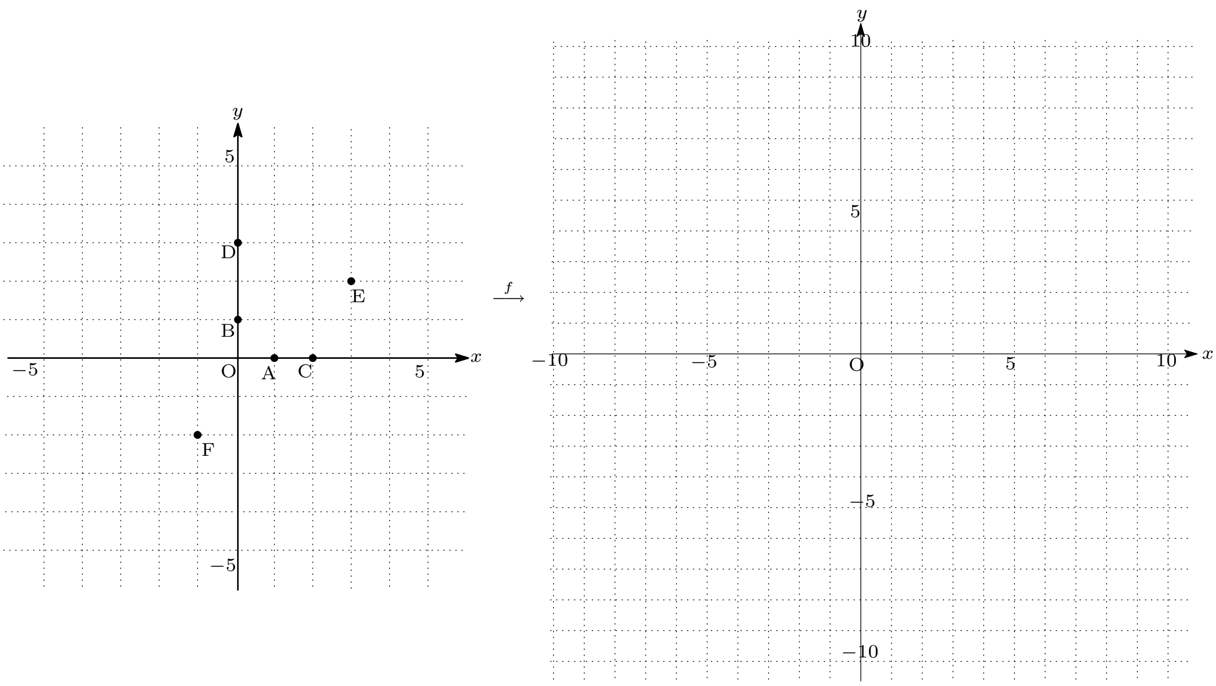
1　線形性

問題 1-a

行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す１次変換 f による次の点の像を求め, 右の図に図示せよ.
$A(1,0), B(0,1), C(2,0), D(0,3), E(3,2), F(-1,-2)$



上の問題で, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，その像は

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OE'}} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left\{3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OE'}} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり，結局 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を，それぞれ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に変えた**だけ**になっている．これを，**線形性**(linearlity) という.

線形性 (特別な場合)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

であるから,

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = xA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{f} x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

すなわち，行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **による一次変換は，** $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$ **を** $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ **に，** $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **を** $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$ **に変えるだけ**といえる．これは，次のように一般化される．

線形性

一般に，A を任意の 1 次変換を表す行列, $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ を任意のベクトル, k を任意の実数とするとき

$$\begin{cases} A(k\overrightarrow{p}) = kA(\overrightarrow{p}) \\ A(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = A(\overrightarrow{p}) + A(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

まとめて

$$A(\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q}) = \alpha A\overrightarrow{p} + \beta A\overrightarrow{q} \quad (\alpha, \beta \text{は任意の実数})$$

すなわち

$$\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q} \xrightarrow{f} \alpha f(\overrightarrow{p}) + \beta f(\overrightarrow{q})$$

一般に f は，$\overrightarrow{p}$ を $f(\overrightarrow{p})$ に，$\overrightarrow{q}$ を $f(\overrightarrow{q})$ に変えるだけの変換といえる．[注1)]

注1) 逆に f を xy 平面での写像とし, k は任意の実数，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ は一次独立なベクトルとするとき,

