''(x) = f_n{}''(x) > 0$」より「 $y = g_n(x)$ のグラフは下に凸」となるから, $y = g_n(x)$ のグラフは,「$0 < x < 1$」と「$1 < x < \sqrt[n]{n^2}$」に於いて，x 軸と 1 回ずつ交わる．このうち大きい方の x 成分を α_n とおくと，$y = f_n(x)$ の概形は次のようになる．



ここで,「$\log \sqrt[n]{n^2} = \frac{2\log n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 」だから,「$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ 」. 故に,ハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$$

よって,$T(n)$ のうち,直線 $x = 1$ の右側の部分の面積は,「$n \to \infty$ 」のとき,0 に収束する.

さらに,

$$「0 \leqq x \leqq 1 \text{ において } f_n(x) \leqq f_n(1)」\text{であり, } \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$$

であるから,$y = f_n(x)$ と, x 軸,y 軸,$x = 1$ で囲まれる面積は,「$n \to \infty$ 」のとき,0 に収束する.
すなわち,$T(n)$ のうち,直線 $x = 1$ の左側の部分の面積は $\frac{1}{2}$ に収束する.

以上から,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S(n) = \frac{1}{2}$$

[参考] MuPAD で描いた $y = f_n(x)$ のビデオは ここ にあります.シングルクリックして下さい.

Comment

この問題では,グラフの概形をつかむことがポイントとなる.それには,

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n + 1. \qquad \text{と} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

という関係から 「$f_n(1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$」に気づくことが(私には)ポイントでした.