目で見る行列・1次変換

−計算ちょっとだけ−

生越(おごせ) 茂樹(しげき)

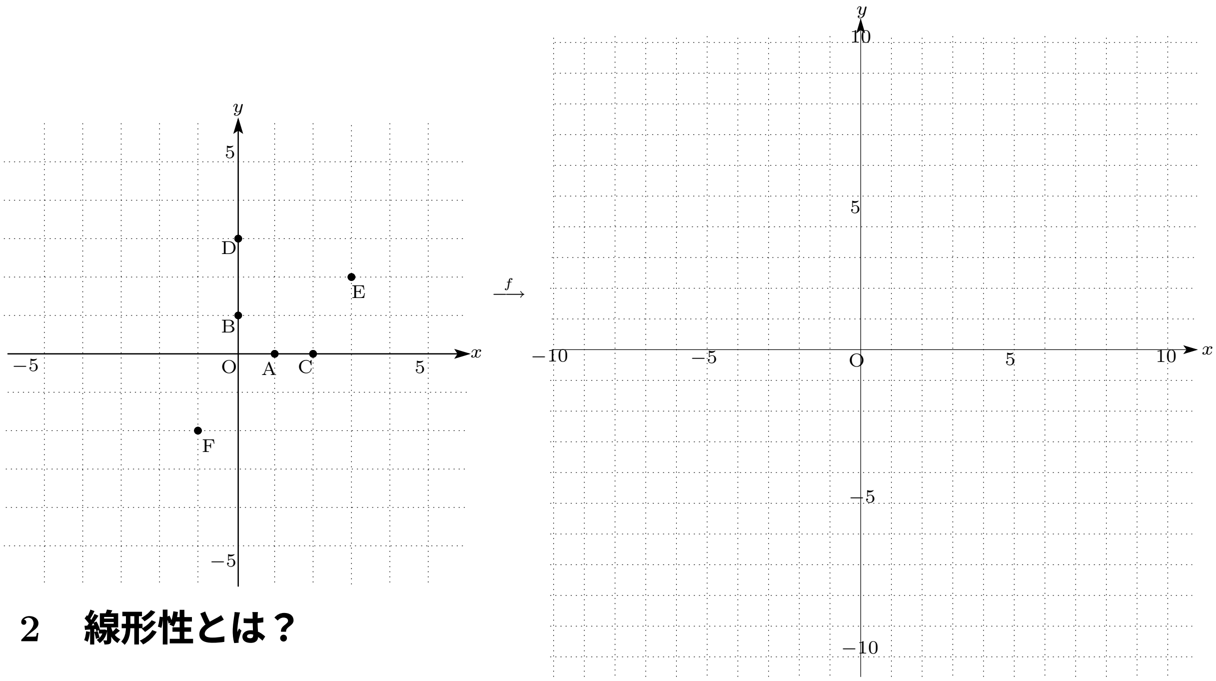
2005年7月20日

目 次

1 Introduction

問題 1-a

行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す１次変換 f による次の点の像を求め, 右の図に図示せよ.
$A(1,0), B(0,1), C(2,0), D(0,3), E(3,2), F(-1,-2)$



2 線形性とは？

上の問題で, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，その像は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OE}'} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left\{3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OE}'} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり，結局 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を，それぞれ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に変えた**だけ**になっている．これを，**線形性**(linearlity) という．

線形性 (特別な場合)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

であるから,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

すなわち，行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **による一次変換は，** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ **を** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ **に，** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ **を** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **に変えるだけ**といえる．これは，次のように一般化される．

線形性

一般に，A を任意の 1 次変換を表す行列, $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ を任意のベクトル, k を任意の実数とするとき

$$\begin{cases} A(k\overrightarrow{p}) = kA(\overrightarrow{p}) \\ A(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = A(\overrightarrow{p}) + A(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

まとめて

$$A(\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q}) = \alpha A\overrightarrow{p} + \beta A\overrightarrow{q} \quad (\alpha, \beta \text{は任意の実数})$$

すなわち

$$\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q} \xrightarrow{f} \alpha f(\overrightarrow{p}) + \beta f(\overrightarrow{q})$$

一般に f は，$\overrightarrow{p}$ を $f(\overrightarrow{p})$ に，$\overrightarrow{q}$ を $f(\overrightarrow{q})$ に変えるだけの変換といえる．注1)

問題 1-b introduction の問題で，上の性質 (線形性) が成り立っていることを確かめよ．

注1) 逆に f を xy 平面での写像とし, k は任意の実数，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ は一次独立なベクトルとするとき,

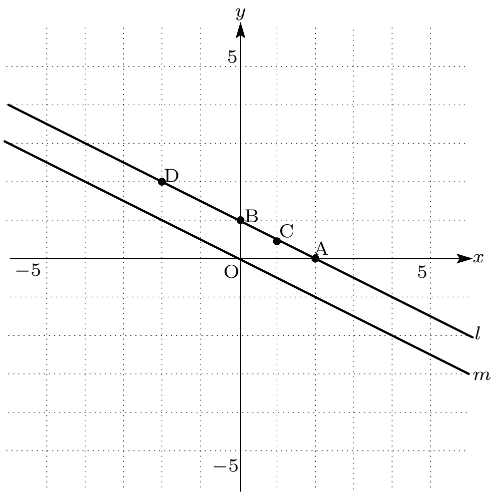
$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

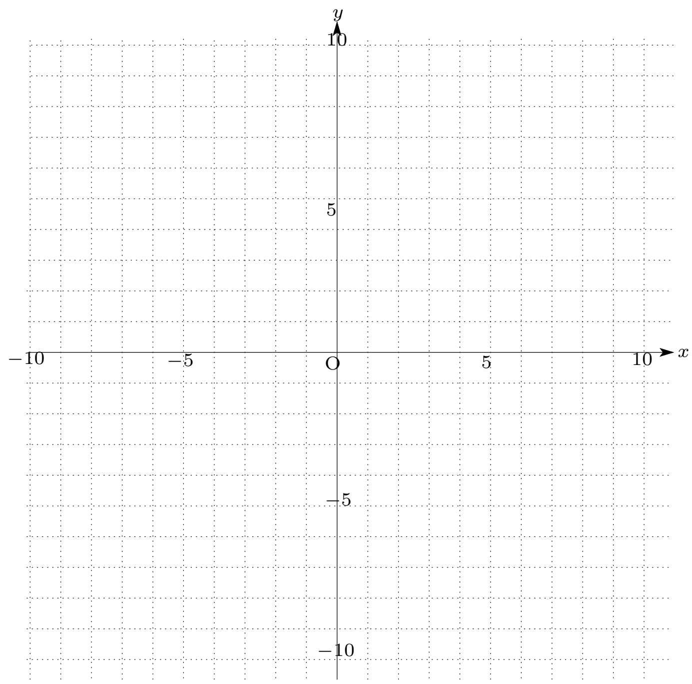
が成り立てば，f は，ある行列に対する 1 次変換であることも示せる．(**補充 1**)

2.1　線形性を見る ($ad-bc \neq 0$ の場合)

問題 2-a (直線の像)

行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．直線 $l : y = -\frac{1}{2}x + 1$, $m : y = -\frac{1}{2}x$ の f による像を，それぞれ右の方眼紙に書き込め．ただし，紙の上で計算してはいけない．





問題 2-b l 上の 2 点として A$(2,0)$,B$(0,1)$ をとり，さらに，線分 AB の中点を C, 線分 AB を 2 : 1 に外分する点を D とする．それぞれの像 A′,B′,C′,D′ を右上の方眼紙に書き込め．また，このとき，A′C′ : B′C′, A′D′ : B′D′ を求めよ．

上の問題によって次のことがわかる．

正則 ($ad-bc \neq 0$) な 1 次変換と図形

正則な 1 次変換によって
(1) 直線は直線に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．
(2) 平行な直線は平行な直線に移る．平行でない直線はやはり平行でない直線に移る．
(3) 線分 AB を $m:n$ に内分 (または外分) する点は，線分 A′B′ を $m:n$ に内分 (または外分) する点に移る．

これらは，すべて線形性:

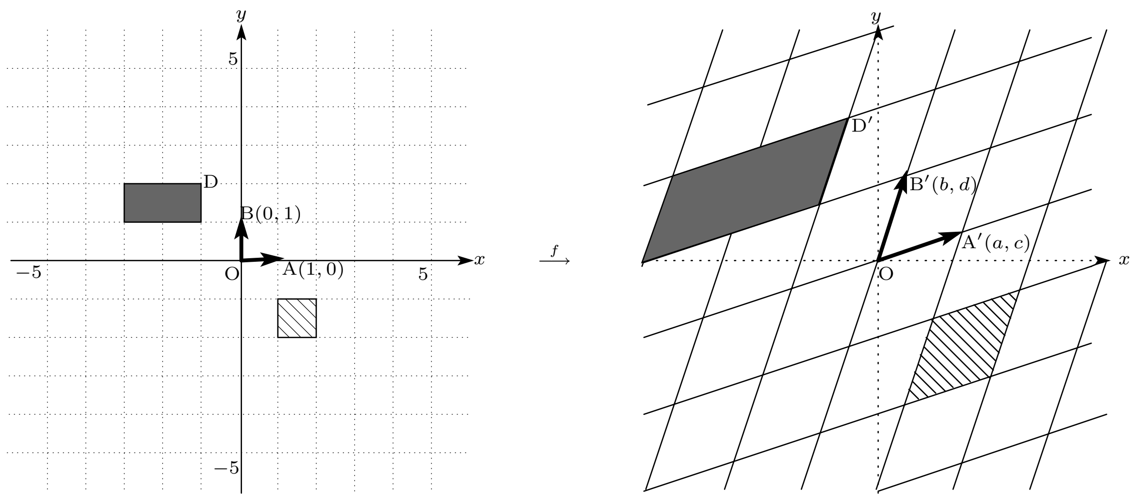
$$A(\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q}) = \alpha A\overrightarrow{p} + \beta A\overrightarrow{q}$$

から証明することができる．(**補充 2**) 特に $\overrightarrow{p} = (1,0)$, $\overrightarrow{q} = (0,1)$ とした時の線形性:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

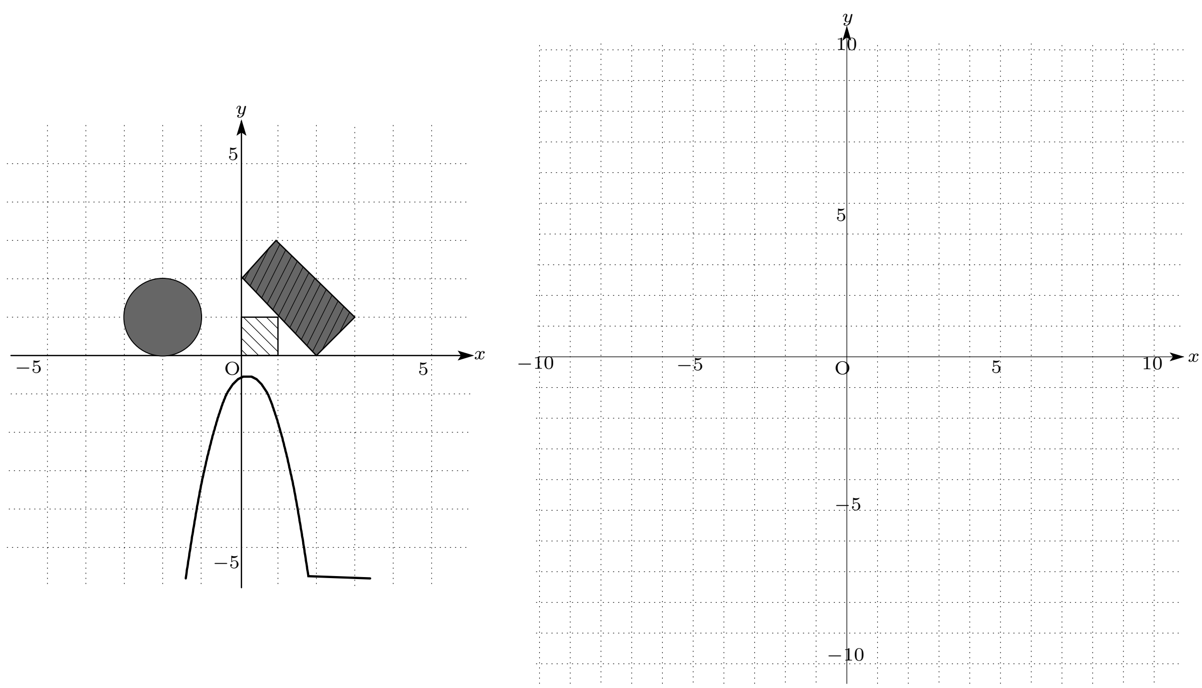
から，次ページの図が描かれる．

直感的にいうと，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc \fallingdotseq 0)$ による一次変換は，$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **で作られた網の目を，** $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **で作られる網の目に変えること**といえる．



問題 2-c (いろいろな図形の像)

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される１次変換を f とする．左図の三角形，平行四辺形，円の f による像を，それぞれ右の方眼紙に書き込め．ただし，紙の上で計算してはいけない．



問題 2-d $y=-(x-1)^2$ の f による像を右の方眼紙に書き込め．(大体でよい.)