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立てば，f は，ある行列に対する 1 次変換であることも示せる．(**web 補充**)

正則 ($ad-bc \neq 0$) な 1 次変換と図形

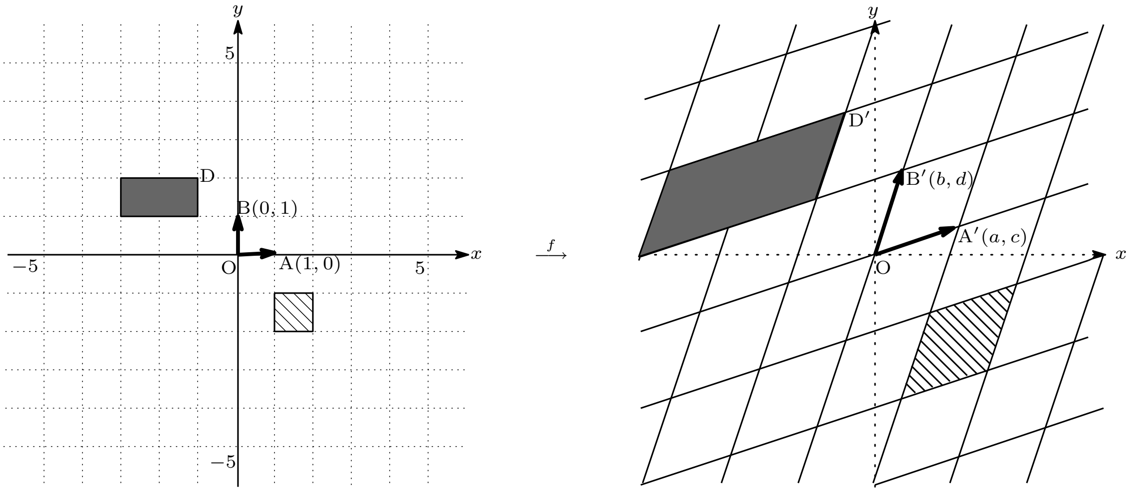
正則な 1 次変換によって

(1) 直線は直線に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．

(2) 平行な直線は平行な直線に移る．平行でない直線はやはり平行でない直線に移る．

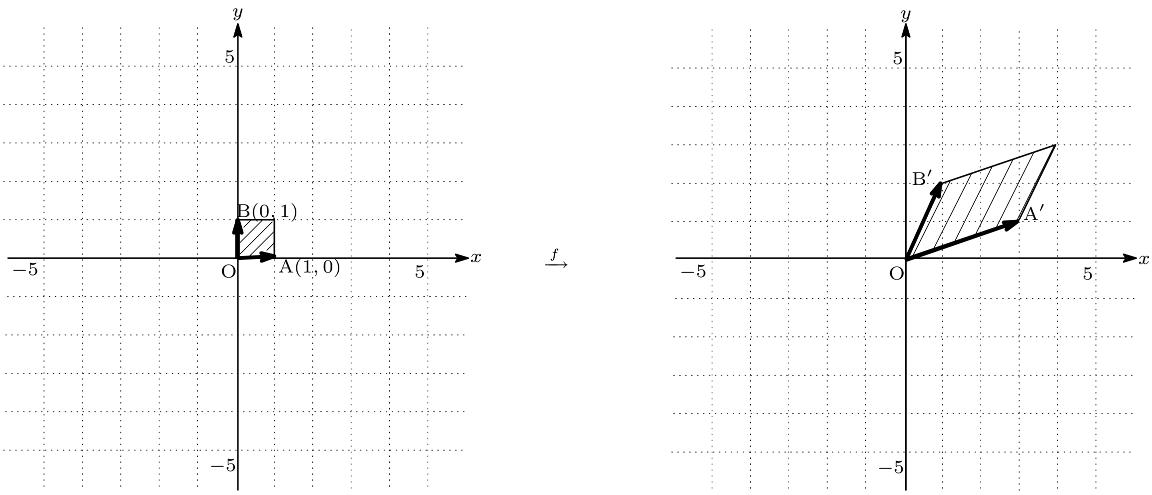
(3) 線分 AB を $m:n$ に内分 (または外分) する点は，線分 A′B′ を $m:n$ に内分 (または外分) する点に移る．

