$\boxed{\text{I-2}}$ 三角形の成立条件より,

$$\begin{cases} |a-b| < c < a+b \\ |b-c| < a < b+c \\ |c-a| < b < c+a \end{cases} \qquad \cdots ①$$

よって

$$\begin{cases} (a-b)^2 < c^2 \\ (b-c)^2 < a^2 \\ (c-a)^2 < b^2 \end{cases}$$

両辺を加え 移項し整理すると

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca < 0 \qquad \cdots ②$$

もちろん a, b, c は実数だから

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0 \qquad \cdots ③$$

②,③ より

$$1 \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} < 2 \quad (\text{必要条件}) \qquad \cdots ④$$

「1 以上 2 未満の全ての実数を取りえる」ことを言うため, $a=b$ の 2 等辺三角形を考える. $\frac{c}{a}=t$ とおくと, ① より $0<t<2$.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{2a^2+c^2}{a^2+2ac} = \frac{2+t^2}{1+2t}$$

右辺の関数を $f(t)$ とおくと,

$$f(1)=1, \quad \lim_{t\to 0} f(t) = 2$$

$f(t)$ は連続関数だから, $f(t)$ は 1 以上 2 未満の全ての実数を取りえる. 以上から 求める範囲は

$$1 \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} < 2 \qquad \cdots (\text{答})$$