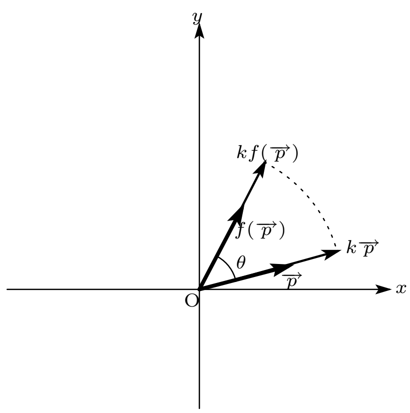
3 代表的な (正則)1 次変換 ($ad - bc \neq 0$ のとき)

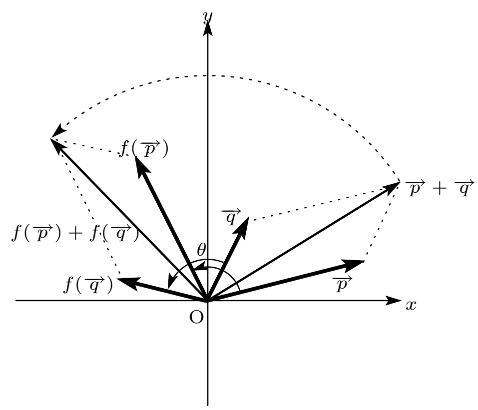
3.1 原点中心の拡大・縮小 (相似変換)

原点中心の k 倍の相似変換 ($x' = kx,\ y' = ky$) は，1 次変換であり，それを表す行列は

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

3.2 原点中心の回転





原点中心の回転を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対し，

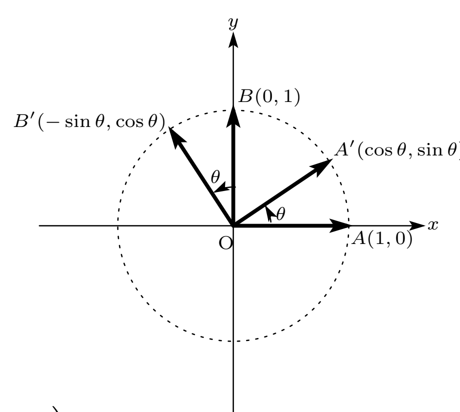
$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は 1 次変換である．

ゆえに, f を表す行列を R とすると, 左図より

$$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ+\theta) \\ \sin(90^\circ+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



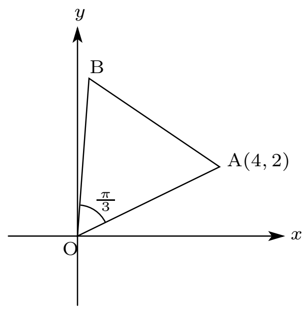
よって原点中心の θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ とすると

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(注) より直感的にいうと，$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ で作られる**網の目**を，$e_1' = (\cos\theta, \sin\theta), e_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)$ で作られる**網の目**に変換するので，f は 1 次変換である．

例

A(4,2),B, 原点 O は，図のように正三角形を作る．このとき，B の座標を求めよ．



【解答】

点 A を原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転した点が B だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

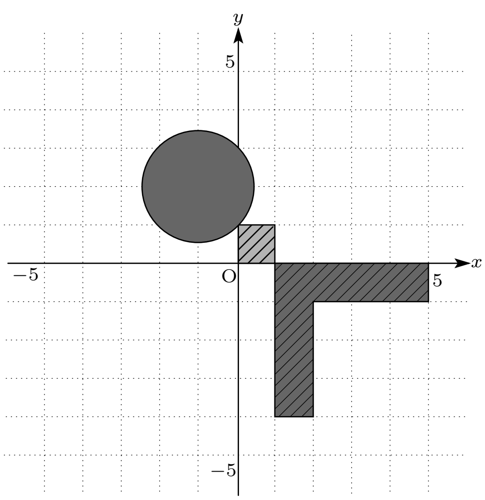
ゆえに

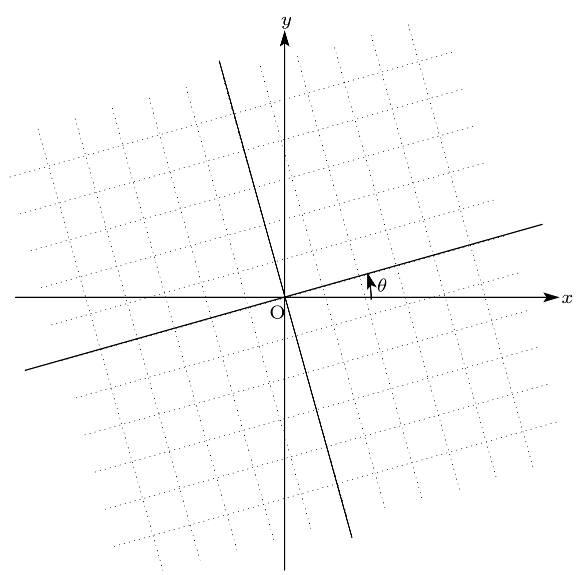
$$\mathrm{B}\left(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1\right)$$

問題 3-a (回転移動の像)

θ を右下図の角とし，行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．左の方眼紙に描かれている各図形の f による像を，それぞれ右の方眼紙に書き込め．ただし，紙の上で計算してはいけない．

さらに，f によって, $A(5,0)$ が $A'(4,3)$ に移ったという．このとき，f を表す行列を求めよ．





3.3 回転 ∘ 拡大

$a^2+b^2\neq 0$ のとき,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{ただし}, \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

よって, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は,「原点中心の回転」と「原点中心の相似変換」の合成を表す行列である.

例

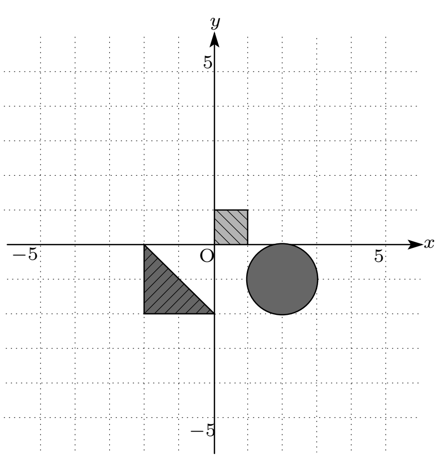
$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ とすると

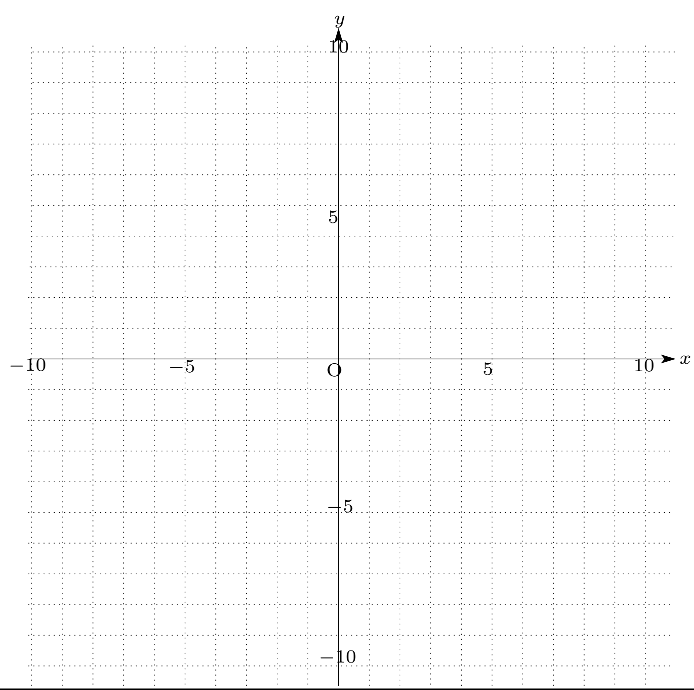
$$A = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

ゆえに, A は, 原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転し, 原点からの距離を 2 倍に拡大する 1 次変換を表す.

問題 3-b

f を $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換とする. 左の方眼紙に描かれている三角形, 平行四辺形, 円を, f によって移動した図形を, それぞれ右の方眼紙に書き込め. ただし, 紙の上で計算してはいけない.





$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列による 1 次変換は, 原点の周りの 回転と相似変換の合成なので, **すべての図形を相似な図形に写す. 特に, 円は円に移し, また, 2 直線の間の角も変えない.**

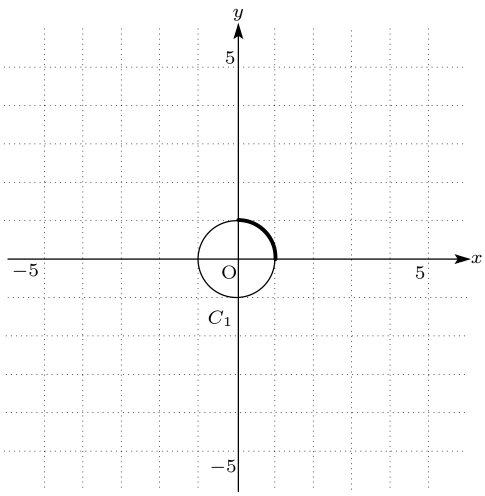
問題 3-c (円の像)

2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad C_2 : x^2 + y^2 = 25$

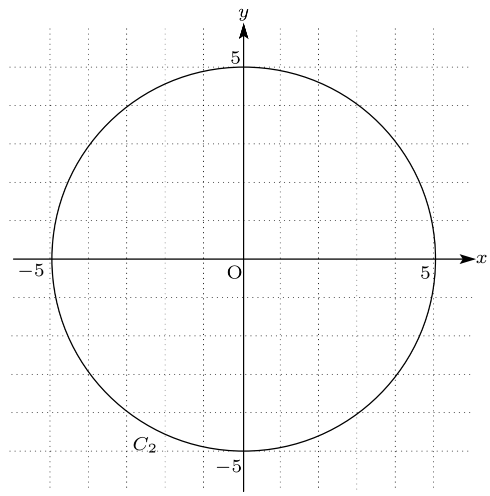
があり，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -3 & a \end{pmatrix}$ $(a > 0)$ の表す一次変換 f は, C_1 を C_2 に移すという.

(1) a の値を求めよ.

(2) C_1 の $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の部分にある弧の f による像を求めよ.



$\xrightarrow{f}$



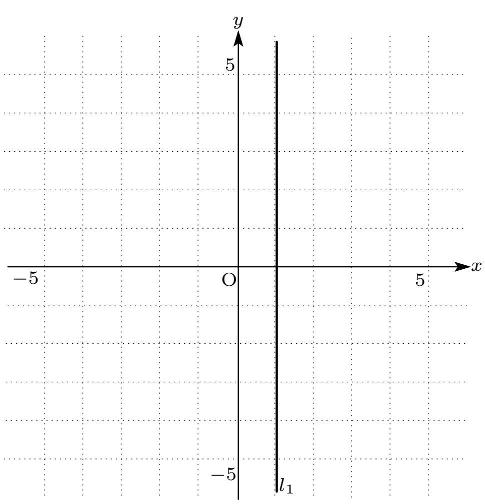
問題 3-d (直線の像, 繰り返し)

直線 $l_1 : x = 1$, 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする.

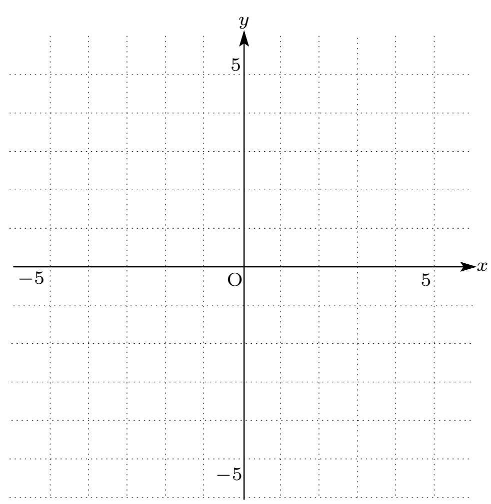
f による l_1 の像を l_2, l_2 の像を l_3 とする．また，l_1, l_2, l_3 によって囲まれる領域を D と名づける.

(1) D の境界はどのような種類の三角形になるか.

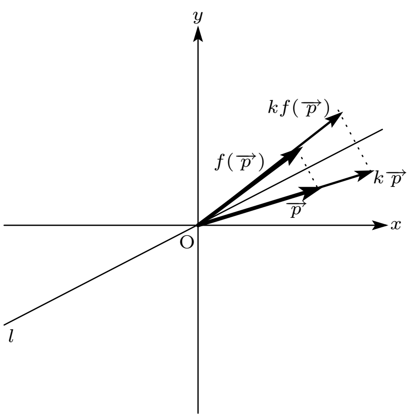
(2) D の 面積を求めよ.