直感的にいうと，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($ad-bc \neq 0$) による一次変換は，$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **で作られた網の目を，**$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **で作られる網の目に変えること**といえる．



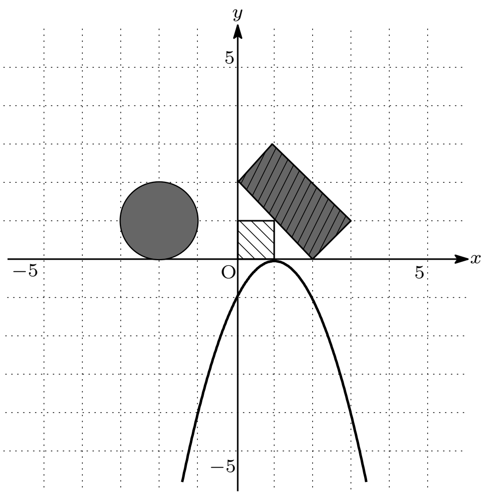
問題 1-a (基本ベクトルの像)

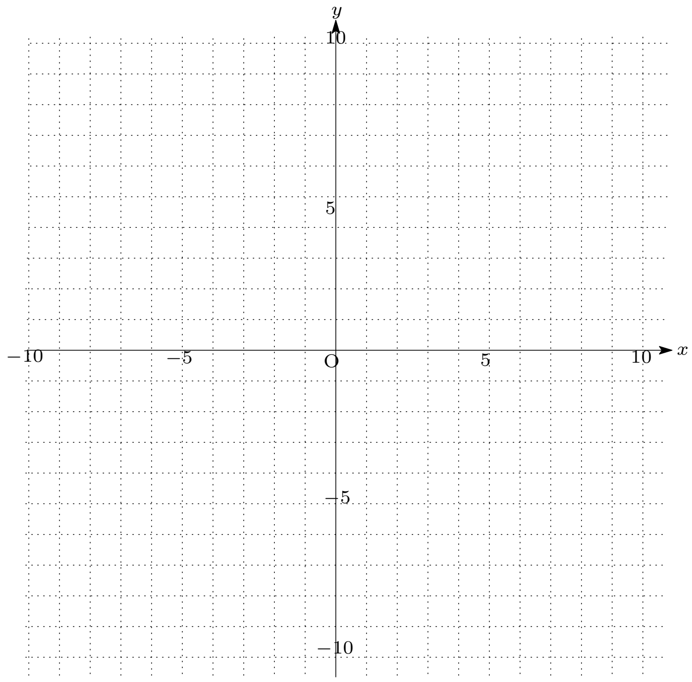
A(1,0),B(0,1) の一次変換 f による像を A’,B’ とする．A’,B’ が下図のようになる時，f を表す行列を求めよ．



問題 1-b (いろいろな図形の像)

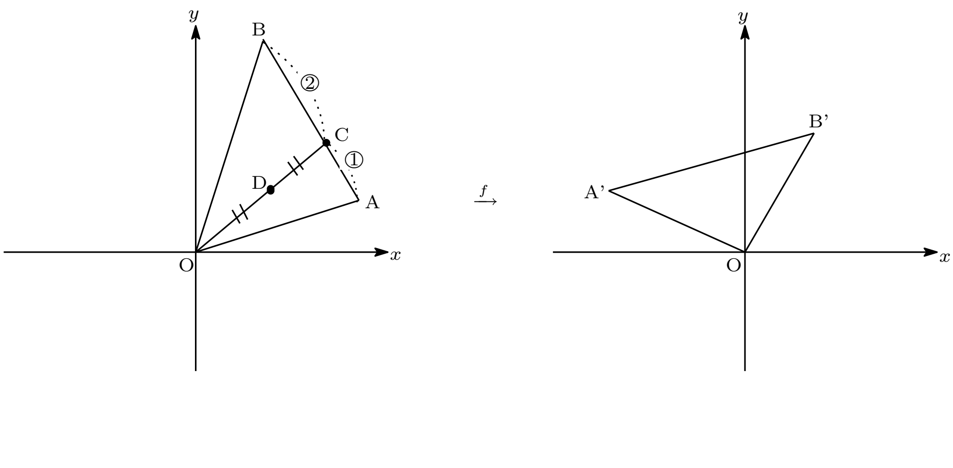
行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．左図の三角形，平行四辺形，円, 放物線の f による像を，それぞれ右の方眼紙に書き込め.





