$\boxed{\text{I-2}}$ **$f(x)$ が 奇関数となり　L, M が x 軸と平行な直線となるものを見つけるとよい．**

$f(x)$ が $x = \pm p, \pm q$ (ただし $0 < p < q$) で極値を取るとすると，

$$f'(x) = (x-p)(x+p)(x-q)(x+q) = x^4 - (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2$$

とおける．$f(x)$ は奇関数と仮定したので

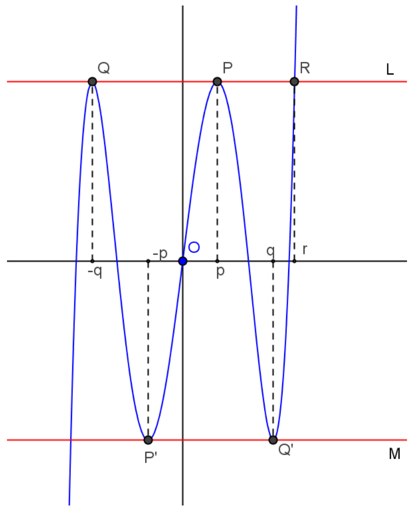
$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{p^2+q^2}{3}x^3 + p^2q^2x \qquad \cdots ①$$

$f(x)$ を $f'(x)$ で割って

$$f(x) = \frac{x}{5}f'(x) - \frac{2}{15}(p^2+q^2)x^3 + \frac{4}{5}p^2q^2x \qquad \cdots ①'$$

L, M は x 軸に平行な直線と仮定したから，

$$f(-q) = f(p) \qquad \cdots ②$$



「$f'(-q) = f'(p) = 0$」だから，①$'$, ② より

$$\begin{aligned}
-(p^2+q^2)(-q)^3 + 6p^2q^2(-q) &= -(p^2+q^2)p^3 + 6p^2q^2 \cdot p \\
\longleftrightarrow (p^2+q^2)(p^3+q^3) - 6p^2q^2(p+q) &= 0 \\
\longleftrightarrow (p^2+q^2)(p^2-pq+q^2) - 6p^2q^2 &= 0
\end{aligned}$$

例を 1 つ見つければよいので，例えば「$p^2+q^2 = 12 \cdots ③$」とおくと，上の式より

$$12(12-pq) - 6(pq)^2 = 0 \longleftrightarrow (pq)^2 + 2(pq) - 24 = 0 \longleftrightarrow (pq+6)(pq-4) = 0 \longleftrightarrow pq = 4 \qquad \cdots ④$$

③,④ より，$\{p^2, q^2\}$ を 2 解とする 2 次方程式の 1 つは「$X^2 - 12X + 16 = 0$」となるから，

$$(p^2, q^2) = (6-2\sqrt{5}, 6+2\sqrt{5}) \longleftrightarrow (p, q) = (\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1)$$

以上より C の例は

$$C:\ y = f(x) = \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 16x \qquad \cdots (答)$$

①$'$ より「$f(p) = \frac{64}{5}$」となるので，L と M の式は，

$$y = \pm\frac{64}{5} \qquad \cdots (答)$$

さらに「C と L の接点を $\mathrm{P}(p, f(p)), \mathrm{Q}(-q, f(-q))$, 交点を $\mathrm{R}(r, f(r))$」とすると，$p, (-q), r$ は「$f(x) = f(p)$」の解なので，解と係数の関係より

$$(-q) + (-q) + p + p + r = 0 \longleftrightarrow r = -2p + 2q = -2(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{5}+1) = 4$$

ゆえに，求める線分の長さの比は，

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}} = \frac{(\sqrt{5}-1) - (-\sqrt{5}-1)}{4 - (\sqrt{5}-1)} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \cdots (答)$$

【部分的別解】

$p^2+q^2=12$ と置く代わりに，同次式の性質を使っても出来ます.

$$(p^2+q^2)(p^2-pq+q^2)-6p^2q^2=0$$

これは **同次式**なので，両辺を p^4 で割って $t=\frac{q}{p}$ とおくと

$$(1+t^2)(1-t+t^2)-6t^2=0 \longleftrightarrow t^4-t^3-4t^2-t+1=0 \longleftrightarrow (t+1)^2(t^2-3t+1)=0$$

$t>1$ だから

$$t=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

「$f(x)=f(p)\cdots(*)$」の残りの解を r とおくと, 解と係数の関係より

$$(-q)+(-q)+p+p+r=((*)\text{ の }x^4\text{の係数})=0. \qquad \therefore r=-2p+2q$$

ゆえに $\mathrm{Q}(-q,f(-q)),\mathrm{P}(p,f(p)),\mathrm{R}(r,f(r)$ とおくと,

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{|p+q|}{|r-p|}=\frac{p+q}{|2q-3p|}=\frac{1+t}{|2t-3|}=\frac{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

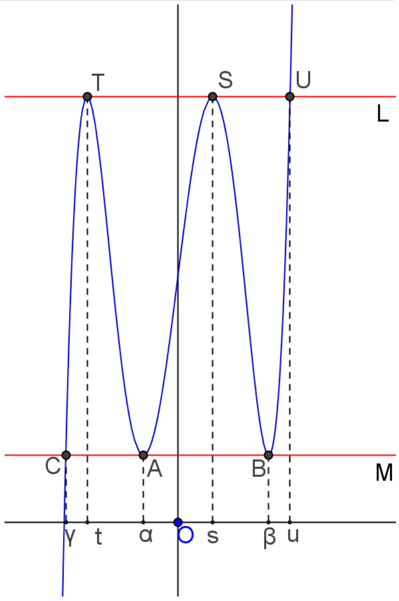
$\overline{\underline{\boldsymbol{Comment}}}$