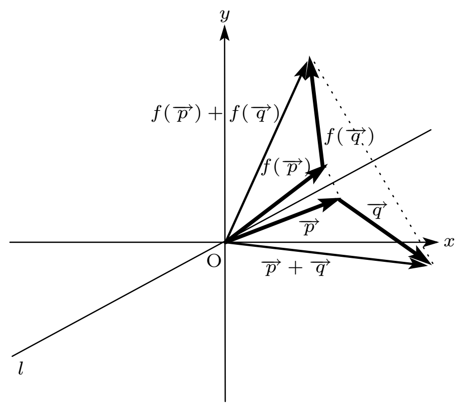


$\xrightarrow{f}$



3.4　【参考】原点を通る直線に関する対称移動

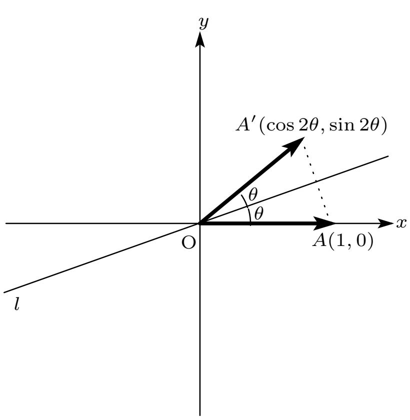


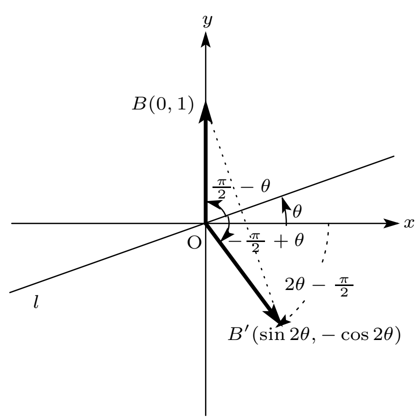


原点を通る直線 $l:\ y = \tan\theta$ に関する対称移動を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対し，

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は 1 次変換である．





ゆえに f を表す行列を S, A$(1,0)$, B$(0,1)$ とし点 A,B の像を考えると, 上図より $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}, \overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ と x 軸正方向とのなす角はそれぞれ，2θ, $2\theta - \frac{\pi}{2}$ となるので，[注2)]

$$S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin 2\theta\\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

よって，**原点を通る**直線に関する対称移動を表す行列は次のようになる．[注3)]

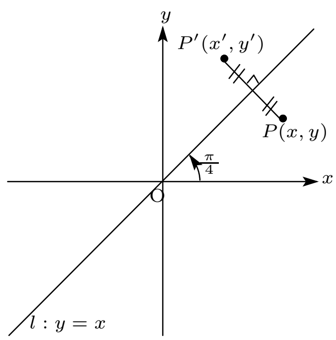
[注2)] $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と x 軸正方向とのなす角は $\frac{\pi}{2}$, ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ と x 軸正方向とのなす角を x とすると，l が $\angle\mathrm{BOB}'$ の 2 等分線になるので，$\frac{\pi}{2}$ と x の平均が θ になる．よって，$\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} = \theta \Longleftrightarrow x = 2\theta - \frac{\pi}{2}$. これからも $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ と x 軸正方向とのなす角は求まる．

[注3)] これ以外の導き方もあります．**補充 3** 参照

原点を通る直線に関する対称移動

$y=\tan\theta$ に関する対称移動を表す行列を $S(\theta)$ とすると

$$S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$



例 $l:y=x$ に関する対称移動
l と x 軸正方向とのなす角は $\frac{\pi}{4}$ だから，点 $P(x,y)$ を l に関して対称移動した点 $P(x',y')$ は

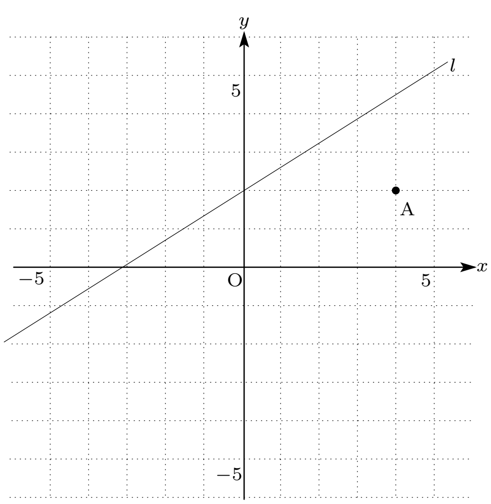
$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & -\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

すなわち

$$x'=y,\quad y'=x \qquad \cdots ☜有名$$

問題 3-e 次の直線に関する対称移動を表す行列を書け．
(1)$y=\sqrt{3}\,x$
(2)$y=\frac{1}{2}x$

問題 3-f (原点を通らない直線に関する対称移動)
$l:y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,x+2$, 点 A(4,2) とする．　点 A と点 B が l に関し対称なとき，点 B の座標を求めよ．



4　線形性を見る $(ad-bc=0$ の場合)

問題 4-a

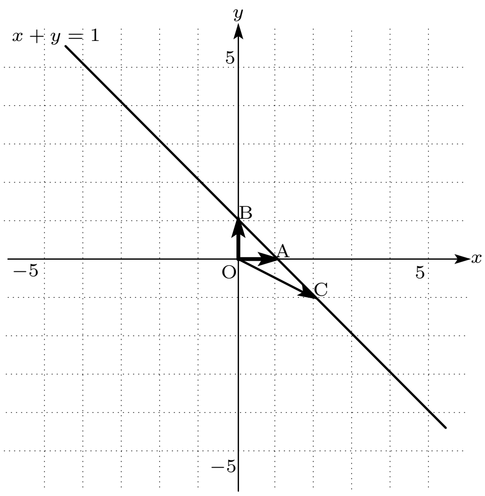
行列 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする.

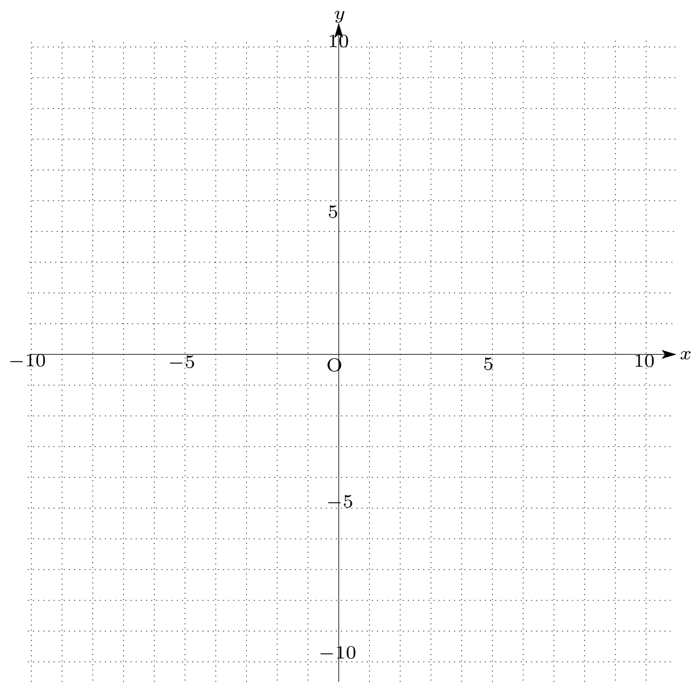
(1) 点 $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(0,1), \mathrm{C}(2,-1)$ の f による像を, 右の方眼紙に書き込め.

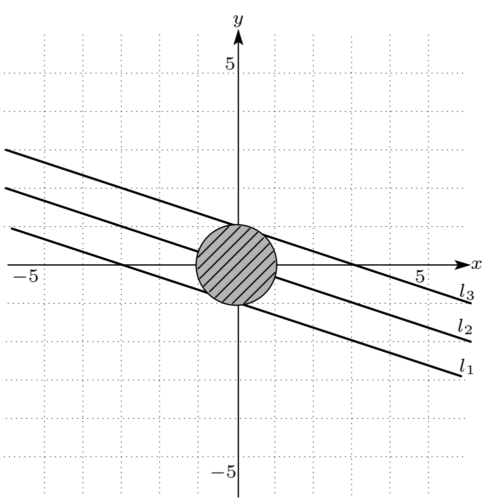
(2) 直線 $x+y=1$ と $x=0$ と $y=0$ の f による像を, それぞれ 右に書き込め.

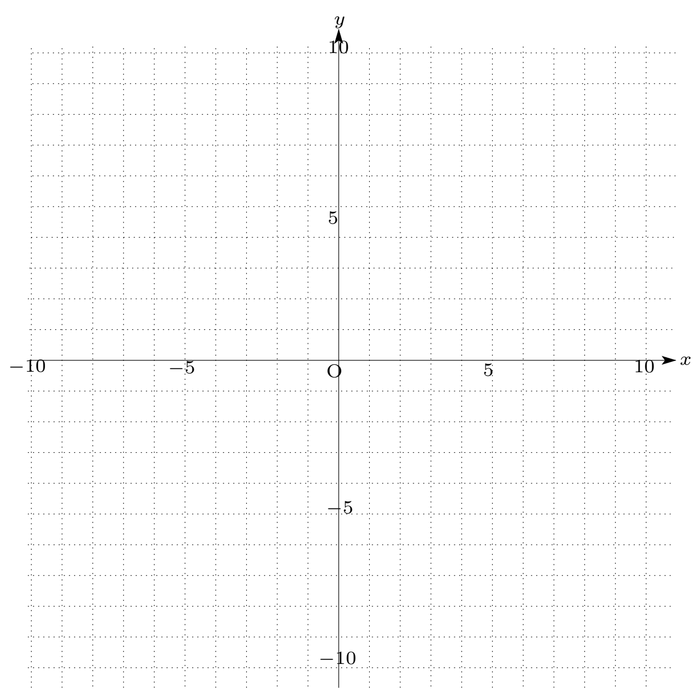
(3) 直線 $l_1 : x+3y=-3,\ l_2 : x+3y=0,\ l_3 : x+3y=3$ の f による像を, それぞれ 右に書き込め.

(4) 円: $x^2+y^2 \leqq 1$ の f による像を, 右に書き込め.









一般に，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で，$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，かつ $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a:b=c:d \Longleftrightarrow ad-bc=0$$

が成り立ちます．(もっと厳密な証明は，**補充 4** 参照)

ところが，線形性より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

そして $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のときは，$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (αは実数) とかけますから，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = (x+\alpha y)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

よって，全平面は原点を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ の直線に移ります．また，直線 $x+\alpha y=k$(k は定数) は一点 (ka, kc) につぶれてしまいます．

先の結果から次のことがわかります．[注4)]

正則でない行列による図形の像

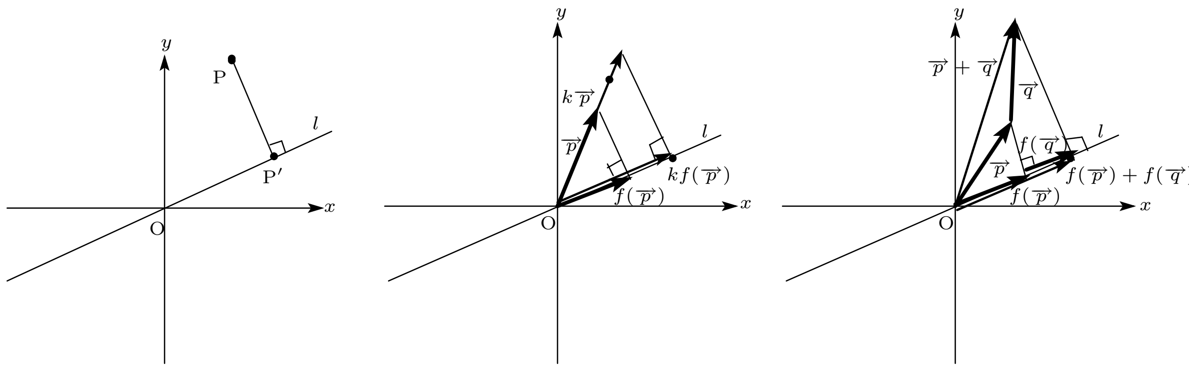
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc=0, A \fallingdotseq O)$ によって
(1) 平面全体は，原点を通る直線 m に移る．
(2) 直線の像は，m 全体 または m 上の一点になる．(元の直線の傾きによって決定される)
(3) 円，四角形などの図形の像は，m 上の線分になる．

問題 4-b $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．
(1) f によって，平面全体は，どのような図形に移るか？
(2) f によって，$y=ax$ が一点に移るとき，傾き a を求めよ．
(3) f によって，領域 $D: 0 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ はどのような図形に移るか？

注4) $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のどちらかが零ベクトルのときは，まだ証明していませんが，簡単に言えるので省略します．

5　代表的な１次変換 ($ad-bc=0$ のとき)