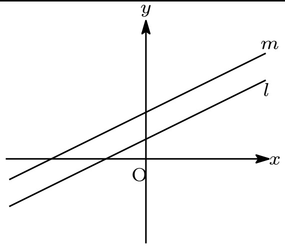
問題 1-c (一次変換と比)

下の図で点 C は AB を 2:1 に内分する点，点 D は OC の中点とする．1 次変換 f による点 A,B,C,D の像をそれぞれ A’,B’,C’,D’ とする．C’ と D’ を図に書き込め.

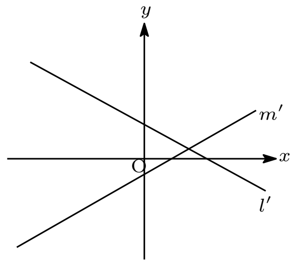


問題 1-d

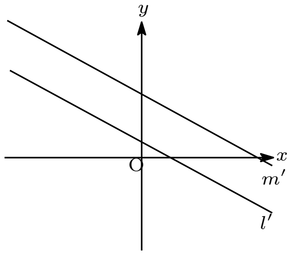
右の直線 l,m をある一次変換で移すと，下のいずれかのようになった.
正しい図を選べ.



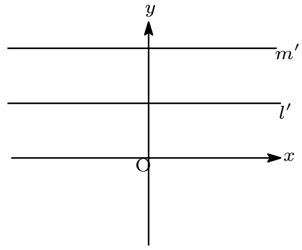
【図 1】



【図 2】



【図 3】



問題 1-e(直線の像)

行列 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による一次変換 f で，直線 $l: 2x + y = 4$ はどのような図形に移るか.

問題 1-f(直線の像)

直線 l の媒介変数表示を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，行列 $F = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって l が移される図形を，媒介変数表示せよ．

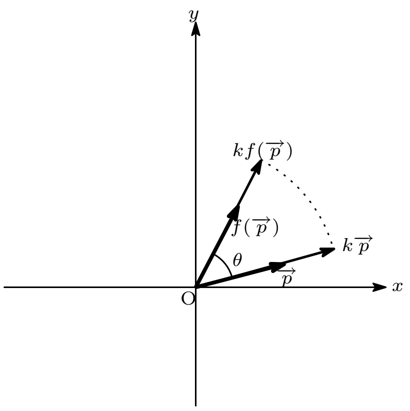
2 代表的な (正則)1 次変換 ($ad - bc \neq 0$ のとき)

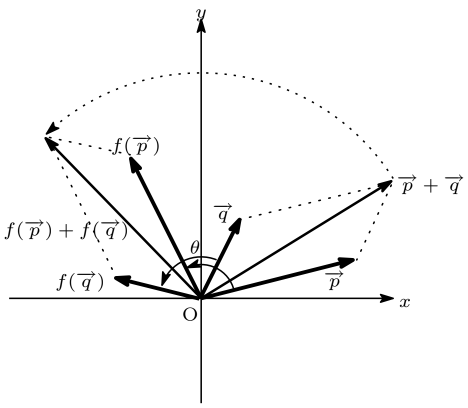
2.1 原点中心の拡大・縮小 (相似変換)

原点中心の k 倍の相似変換 ($x' = kx,\ y' = ky$) は，１次変換であり，それを表す行列は

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

2.2 原点中心の回転





原点中心の回転を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対し,

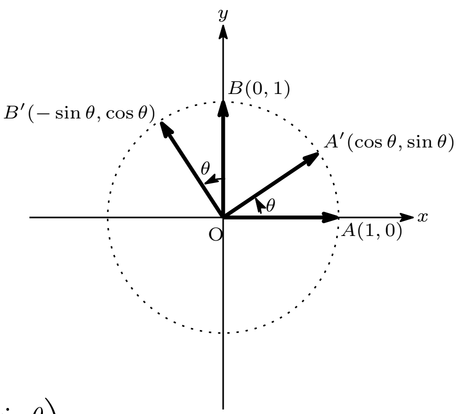
$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は１次変換である.