「x,y 軸に対する拡大 · 縮小」をしても長さの比や，L と M の平行性などは変わらないので,

$$y=5f(x)=5=x^5-20x^3+80x, \qquad y=\frac{1}{\sqrt{5}}f(\sqrt{5}x)=5x^3-20x^3+16x$$

なども適します．さらに「奇関数の縛り」をはずすと，C,L,M の例は無数にありますが, 長さの比「$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}$」は 1 つに決まります. (証明は次頁) また $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は **黄金比**と呼ばれます.

x の 5 次式 $f(x)$ のグラフ $C: y=f(x)$ が平行な 2 直線 L, M のそれぞれと 2 点で接しているとき, C と L の交点と 2 つの接点との 3 点により L から切り取られる 2 つの線分の長さの比は一定となる.



【証明】

(1)L, M が x 軸に平行なとき

L, M の式をそれぞれ $y=n, y=n'$ とする. C と L との接点と交点の x 座標を α, β, γ, C と M との接点と交点の x 座標を s, t, u とおく. C を適当に y 軸方向に拡大し, x 軸に平行に移動しても「接する」と「平行」の性質は保存されるので「x^5 の係数が 1」かつ「$2\alpha+2\beta+\gamma=0$」(「$f(x)$ の x^4 の係数を 0」にするように平行移動) として一般性を失わない. このとき,

$$\begin{cases} f(x) &= (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)+l \\ f(x) &= (x-s)^2(x-t)^2(x-u)+m \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases} f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\{2(x-\alpha)(x-\gamma)+2(x-\beta)(x-\gamma)\}+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \\ f'(x) = (x-s)(x-t)\{2(x-s)(x-u)+2(x-t)(x-u)\}+(x-s)^2(x-t)^2 \end{cases} \qquad \cdots(ア)$$

$f(x)$ は $x=\alpha, \beta, s, t$ で極値を取るので

$$f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-s)(x-t) \qquad \cdots(イ)$$

(ア),(イ) より

$$\begin{cases} 2(x-\alpha)(x-\gamma)+2(x-\beta)(x-\gamma) = (x-s)(x-t) \\ 2(x-s)(x-t)+2(x-s)(x-t) = (x-\alpha)(x-\beta) \end{cases}$$

展開して係数を比べて

$$\begin{cases} 3(\alpha+\beta)+4\gamma = 5(s+t) & \cdots① \\ 2(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta = 5st & \cdots② \\ 3(s+t)+4u = 5(\alpha+\beta) & \cdots③ \\ 2(s+t)u+st = 5\alpha\beta & \cdots④ \end{cases}$$

また 最初の仮定より

$$2\alpha+2\beta+\gamma=0 \qquad \cdots⑤$$

①,⑤ より

$$\gamma = 2(s+t)$$

これを再び ⑤ へ代入して

$$s+t = -(\alpha+\beta) \qquad \cdots⑥$$

③,⑥ より

$$u=2(\alpha+\beta) \qquad \cdots ⑦$$

以上から「$u=-\gamma,\ s+t=-(\alpha+\beta)$」．これを②,④ へ代入すると

$$\alpha\beta=st$$

ゆえに 「$s+t=-(\alpha+\beta)\cdots$⑥」と合わせると

$$\{\alpha,\beta\}=\{-s,-t\} \qquad \cdots ⑧$$

これと⑤ を，② へ代入すると

$$\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2=0 \qquad \cdots ⑨$$

⑤,⑨ より

$$\beta=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\alpha, \qquad \gamma=(1\mp\sqrt{5})\alpha$$

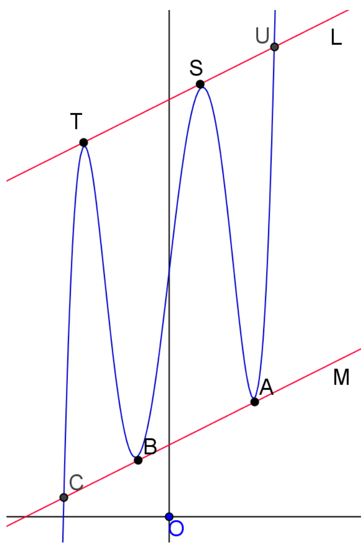
ゆえに

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{|\beta-\alpha|}{|\alpha-\gamma|}=\frac{\left|\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\right||\alpha|}{|\mp\sqrt{5}||\alpha|}=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$$

このように線分の比は一定です．さらに⑧ より

$$f'(x)=(x+s)(x+t)(x-s)(x-t)=(x^2-s^2)(x^2-t^2)$$

$f'(x)$ は偶関数なので，$f(x)$ は奇関数を y 軸方向に平行移動した関数となる．



(2)L,M が x 軸に平行でないとき

l,M の式を「$y=mx+n, y=mx+n'$」とおき，C と L との接点と交点の x 座標を α,β,γ, M との接点と交点の x 座標を s,t,u とおくと，

$$\begin{cases} f(x)-mx &= (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)+n \\ f(x)-mx &= (x-s)^2(x-t)^2(x-u)+n' \end{cases}$$

「$g(x)=f(x)-mx$」とおくと，$y=g(x)$ が x 軸に平行な 2 直線「$y=n, y=n'$」と接する ことを表すので，(1) に帰着する．