5.1　正射影



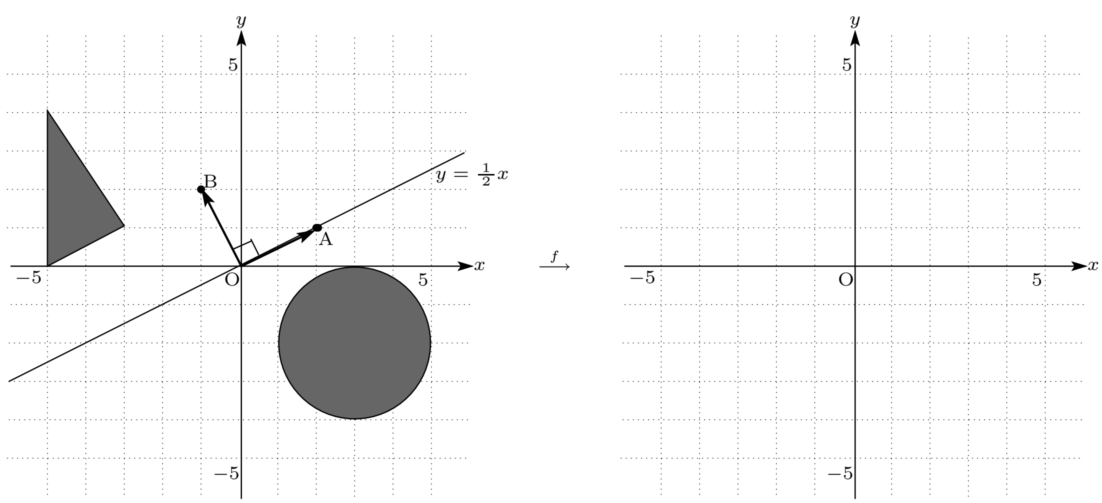
直線 l への正射影というのは，点 P に対し，P から直線 l に下ろした垂線の足 P′ を対応させる変換である．l が**原点を通る**直線のとき，l への正射影を f とすると，上図より任意のベクトル $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ と任意の実数 k に対し

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{kp}) = kf(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成立するので，f は１次変換である．
注5)

問題 5-a

直線 $l: y=\frac{1}{2}x$ への正射影 f を表す行列を P とする．
(1) 点 A$(2,1)$, B$(-1,2)$ の f による像を求めよ．
(2) 行列 P をもとめよ．
(3) f によって，図の三角形や円盤はどのような図形に移るか？右の方眼紙に書き込め．

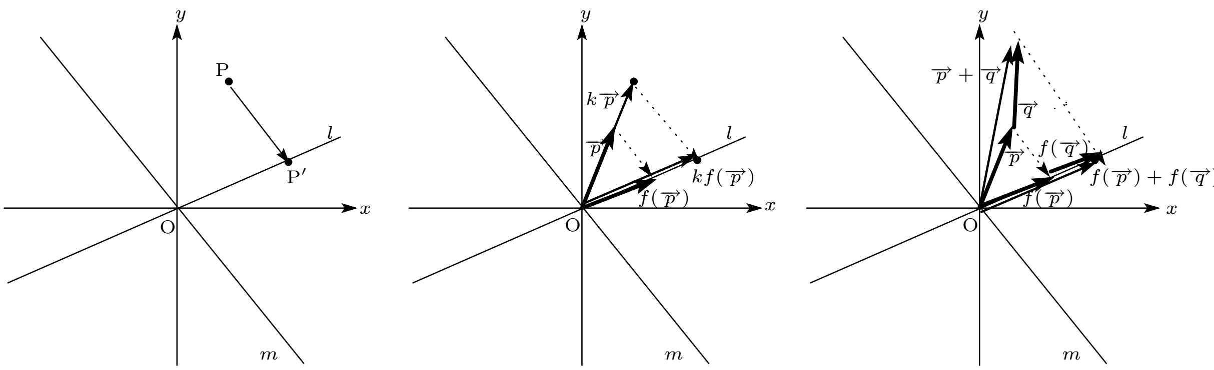


注5) 正射影 (射影) は 正則でない１次変換の代表的なものです．$y=\tan\theta\, x$ に関する対称移動を導いたのと同様にして，$y=\tan\theta\, x$ への正射影を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

であることは導けますが，こちらは，公式を覚えるほどのことはないでしょう．

5.2　【参考】一般の射影



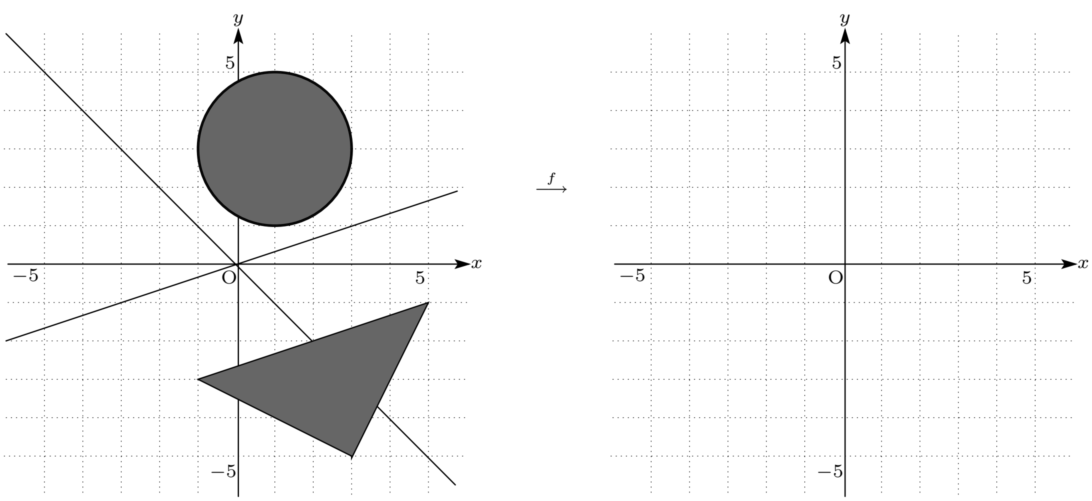
m, l を 互いに平行でない直線とするとき,「m に平行な l への射影」 というのは，点 P に対し，P を通り m と平行な直線と直線 l の交点 P′ を対応させる変換のこと．これも正射影と同様にして，１次変換であることが示されます．また，求め方も正射影とほとんど同じです．

問題 5-b

直線 $m : y=-x$ に平行な 直線 $l : y=\frac{1}{3}x$ への射影を f とする．

(1) 正射影と同様にして，f を表す行列をもとめよ．

(2) f によって，図の三角形や円盤はどのような図形に移るか？右の方眼紙に書き込め．



6　再び線形性について（一般の線形性)

問題 6-a

座標平面上に原点 O を重心とする三角形 ABC がある．１次変換 f は，点 A を点 B に，点 B を点 A に，それぞれ移すとする．

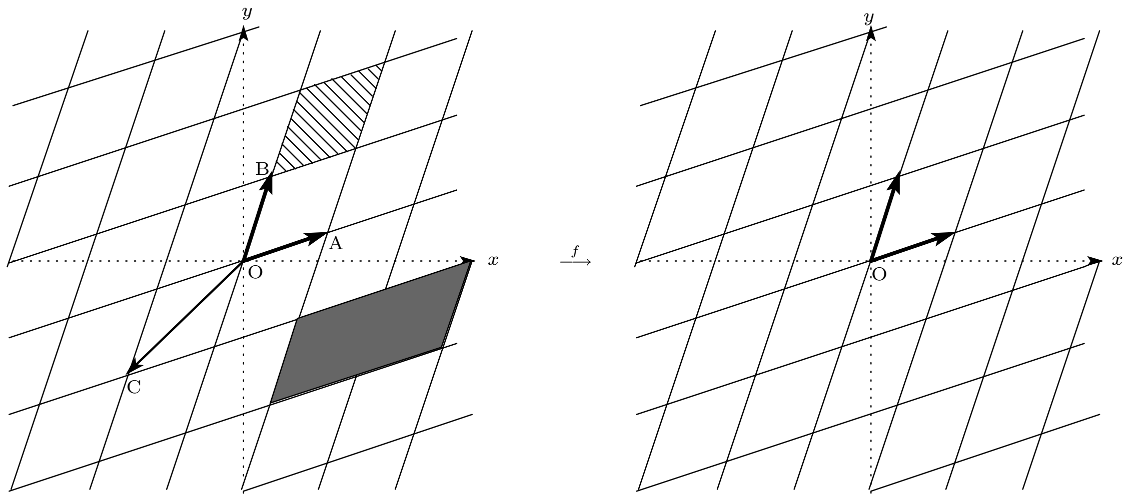
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(2) f による点 C の像を求めよ．

(3) f による直線 OC の像を求めよ．

問題 6-b (1) f による左下図の図形の像を右下の方眼紙に書き込め．

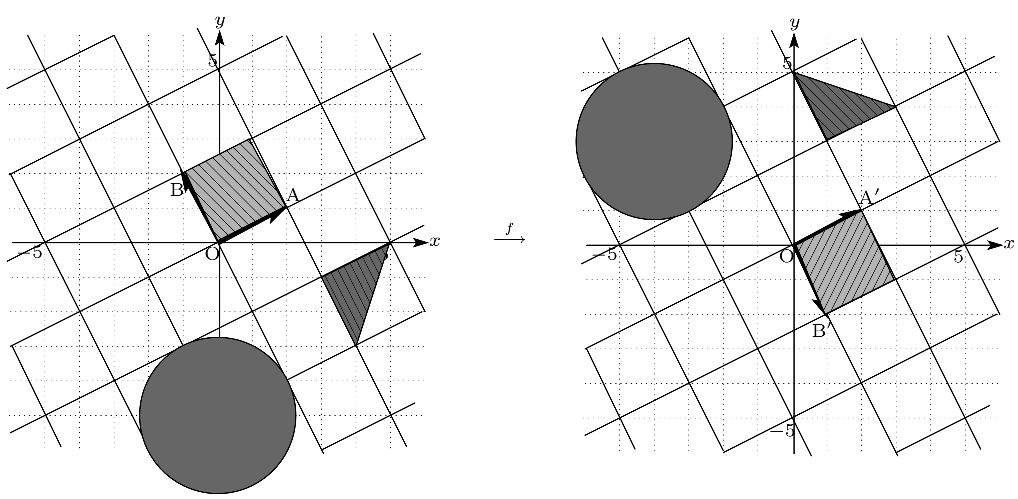
(2) f を表す行列を S とする．このとき，S^2 を求めよ．



Comment

この問題では，最初から $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ベクトルと $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を利用して **網の目** を作っています．このように「問題によってあらかじめ適切なベクトルをとる」ことによって 1 次変換は見やすくなります．

例 l： $y=\frac{1}{2}x$ に関する対称移動では，l 上に点 A$(2,1)$, 原点を通り l と直行する直線:$y=-2x$ 上に 点 B$(-1,2)$ をとり，最初から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で **網の目** を作ったほうが 1 次変換である (**網の目**を**網の目**に移す変換である) ことがよくわかります．



7 【補充】

【補充 1】

定理

f を xy 平面での写像，k は任意の実数，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ はある一次独立なベクトルの組として

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p})+f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立てば，f は，ある行列に対する１次変換である．

【証明】(i) $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に対して線形性が成り立つとき

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x\,f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\,f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

よって，$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

(ii) 一般の場合は，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ は一次独立なベクトルだから，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a_{11}\overrightarrow{p}+a_{12}\overrightarrow{q},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a_{21}\overrightarrow{p}+a_{22}\overrightarrow{q} \qquad \cdots ③$$

をみたす a_{ij} が存在する．よって

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x(a_{11}\overrightarrow{p}+a_{12}\overrightarrow{q})+y(a_{21}\overrightarrow{p}+a_{22}\overrightarrow{q})$$

$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対する線形性より

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= x(a_{11}f(\overrightarrow{p})+a_{12}f(\overrightarrow{q}))+y(a_{21}f(\overrightarrow{p})+a_{22}f(\overrightarrow{q})) \\ &= xf(a_{11}\overrightarrow{p}+a_{12}\overrightarrow{q})+yf(a_{21}\overrightarrow{p}+a_{22}\overrightarrow{q}) \\ &= x\,f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\,f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって ① が成り立つので，② も成り立つ．以上から定理は証明された．

Comment

ここのポイントは，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ で ③ のように表されるということである．このとき，$\alpha\overrightarrow{p}+\beta\overrightarrow{q}$ の全体は，平面ベクトル全体を表すので，結局，任意の平面ベクトルに対し線形性が成り立つことになる．
この定理より，f が**ある網の目**を，網の目に移す変換であるとき，f は１次変換といえる．(**全ての種類の網の目**が，網の目に移ることを確かめる必要はない.)