ゆえに, f を表す行列を R とすると, 左図より

$$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ + \theta) \\ \sin(90^\circ + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



よって原点中心の θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ とすると

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

すなわち，直感的にいうと，$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ で作られる**網の目**を，$e_1' = (\cos\theta, \sin\theta), e_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)$ で作られる**網の目**に変換するので，f は１次変換である.(**web 補充**)

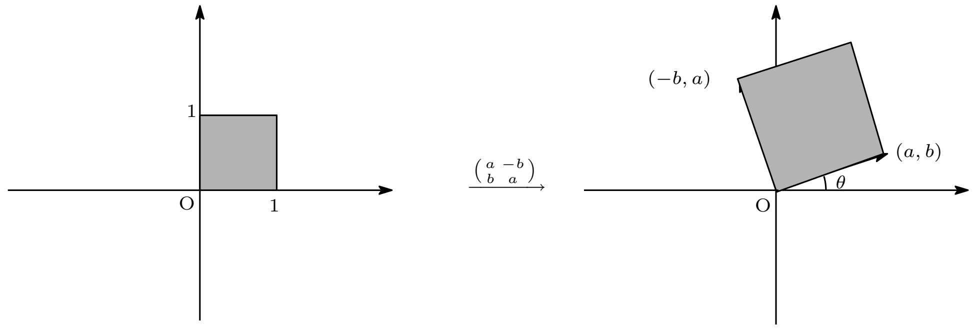
2.3　回転 ∘ 拡大

$a^2 + b^2 \neq 0$ のとき,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{ただし}, \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

よって, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は,「原点中心の回転」と「原点中心の相似変換」の合成を表す行列である.

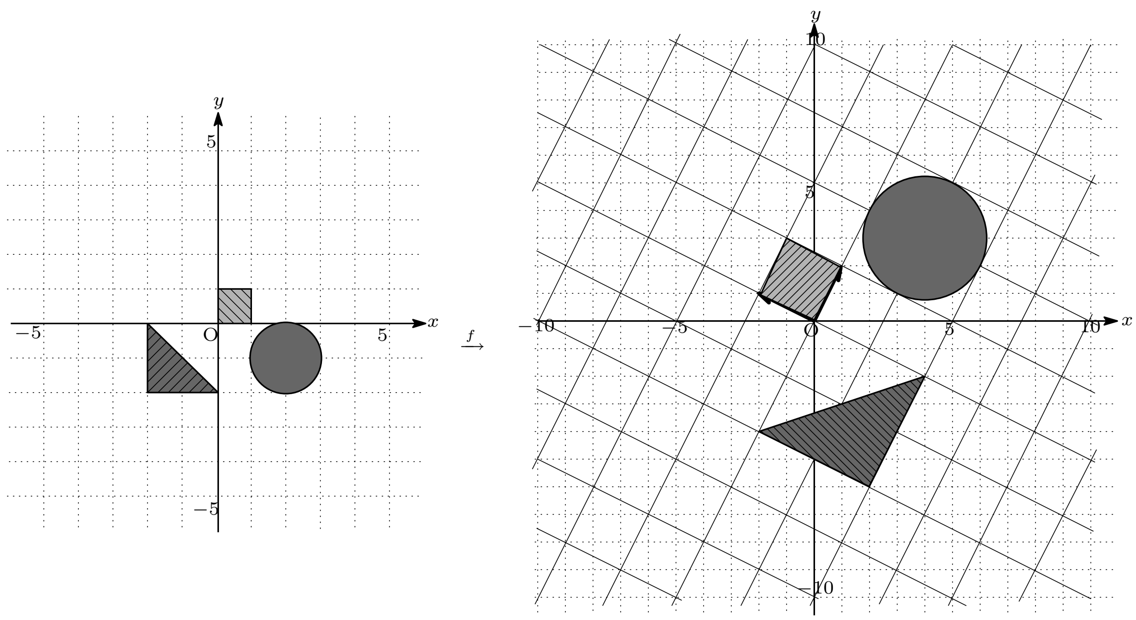


例 2-a $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ とすると, $A = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

ゆえに, A は,「原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転し, 原点からの距離を 2 倍に拡大する 1 次変換」を表す.

例 2-b

f を $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換とする. 左の方眼紙に描かれている三角形, 平行四辺形, 円を, f によって移動した図形は, 右の様になる.

