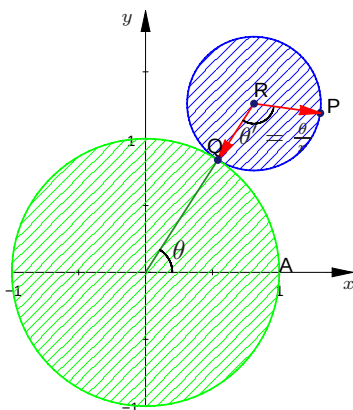


[問 II-2] 半径 R の定円 C がある．半径 r の円板 D が，円 C に外接しながら一定の速さですべることなく転がっている．円板 D の周上の一点を P とするとき， P の速度ベクトルが $\vec{0}$ となる場所が有限個であるための必要十分条件を求めよ．

原点を中心とする $\frac{1}{R}$ 倍の相似変換によって P が P' に移るとする．

$$\text{「}P \text{ の速度ベクトルが } \vec{0}\text{」} \iff \text{「}P' \text{ の速度ベクトルが } \vec{0}\text{」}$$

であり，かつこの変換によって，円 C は半径 1 の円に，円板 D は，半径 $\frac{r}{R}$ の円板に移るから，最初から，円 C の半径を 1，円板 D の半径を r として考えてよい．(最後に r に関する条件を $\frac{r}{R}$ の条件に変えればよい．) また円板 D の中心を R ， D と C の接点を Q ， Q の回転角を $\theta(t)$ (t は時間) とする．ここで「 $\theta = t$ 」としても，一般性を失わない．(すなわち「 P は初めに A にあり，かつ D の滑る速さを 1」とする．)



弧 AQ の長さと同弧 PQ の長さが等しいから，「 $\angle QRP = \theta'$ 」とすると，

$$1 \cdot \theta = r \cdot \theta' \iff \theta' = \frac{\theta}{r}$$

$\vec{RQ}$ の x 軸正方向からの回転角は「 $\pi + \theta$ 」だから， $\vec{RP}$ の x 軸正方向からの回転角は，

$$(\pi + \theta) + \theta' = \pi + \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta$$

したがって，

$$\vec{OP} = \vec{OR} + \vec{RP} = (1+r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \left(\pi + \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta\right) \\ \sin \left(\pi + \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta\right) \end{pmatrix} = (1+r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \cos \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta \\ \sin \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta \end{pmatrix}$$

ゆえに， P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると，

$$\vec{v} = (1+r) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} - r \left(1 + \frac{1}{r}\right) \begin{pmatrix} -\sin \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta \\ \cos \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta \end{pmatrix} = (1+r) \begin{pmatrix} -\sin \theta + \sin \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta \\ \cos \theta - \cos \left(1 + \frac{1}{r}\right) \theta \end{pmatrix}$$

これを，和積の公式を使って変形すると，

$$\vec{v} = (1+r) \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{\theta}{2r} \cdot \cos \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \theta \\ 2 \sin \frac{\theta}{2r} \cdot \sin \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \theta \end{pmatrix} = 2(1+r) \cdot \sin \frac{\theta}{2r} \begin{pmatrix} \cos \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \theta \\ \sin \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \theta \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

ゆえに、「 $\vec{v} = \vec{0}$ 」となる**必要十分条件**は、

$$\sin \frac{\theta}{2r} = 0 \iff \frac{\theta}{2r} = m\pi \iff \theta = 2mr\pi \quad (\text{但し } m \text{ は整数}) \quad \dots \textcircled{2}$$

ところが、整数 m は無数にあるので、 $\textcircled{2}$ に対応する P が有限個のとき、ある整数 i, j ($i \neq j$) に対し、

$$2ir\pi - 2jr\pi = 2k\pi \iff (i - j)r = k \iff r = \frac{k}{i - j} \quad (k \text{ は整数})$$

が成り立つことが必要。すなわち、 **r が有理数となることが必要。**

逆に、 r が有理数の時、 $r = \frac{k}{i}$ (i, k は互いに素な整数) とおけて、

$$\vec{v} = \vec{0} \iff \theta = 2m \cdot \frac{k}{i} \pi \quad (\text{但し, } m \text{ は整数})$$

ところが

$$2(m + i) \cdot \frac{k}{i} \pi - 2m \cdot \frac{k}{i} \pi = 2\pi k$$

であるから、 m が $(m + i)$ に変わっても、それに対する P の位置は変わらない。すなわち、異なる P の個数は、高々 $m = 0, 1, 2, \dots, (i - 1)$ に対応する i 個。

ゆえに、「 $\vec{v} = \vec{0}$ 」となる P の個数が有限個になるための必要十分条件は、

$$\frac{r}{R} \text{ が有理数となること。}$$

【参考】 以下に、[MuPAD](#) で描いた、いろいろな r に対する点 P の軌跡のビデオを示す。クリックしてください。「 $\vec{v}^{\text{注1)}} = \vec{0}$ 」が成り立つのは、「 P が円 C 上に来る時」と分かる。これが「 $\theta = 2\pi r \cdot m \dots \textcircled{2}$ 」の図形的意味となる。(直感的に明らかであるが、証明なしに使うてよいかは疑問.)

- (1) $R = 1, r = \frac{1}{2}$ のときは、[ここ](#) をクリック。
- (2) $R = 1, r = \frac{2}{3}$ のときは、[ここ](#) をクリック。
- (3) $R = 1, r = 2$ のときは、[ここ](#) をクリック。
- (4) $R = 1, r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは、[ここ](#) をクリック。

注1) 速度ベクトル $\vec{v}$ は 赤色の矢印で表してあるが、最大速度の時に $|\vec{v}| = 1$ となるようにしてある。