【補充 2】

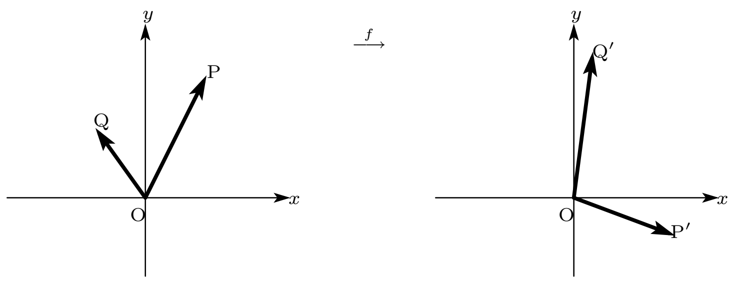
$ad-bc\fallingdotseq 0$ のときの１次変換の性質

(1) 直線は直線に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．
(2) 平行な直線は平行な直線に移る．平行でない直線はやはり平行でない直線に移る．
(3) 線分 AB を $m:n$ に内分 (または外分) する点は，線分 A$'$B$'$ を $m:n$ に内分 (または外分) する点に移る．

【証明】線形性：

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = kf(\overrightarrow{p}) & \cdots(ア) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p})+f(\overrightarrow{q}) & \cdots(イ) \end{cases}$$

(i) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc\fallingdotseq 0)$ の表す変換を f とすると A^{-1} が存在するので「点 P とその像 P$'$ は 1 対 1 に対応する．すなわち，点 Q が異なるならば，その像 P$'$ と Q$'$ も異なる．また像 P$'$ と Q$'$ が異なるならば，その原像 P と Q も異なる．とくに点 P が原点と異なるときは，その像は原点に移らない」

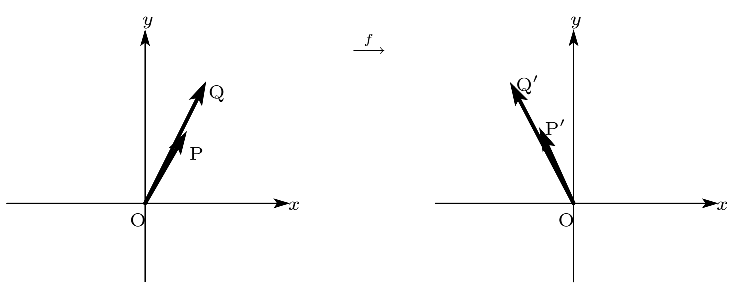


(ii)「平行なベクトルは，互いに平行なベクトルに移り，平行でないベクトルは平行でないベクトルに移る.」ことを証明する． (i) より $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q} \iff f(\overrightarrow{\mathrm{p}})=f(\overrightarrow{\mathrm{q}})$ であるから, 線形性 (ア) から

$$\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a} \iff f(\overrightarrow{b})=f(k\overrightarrow{a}) \iff f(\overrightarrow{b})=k\,f(\overrightarrow{a}) \iff f(\overrightarrow{b})/\!/f(\overrightarrow{a})$$

すなわち，

$$\overrightarrow{p}/\!/\overrightarrow{q} \iff f(\overrightarrow{p})/\!/f(\overrightarrow{q})$$



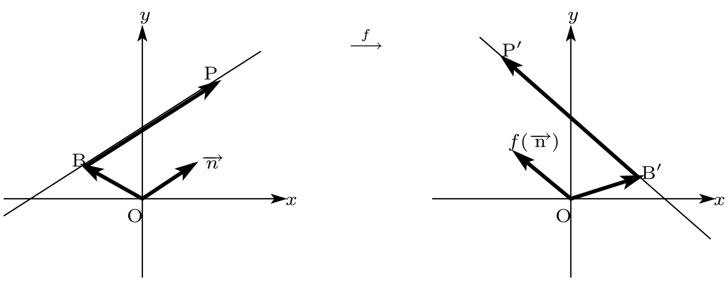
(iii) 点 B を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{n}$ の直線上の点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\,\overrightarrow{n}$$

点 P, 点 B の像を P$'$,B$'$ とする．線形性 (ア),(イ) より

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = f(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\,\overrightarrow{n}) = f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) + t\,f(\overrightarrow{n}) \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \overrightarrow{\mathrm{OB}}' + t\,f(\overrightarrow{n}) \qquad \cdots ①$$

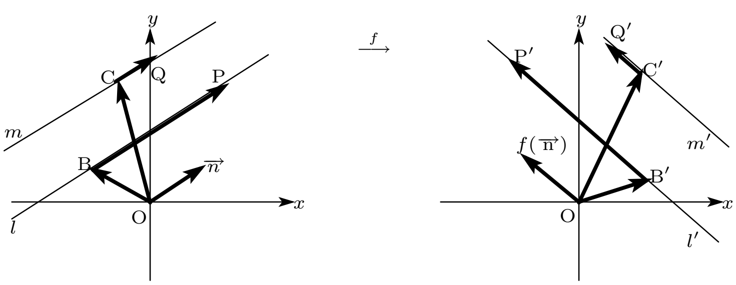
(i) より，$f(\overrightarrow{n}) \neq \overrightarrow{0}$ だから，直線の像は直線である．



次に 2 つの直線 l,m がそれぞれ，点 B, 点 C を通り，ともに $\overrightarrow{n}$ に平行とする．P,Q をそれぞれ l,m 上の点とすると，① と同様にして

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \overrightarrow{\mathrm{OB}}' + t\,f(\overrightarrow{n}) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}' = \overrightarrow{\mathrm{OC}}' + s\,f(\overrightarrow{n}) \end{cases} \qquad (s, t \text{ は実数})$$

よって，$l /\!/ m$ のとき，l と m の像も平行となる．また，(ii) より，平行でない直線は平行でない直線に移る．



最後に，点 P が線分 AB を $t : (1-t)$ に内分する点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

線形性 (ア),(イ) より

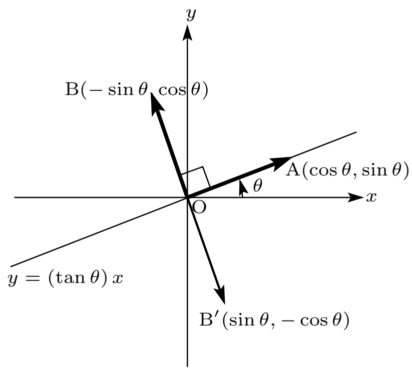
$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = (1-t)\,f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t\,f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}' = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}'$$

よって，P の像 P$'$ は，線分 A$'$B$'$ をやはり $t : (1-t)$ に内分する．外分のときも同様．以上からすべて証明された．

Comment

$ad - bc = 0$ のとき，(i) の部分が成り立たないので，平面全体は原点を通る直線につぶれる．よって，原点を通らない直線も，原点を通る直線に移る (または １点につぶれる)．また平行でない直線も，平行な直線に移る (または１点につぶれる)．

【補充 3】対称移動を表す行列の別の導き方



$l: y=\tan\theta$ に関する対称移動を f, $A(\cos\theta,\sin\theta), B(-\sin\theta,\cos\theta)$ とすると，A は l 上にあるので f によって動かない．$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は l と直交するので, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の像は $(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$. よって,

$$S\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$

まとめて書くと

$$S\left(\begin{array}{ccc}\cos\theta & \vdots & -\sin\theta\\ \sin\theta & \vdots & \cos\theta\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\theta & \vdots & \sin\theta\\ \sin\theta & \vdots & -\cos\theta\end{array}\right)$$

ゆえに

$$S=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

【補充 4】

定理

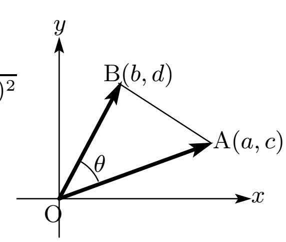
$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ で, $\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, かつ $\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}//\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\iff a:b=c:d\iff ad-bc=0$$

【証明】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}, \angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，三角形の面積公式の証明と同様にして

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{OAB}\text{ 面積の 2 倍 }=)\ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\ &=\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2}\\ &=\sqrt{(ad-bc)^2}\\ &=|ad-bc|\end{aligned}$$



よって,

$$ad-bc=0\iff\sin\theta=0\iff\theta=0,\pi\iff\overrightarrow{\mathrm{OA}}//\overrightarrow{\mathrm{OB}}\iff\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}//\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}$$

同様にして，行ベクトル: $(a,b)\fallingdotseq(0,0)$ かつ $(b,d)\fallingdotseq(0,0)$ のとき,

$$(a,b)//(c,d)\iff a:c=b:d\iff ad-bc=0$$

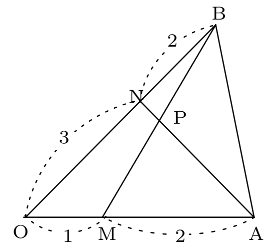
も厳密に証明することができます.

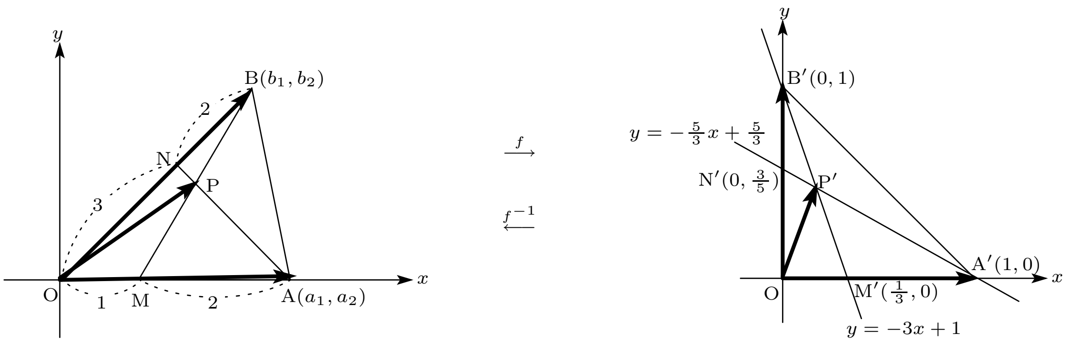
【補充 5】ベクトルの問題への応用
線形性を利用すると，次の問題をすぐ解くことができます．

例題

△OAB で，線分 OA を 1 : 2 に内分する点を M, 線分 OB を 3 : 2 に内分する点を N とし，直線 AN と直線 BM の交点を P とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ．





点 O が原点にくるように座標系をとったとき，点 A(a_1, a_2), 点 B(b_1, b_2) となったとする．このとき，f を 点 A が A′(1, 0), 点 B が B′(0, 1) になるような 1 次変換とすると, 線形性より M の像 M′ は 線分 OA′ を 1 : 2 に内分する点, N の像 N′ は 線分 OB′ を 3 : 2 に内分する点となるので, M′,N′ の成分は,

$$\mathrm{M}'\left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad \mathrm{N}'\left(0, \frac{3}{5}\right)$$

また 1 次変換により, 直線は直線に，交点は交点に移るので, P は直線 A′N′ と 直線 B′M′ の交点 P′ にうつる．ここで,

$$\begin{cases} \mathrm{AN}: & y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} \\ \mathrm{BM}: & y = -3x + 1 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$\mathrm{P'}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

よって

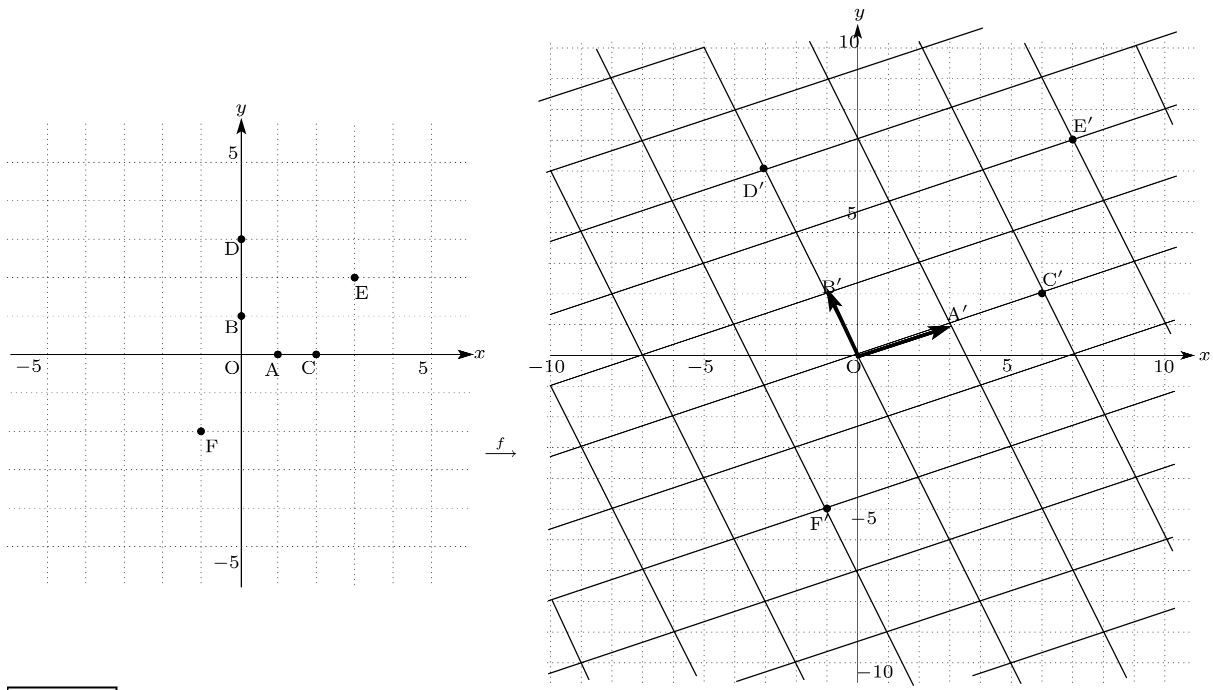
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}'$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立なので，f は逆変換 f^{-1} を持つ．よって，f^{-1} の線形性より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots(\text{答})$$