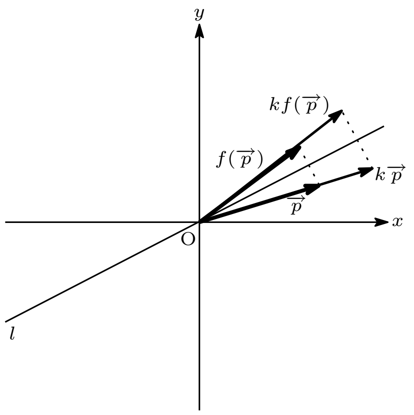


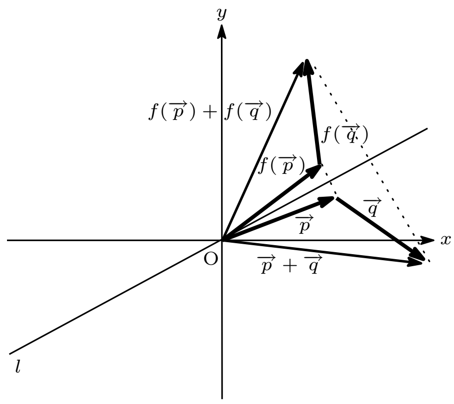
$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列による 1 次変換は，原点の周りの 回転と相似変換の合成なので，**すべての図形を相似な図形に写す．特に，円は円に移し，また，2 直線の間の角も変えない．**

問題 2-a

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換による，円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ の像を求めよ．

2.4　原点を通る直線に関する対称移動



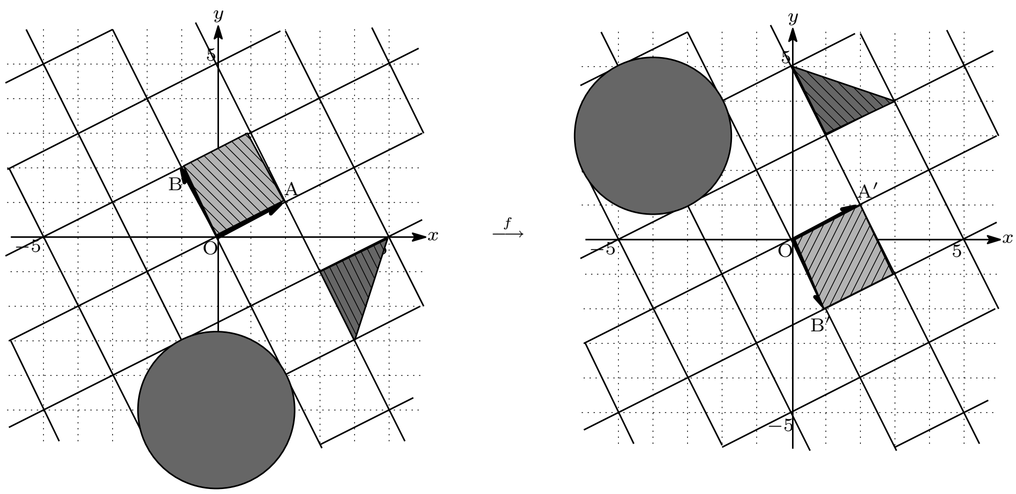


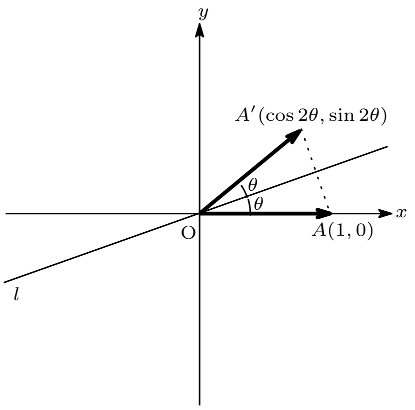
原点を通る直線 $l:\ y = \tan\theta$ に関する対称移動を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対し,

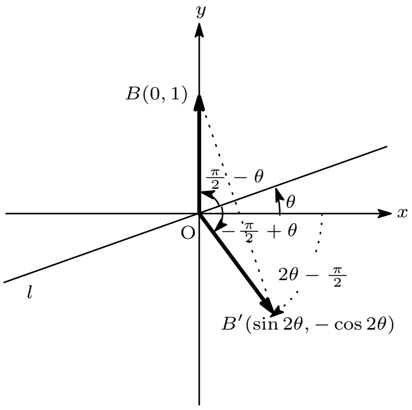
$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は１次変換である.

