$\boxed{\text{Ⅱ-1}}$

$$f(x^2+1)=f(x)^2+1 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ より

$$\big(f(-x)\big)^2+1=f((-x)^2+1)=f(x^2+1)=\big(f(x)\big)^2+1$$

ゆえに 「$f(-x)=-f(x)$ (奇関数)」または「$f(-x)=f(x)$ (偶関数)」となり

$$\begin{cases} f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_3x^3+a_1x & \cdots① \\ \qquad\qquad\text{または} & \\ f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2(n-1)}x^{2(n-1)}+\cdots+a_2x^2+a_0 & \cdots② \end{cases}$$

(i) $f(x)$ が奇関数のとき,　① と $(*)$ より

$$f(0)=0,\quad f(1)=\big(f(0)\big)^2+1=1,\quad f(2)=\big(f(1)\big)^2+1=2,\quad f(5)=\big(f(2)\big)^2+1=5,\quad \cdots$$

いま $I(x)=x$ とおくと,「$x_{n+1}=x_n^2+1,\ x_0=0\ (n=0,1,2\cdots)$」 で定義される数列 $\{x_n\}$ に対し,

$$I(x_n)=f(x_n) \qquad \cdots③$$

が言える.(厳密には数学的帰納法). $f(x)$ は整式で, 無数の異なる「$x_k\ (k=0,1,2\cdots)$」に対し等号が成立するので「$I(x)=f(x)$」は x の恒等式となる. すなわち, $f(x)$ が奇関数のとき

$$f(x)=x$$

(ii) $f(x)$ が偶関数のとき,　$y\geqq 1$ とすると, $(*)$ より

$$f(y)=\big(f(\sqrt{y-1})\big)^2+1 \qquad \cdots(**)$$

ところが $f(x)$ は偶関数だから

$$f\big(\sqrt{y-1}\big)=a_{2n}(y-1)^n+a_{2(n-1)}(y-1)^{(n-1)}+\cdots+a_2(y-1)+a_0$$

よって 「$f\big(\sqrt{y-1}\big)=g(y)$」とおくと 「$g(y)$ は y の整式」となる. かつ $(**)$ より

$$g(y^2+1)=g(y)^2+1 \qquad \cdots(***)$$

$g(y)$ は整式で, 無数の $y\ (y\geqq 1)$ に対し等号が成立するので $(***)$ は y の恒等式となる. 故に「**$g(x)$ は$f(x)$ と同じ関係式を満たし，かつ次数が$f(x)$ の $\frac{1}{2}$ の整式**」となる.

(iii) 逆に, $(*)$ をみたす整式 $f(x)$ に対し, $h(x)=f(x^2+1)$ とおくと,

$$h(x^2+1)=f((x^2+1)^2+1)=\big(f(x^2+1)\big)^2+1=h(x)^2+1$$

よって,「**$h(x)$ は$f(x)$ と同じ関係式を満たし，かつ次数が$f(x)$ の2 倍の整式**」となる.

$f(x)$ (n 次で $(*)$ をみたす整式)	$\xrightarrow{x\text{ に }(x^2+1)\text{ を代入}}$ $\xleftarrow[x\text{ に}\sqrt{x-1}\text{を代入}]{}$	$F(x)$ ($2n$ 次で $(*)$ をみたす整式)

(iv) $f(x)$ の次数 n を「$n=2^m\cdot k$ (m は 0 以上の整数, k は正の奇数)」とすると，$m\geqq 1$ なら (ii) を繰り返し「$g(x^2+1)=g(x)^2+1$, $g(x)$ は k 次の整式」が作れる．よって (i) より「$k=1$」．即ち「$n=2^m$」が必要． 逆に，$f(x)=x$ に対し (iii) の操作を繰り返すと, 2^m 次で $(*)$ をみたす整式が作れる．以上より, 求める n の条件は,

$$n=2^m \quad (m=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots(\text{答})$$

Comment

具体的に $f(x)$ を書くと

$$f(x)=x,\quad f(x)=x^2+1,\quad f(x)=(x^2+1)^2+1,\quad f(x)=\left((x^2+1)^2+1\right)^2+1\cdots \qquad \cdots④$$

いま $g(x)=x^2+1$ とおくと, 条件 $(*)$ は

$$f(g(x))=g(f(x)) \qquad \cdots(\#)$$

そして ④ は

$$f(x)=I(x)=x,\quad f(x)=g(x),\quad f(x)=g(g(x)),\quad f(x)=g(g(g(x)))\cdots \qquad \cdots⑤$$

と表わされます．⑤ が (#) をみたすのは明らかですが，逆は明らかではありません.「$g(x)=x^2+1$」の場合は逆が成り立ちますが，一般の整式においても成り立つかどうかは, 残念ながら 私は 知りません．(^_^;)