8 【解答】

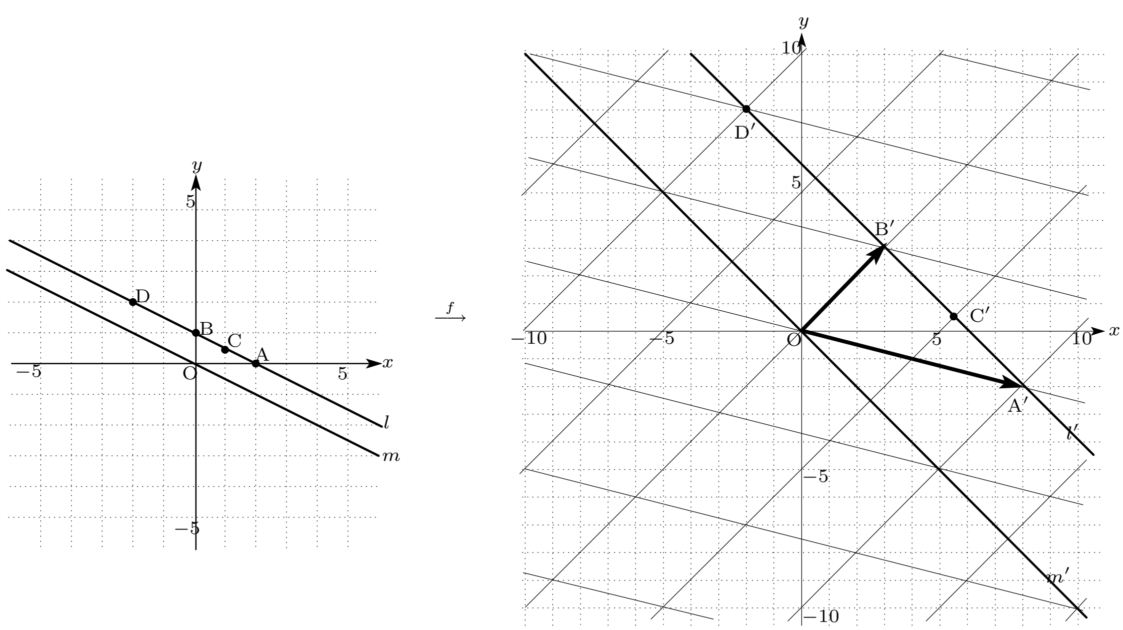
問題 1-a



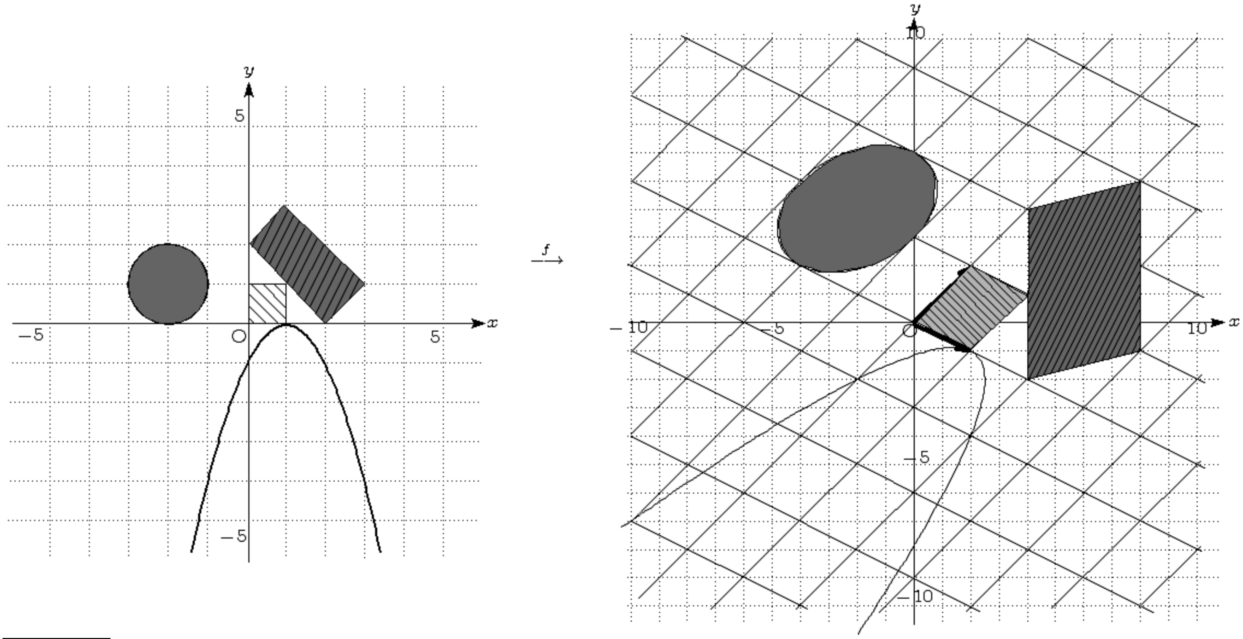
問題 1-b 上図より (または線形性より)

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}' = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}' \\
\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}' = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}' \\
\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}' = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}' \\
\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-2)\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}' = (-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + (-2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}'
\end{cases}
$$

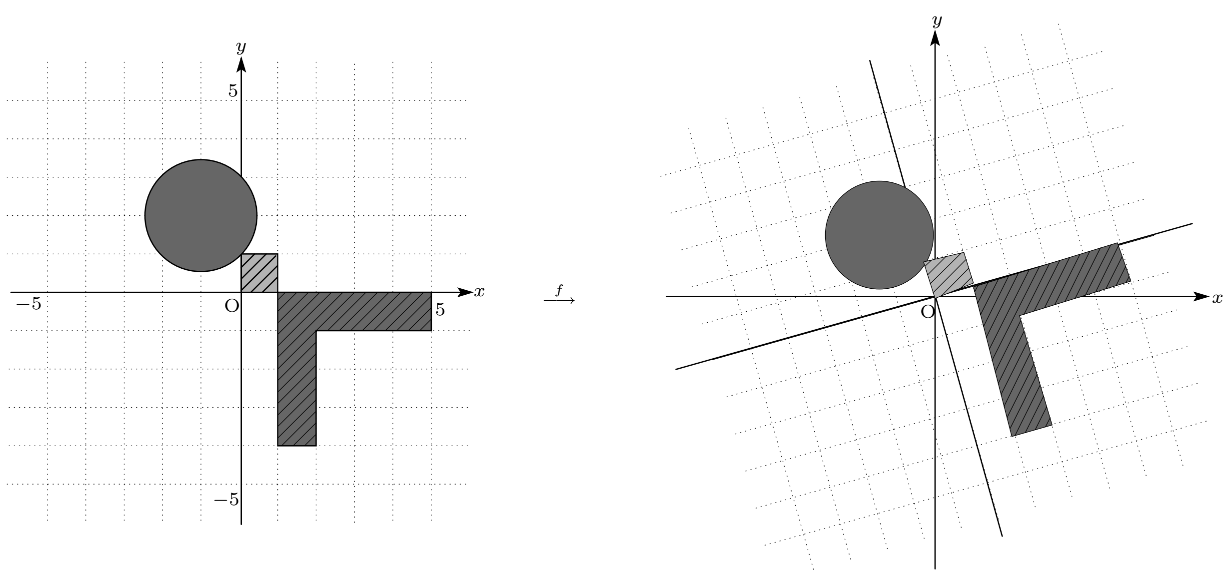
問題 2-a **問題 2-b** 下図 (または線形性) より，$\mathrm{A'C'} : \mathrm{B'C'} = 1 : 1$，$\mathrm{A'D'} : \mathrm{B'D'} = 2 : 1$



問題 2-c **問題 2-d**



問題 3-a



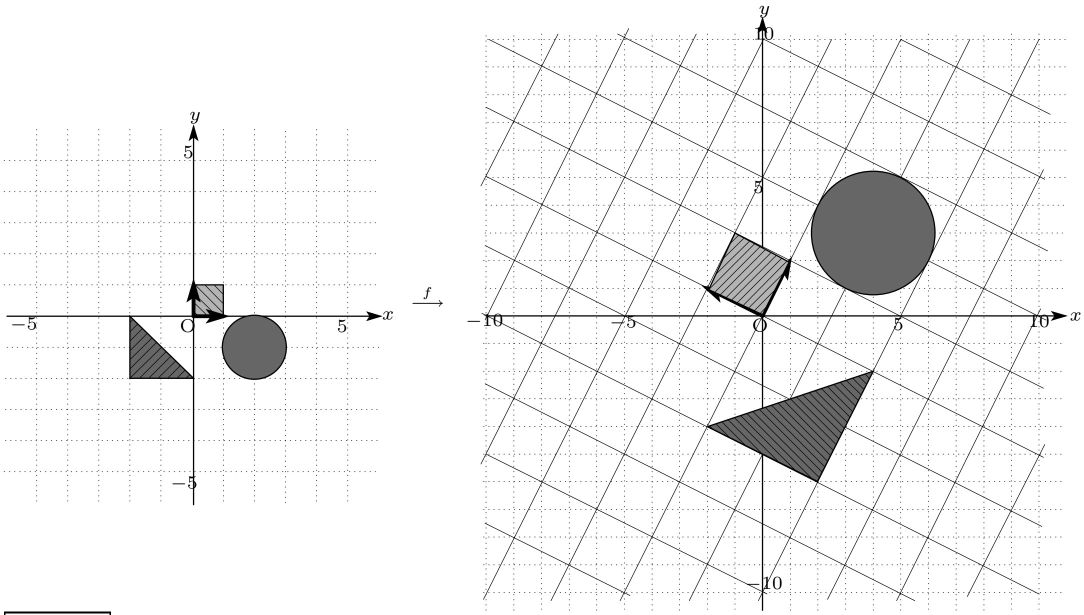
上図．また，$(5,0)$ が $(4,3)$ に移るとき線形性より

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ となるので，f を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$

問題 3-b



問題 3-c

(1) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の像は $\begin{pmatrix}a\\-3\end{pmatrix}$. これが C_2 上にあるので

$$a^2+(-3)^2=25$$

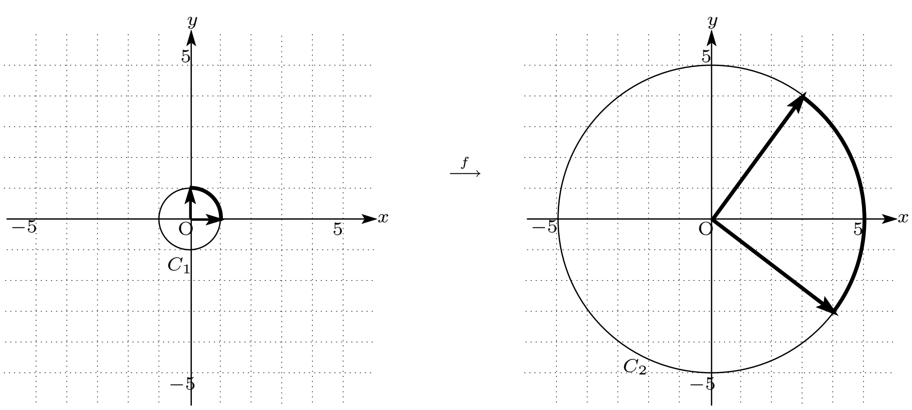
仮定より $a>0$ だから

$$a=4 \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $a=4$ なので,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\-3 & 4\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \left(\text{ただし}, \sin\theta=-\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{4}{5}\right)$$

よって，A は，原点中心の 5 倍の拡大と，θ の回転の合成を表すので，f の像は図の太線部分

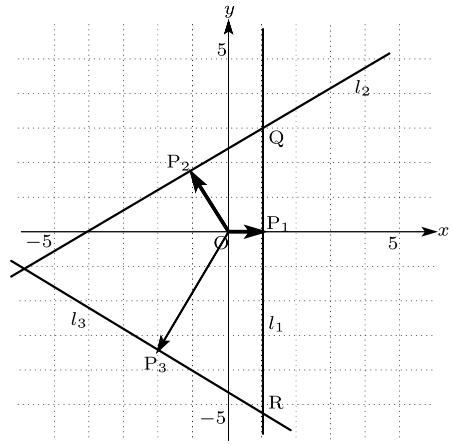


問題 3-d

(1)

$$A = 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$$

よって，A は，原点中心の 2 倍の拡大と，$\frac{2}{3}\pi$ の回転の合成を表す．したがって，l_1 と l_2 のなす角は $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$, 同様に，$l_2$ と l_3 のなす角も $\frac{\pi}{3}$ となるので，正三角形になる．



(2) l_1 は 点 $P_1(1,0)$ を通り $\overrightarrow{OP_1}$ と直行する直線．点 P_1 の像を P_2 とすると

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

f は，2 直線のなす角を変えないので，直線 l_2 は，点 P_2 を通り，$\overrightarrow{OP_2}$ と直交する直線となる．よって，

$$l_2 :\ y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+1) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+1) + \sqrt{3} \qquad \cdots①$$

点 P_2 の像を 点 P_3 とすると

$$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

l_3 は，点 P_3 を通り，$\overrightarrow{OP_3}$ と直交する直線となるから，l_3 の式は

$$l_3 :\ y - (-2\sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2) \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2) - 2\sqrt{3} \qquad \cdots②$$

ゆえに，l_1 と l_2 の交点を Q, l_1 と l_3 の交点を R とすると，

$$\mathrm{Q}\left(1, \frac{5}{3}\sqrt{3}\right),\ \mathrm{R}\left(1, -3\sqrt{3}\right)$$

よって，正三角形の一辺の長さを l とすると

$$l = \overline{\mathrm{QR}} = \frac{5}{3}\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) = \frac{14}{3}\sqrt{3} \qquad \cdots③$$

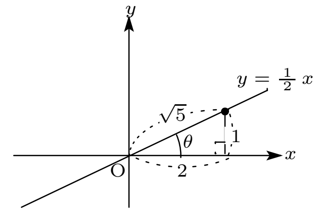
したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot l^2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{14}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{49}{3}\sqrt{3} \qquad \cdots(答)$$

問題 3-e

(1) $y = \sqrt{3}x$ と x 軸正方向とのなす角は，$\frac{\pi}{3}$ だから，求める行列は

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & -\cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$



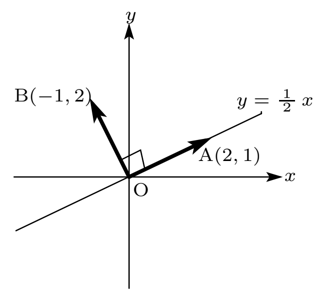
(2) $y=\frac{1}{2}x$ と x 軸正方向とのなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

よって求める行列は

$$S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta+\sin^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\qquad\cdots(答)$$

【別解】 l を $y=\frac{1}{2}x$, 求める行列を S，A$(2,1)$, B$(-1,2)$ とする．点 A は l 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は l と直交するので



$$S\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

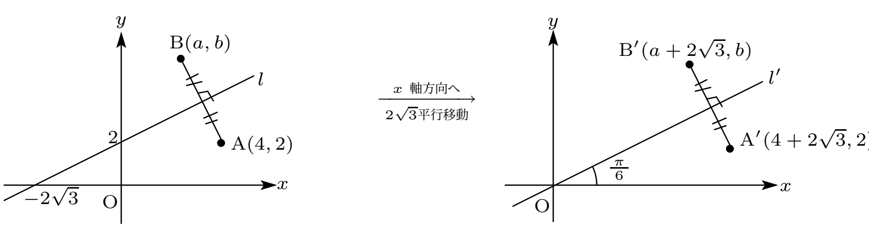
まとめて

$$S\left(\begin{array}{c:c}2 & -1\\ 1 & 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c}2 & 1\\ 1 & -2\end{array}\right)$$

ゆえに

$$S=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\qquad\cdots(答)$$

問題 3-f



B(a,b) とおく．l と x 軸との交点は $(-2\sqrt{3},0)$ だから，A と B と l を，**l が原点を通るように** x 軸方向に $2\sqrt{3}$ 平行移動すると，

$$\mathrm{A}'(4+2\sqrt{3},2),\quad \mathrm{B}'(a+2\sqrt{3},b),\quad l':y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

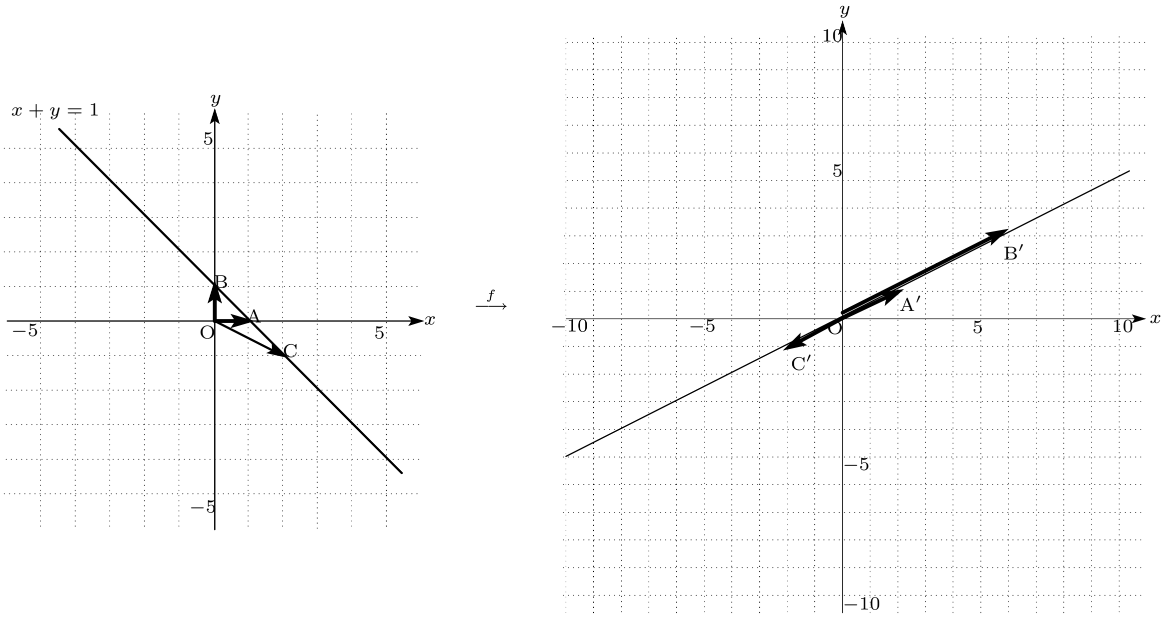
l' は，原点を通り，x 軸正方向とのなす角が $\theta=\frac{\pi}{6}$ の直線なので，l' に関する対称移動の公式から

$$\begin{pmatrix}a+2\sqrt{3}\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{3}\pi & \sin\frac{1}{3}\pi\\ \sin\frac{1}{3}\pi & -\cos\frac{1}{3}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2\sqrt{3}\\ 2+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\qquad\Longleftrightarrow\qquad B(2,\ 2+2\sqrt{3})\qquad\cdots(答)$$

$\boxed{\textbf{問題 4-a}}$ (1) (2) 下右図. 直線 $x+y=1$ の像も，$x=0$ の像も，$y=0$ の像も**全て**，直線 $y=\frac{1}{2}x$ となる.



(3) $\mathrm{P}(x,y)$ の像を $\mathrm{P}'(x',y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+3y) \\ x+3y \end{pmatrix} = (x+3y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

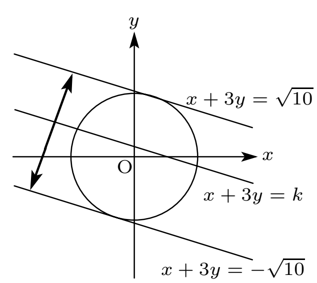
よって P' は原点を通り，方向ベクトル: $\overrightarrow{n}=(2,1)$ の直線**上** にある．ところが P が l_1 上にあるとき $x+3y=-3$(一定) だから，l_1 の像は

$$l_1' :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

同様にして，l_2，l_3 の像はそれぞれ

$$l_2' : (0,0), \quad l_3' : (6,3)$$

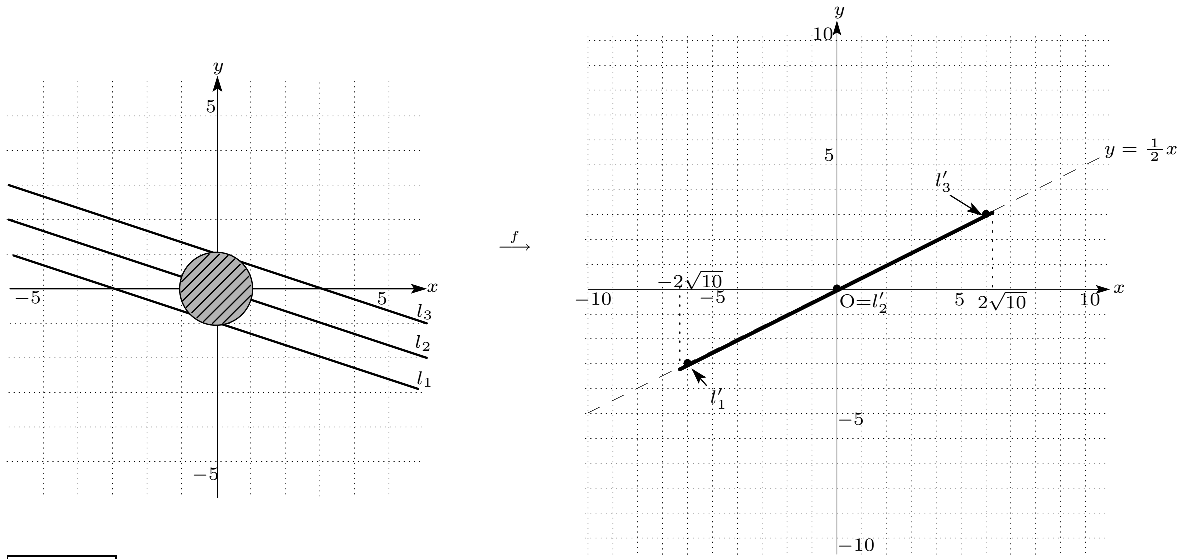
(4) $\mathrm{P}(x,y)$ が $x^2+y^2 \leqq 1$ 内にあるとき，$x+3y$ のとりうる値の範囲を求めればよい．直線:$m : x+3y=k$ と 円: $x^2+y^2=1$ が共有点を持つのは，m と原点との距離が 1 以下のときだから，



$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+3^2}} \leqq 1 \iff -\sqrt{10} \leqq k \leqq \sqrt{10}$$

よって ① より，$x^2+y^2=1$ の像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ (-\sqrt{10} \leqq k \leqq \sqrt{10}) \iff y' = \frac{1}{2}x'\ (\text{ただし } -2\sqrt{10} \leqq x' \leqq 2\sqrt{10})$$



問題 4-b $\mathrm{P}(x, y)$ の像を $\mathrm{P}'(x', y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

(1) 平面全体の像は，

$$y = -\frac{1}{3}x \qquad \cdots (答)$$

(2)f によって，一点に移される直線は $x+2y=k$ (k は一定の実数) であるから，求める a は

$$a = -\frac{1}{2} \qquad \cdots (答)$$

(3) P が D 内を動くとき，$x+2y=k$ のとりえる範囲を求めればよい．$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ と 直線 $x+2y=k \Longleftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ を連立して

$$-\frac{1}{2}x + \frac{k}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x^2 - x + k - 1 = 0$$

(i) 接するとき，これが重解を持つから

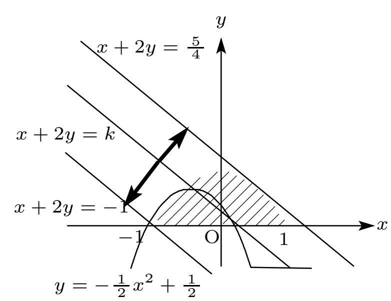
$$(\text{判別式}) = (-1)^2 - 4(k-1) = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

(ii) $(-1, 0)$ を $x+2y=k$ が通るとき，

$$k = -1 + 2\times 0 = -1$$

以上より，$x+2y$ のとりうる値の範囲は

$$-1 \leqq x+2y \leqq \frac{5}{4}$$



よって ① より，求める図形は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-1 \leqq k \leqq \frac{5}{4}\right) \Longleftrightarrow y' = -\frac{1}{3}x' \left(-3 \leqq x' \leqq \frac{15}{4}\right) \qquad \cdots (答)$$

問題 5-a (1) A は l 上にあるので, $f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$. 一方 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は l と直交するので, $f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{0}$. すなわち,

$$P\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad P\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) まとめて書くと

$$P\begin{pmatrix}2 & \vdots & -1\\1 & \vdots & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & \vdots & 0\\1 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

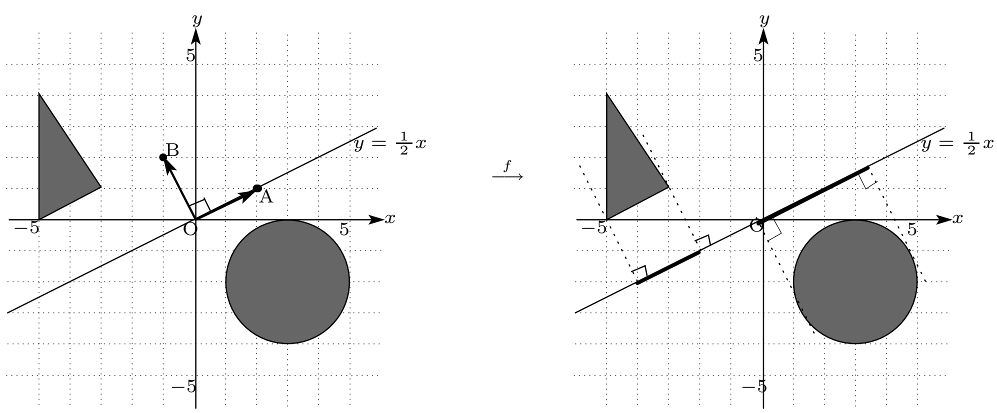
よって

$$P = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) 下の図の太線部

$$y = \frac{1}{2}x \quad \left(-4 \leqq x \leqq -2,\ \frac{8-4\sqrt{5}}{5} \leqq x \leqq \frac{8+4\sqrt{5}}{5}\right)$$

注6)



注6) $y = \frac{1}{2}x$ と直交する直線は $2x + y = k$ とおける. これが 円 :$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ と接するとき, 中心との距離が半径に等しいから,

$$\frac{|2 \times 3 + (-2) - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2 \iff |4-k| = 2\sqrt{5} \iff 4 - k = \pm 2\sqrt{5} \iff k = 4 \mp \sqrt{5}$$

これと $y = \frac{1}{2}x$ を連立して

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ 2x + y = 4 \pm \sqrt{5} \end{cases} \implies x = \frac{8 \pm \sqrt{5}}{5}$$

よって, 円の像は

$$y = \frac{1}{2}x\left(\frac{8-4\sqrt{5}}{5} \leqq x \leqq \frac{8+4\sqrt{5}}{5}\right)$$

もちろん, 問題**4-a**, 問題**4-b** のようにしても求まる.

問題 5-b (1) A(3,1),B(−1,1) とする．A は l 上にあるので，$f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$．一方 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は m 上にあるので，$f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{0}$．よって f を表す行列を P とおくと，

$$P\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\qquad P\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})$$

まとめて書くと

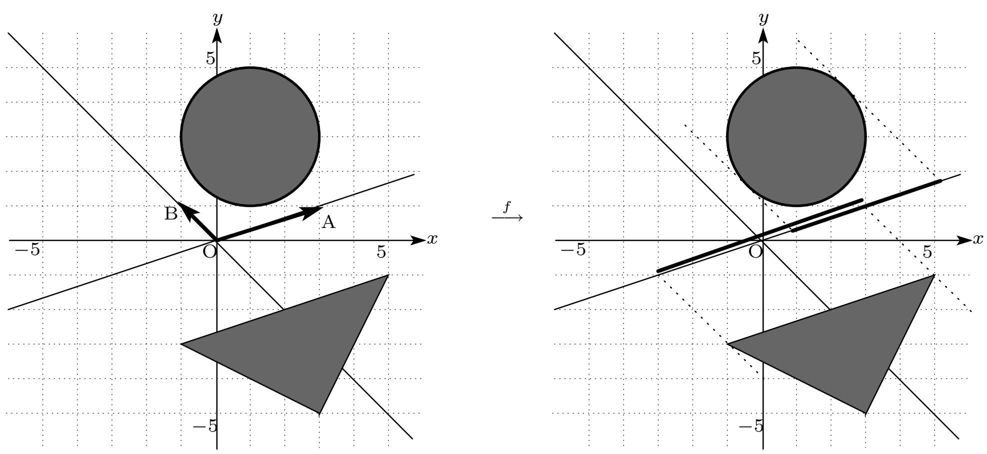
$$P\begin{pmatrix}3 & \vdots & -1\\1 & \vdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & \vdots & 0\\1 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

よって

$$P=\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&0\\1&0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 下の図の太線部

$$y=\frac{1}{3}x \quad \left(-3 \leqq x \leqq 3,\ 3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\leqq x \leqq 3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$



問題 6-a (1) △ABC の重心が O だから

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ だから，

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OC}})=f(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=-f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})-f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ゆえに，点 C の像は

点 C $\cdots$(答)

(3) 直線 OC 上の点を P をすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とかける．よって，

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=f(k\overrightarrow{\mathrm{OC}})=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

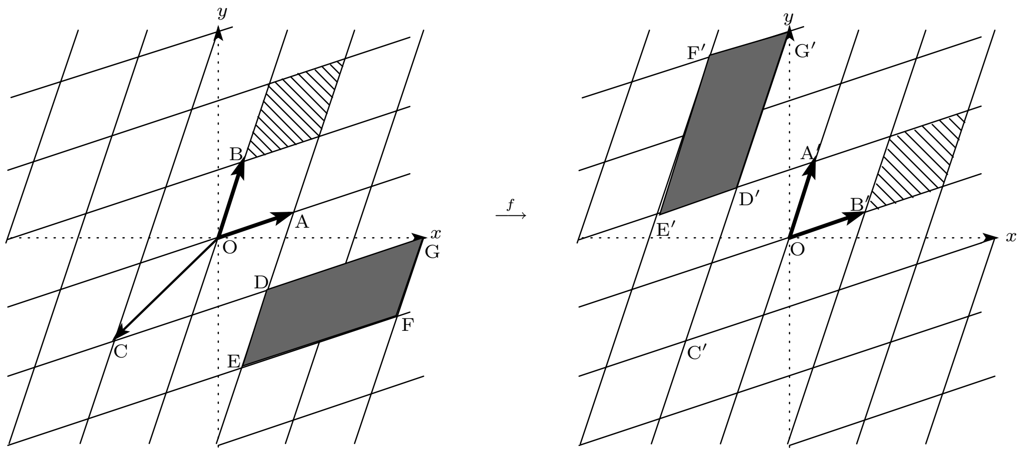
k は任意の実数値を取るので，点 P は直線 OC 上をくまなく動く．よって，直線 OC の像は

直線 OC $\cdots$(答)

問題 6-b (1) ともに平行四辺形だから頂点の像を求めればよい．図のように点 D,E,F,G をとると，線形性より

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OD}}' = \overrightarrow{\mathrm{OA}}' - \overrightarrow{\mathrm{OB}}' \\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OE}}' = \overrightarrow{\mathrm{OA}}' - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OF}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OF}}' = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}' - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}' \\ \overrightarrow{\mathrm{OG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OG}}' = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}' - \overrightarrow{\mathrm{OB}}' \end{cases}$$

もうひとつの四角形に対しても同様だから，下図のようになる．



(2) $f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ だから，

$$\begin{cases} f(f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})) = f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ f(f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})) = f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{cases}$$

すなわち

$$S^2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ かつ } S^2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立だから

$$S^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$

Comment

A(1,0),B(0,1) のとき，点 A を点 B に，点 B を点 A に移す変換は，$x' = y, y' = x$ となり，直線 $y = x$ に関する対称移動となる．f は，この一般化になっている．そして T が対称移動を表す行列のときも $T^2 = E$ がなりたつ．

9　【付録】明日 のために

余白ができたので，発展した話題も付け加えます．１次変換の特徴を見るには，そうでない変換を考えてみることが良いです.

一般の変換の例

次の変換

$$f: \begin{cases} x' = x^2 \\ y' = 2y \end{cases}$$

による半直線: $x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3$ (ただし $y \geqq 0$) と $y = 0,\ y = 1,\ y = 2$ (ただし $x \geqq 0$) の像を求め図示せよ．さらに，線分 $x + y = 1$, $x + y = 2$, 半直線: $y = x$ (ただし $x \geqq 0, y \geqq 0$) の像を求め図示せよ.

この変換 f は (2次式を含むので) １次変換ではありません．さて，直線 $x = 3$ 上の点 P は P$(3, t)$ $(t \geqq 0)$ とおける．このとき

$$\begin{cases} x' = 3^2 = 9 \\ y' = 2t \end{cases}$$

よって 半直線 $x = 3$ の像は, 半直線 $x' = 9$ $(y' \geqq 0)$ です．同様にして，半直線 $x = 0, x = 1, x = 2$ の像は, それぞれ $x' = 0, x' = 1, x' = 4$ (すべて $y' \geqq 0$) です．つぎに直線 $y = 3$ 上の点 P を P$(t, 3)$ $(t \geqq 0)$ とおくと，

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 6 \end{cases}$$

よって 半直線 : $y = 3$ の像は, 半直線: $y' = 6$ $(x' \geqq 0)$ です．同様に，半直線 : $y = 0, y = 1, y = 2$ $(x \geqq 0)$ の像はそれぞれ，半直線 : $y' = 0, y' = 2, y' = 4$(すべて $x' \geqq 0$) となります．では，線分 : $x + y = 2$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$ の像はどうなるでしょうか？今度は P$(t, 2 - t)$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ とおけます．このとき,

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 2(2 - t) \end{cases}$$

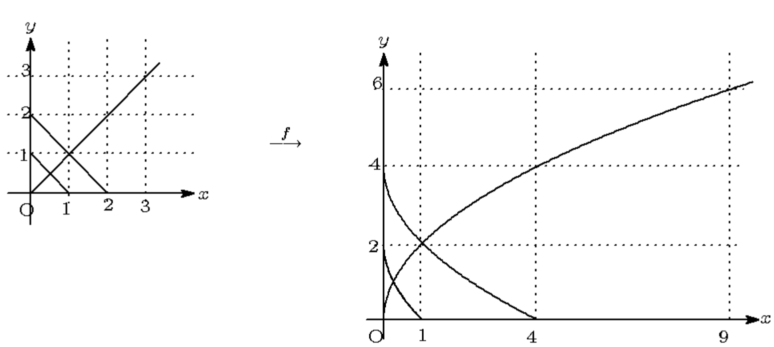
t を消去して

$$x' = \frac{1}{4}(y' - 4)^2 \text{ (ただし}, 0 \leqq y \leqq 4)$$

すなわち直線の像が直線になりません．同様，: $x + y = 1$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$ の像は $x' = \frac{1}{4}(y' - 2)^2$ $(0 \leqq y' \leqq 2$ となり，半直線:$y = x$ $(x \geqq 0)$ の像は,

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 2t \end{cases} \longrightarrow x' = \frac{y'^2}{4} \ (y' \geqq 0)$$

と, これまた直線の像が直線になりません．これは線形性が成り立たないためです．（この例では，正方形の**網の目**は，長方形の**網の目**に移っていますが，一般には，この網の目も曲線で作られることになります．）



しかし，**曲線も，局所的には接線（「１次関数」）で近似できるように，f も 局所的には「1 次変換」で近似できます．** $(x,y)=(1,1)$ の近くで，f を近似する 1 次変換を求めてみましょう．$x'=x^2$ の $x=1$ に於ける接線は

$$x'=2(x-1)+1$$

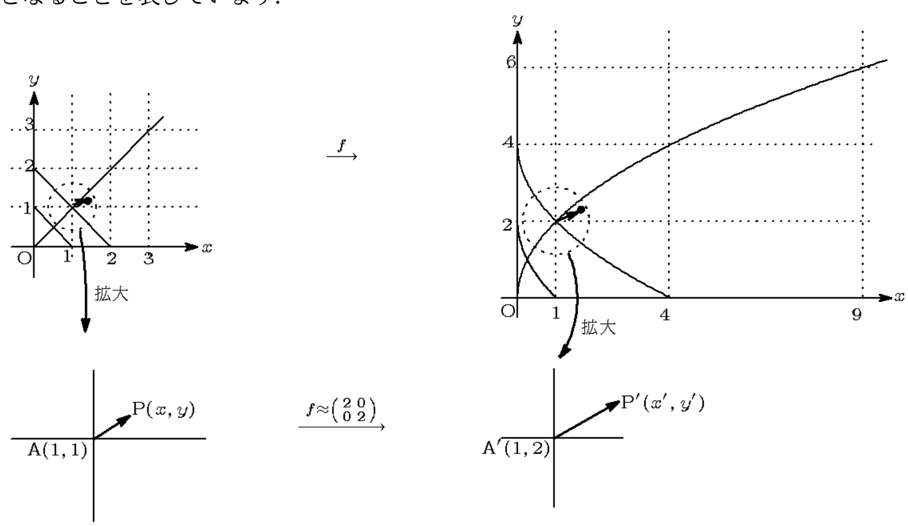
よって，$(x,y)=(1,1)$ の近くでは，

$$f\approx\begin{cases}x'=2(x-1)+1\\ y'=2y\end{cases}\iff\begin{cases}x'-1=2(x-1)\\ y'-2=2(y-1)\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x'-1\\ y'-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}$$

と近似できます．これは，$\mathrm{A}(1,1)$ とすると，その像が $\mathrm{A}'(1,2)$ となることから，$\mathrm{P}(x,y)$ が A に近いとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P'}}\approx\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\iff\overrightarrow{\mathrm{A'P'}}\approx 2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\qquad\cdots①$$

となることを表しています．[注7)]



すなわち，点 A の近くでは，f は，点 A 中心の 2 倍の拡大を表しますから，例えば，**点 A で交わる 2 本の曲線のなす角は変えません．** 実際，A において，直線 $x+y=2$ と $y=x$ は直交しますから A' において，2 つの放物線も直交します．[注8)]
このように，どのような変換に対しても (微分可能であれば) 各点の近くでは 1 次変換で近似することができます．そして,「微分を利用して各点の近くの接線が求まれば，曲線全体の形がわかる」のと同様に,「各点の近くでの変換の様子を調べることによって変換全体の様子を調べる」ことができます．この他にも無数に応用されます．

注7) 確かめてみましょう．$\mathrm{P}(x,y)=(1.1,1,2)$ のとき，f の式から

$$\begin{cases}x'=1.1^2=1.21\\ y'=2\times1.2=2.4\end{cases}\iff\begin{cases}x'-1=0.21=2(x-1)+0.01\\ y'-2=0.4=2(y-1)\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x'-1\\ y'-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.01\\0\end{pmatrix}$$

たしかに，かなり正確に近似されています．

注8) $C_1:x=\frac{1}{4}(y-4)^2$, $C_2:x=\frac{y^2}{4}$ とする．C_1,C_2 の式をそれぞれ y に関し微分して，

$$C_1\text{に関し}:\frac{dx}{dy}=\frac{y-4}{2},\qquad C_2\text{に関し}:\frac{dx}{dy}=\frac{y}{2}$$

ゆえに, 点 $\mathrm{A}'(1,2)$ におけるそれぞれの接線の傾きは

$$C_1\text{では},\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y-4}\Big|_{y=2}=-1,\qquad C_2\text{では},\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}\Big|_{y=2}=1.$$

よって，点 A' において C_1 と C_2 は直交する．また，$y=x$ と $x=1$ や $y=1$ とのなす角はともに $\frac{\pi}{4}$ ですから，A'　において，C_2' と $y=2$, $x=1$ とのなす角も $\frac{\pi}{4}$ になっている．