例 $l:\ y = \frac{1}{2}x$ に関する対称移動を f とする. l 上に点 A$(2,1)$, 原点を通り l と直行する直線:$y = -2x$ 上に 点 B$(-1,2)$ をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で **網の目** を作ると,「f は**網の目**を**網の目**に移し，原点を原点に移す」ので１次変換である.







f は一次変換となるから，f を表す行列を S，A$(1,0)$，B$(0,1)$ とし点 A,B の像を考えると，上図より $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}, \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と x 軸正方向とのなす角はそれぞれ，2θ, $2\theta-\frac{\pi}{2}$ となるので，[注2)]

$$S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta\\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

よって，**原点を通る**直線に関する対称移動を表す行列は次のようになる．

原点を通る直線に関する対称移動

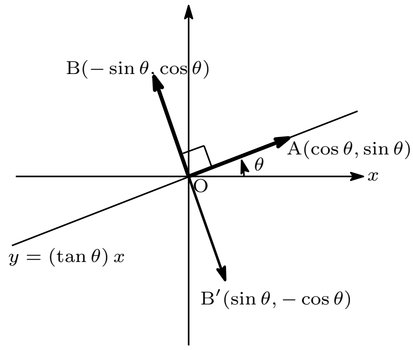
$y=\tan\theta$ に関する対称移動を表す行列を $S(\theta)$ とすると

$$S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

【別証明】対称移動を表す行列の別の導き方

$l: y=\tan\theta$ に関する対称移動を f, $A(\cos\theta,\sin\theta), B(-\sin\theta,\cos\theta)$ とすると，A は l 上にあるので f によって動かない．また $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は l と直交するので, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の像は $(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$. よって，

$$S\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$



まとめて書くと

$$S\begin{pmatrix}\cos\theta & \vdots & -\sin\theta\\ \sin\theta & \vdots & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \vdots & \sin\theta\\ \sin\theta & \vdots & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに

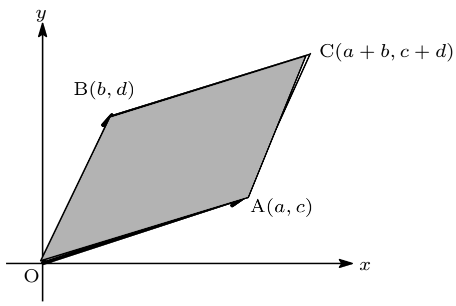
$$\begin{aligned}S&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

注2) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と x 軸正方向とのなす角は $\frac{\pi}{2}$，ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と x 軸正方向とのなす角を x とすると，l が $\angle\mathrm{BOB'}$ の 2 等分線になるので，$\frac{\pi}{2}$ と x の平均が θ になる．よって，$\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=\theta \Longleftrightarrow x=2\theta-\frac{\pi}{2}$．これからも $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と x 軸正方向とのなす角は求まる．

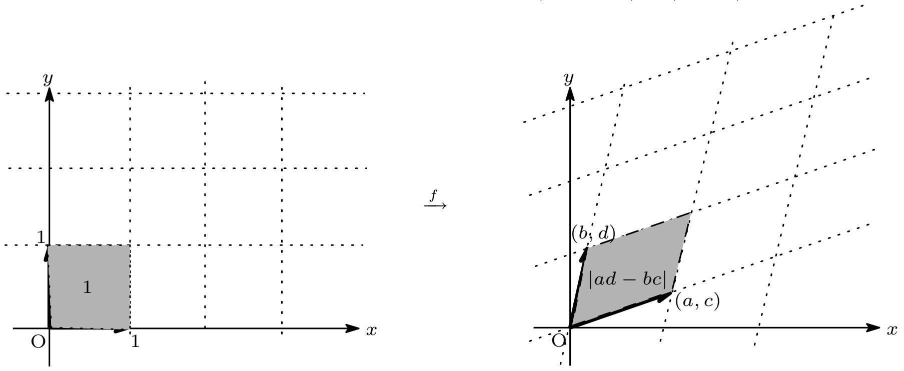
3 行列式と一次変換

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad - bc$ を A の**行列式**と呼び，$det\,A$, $\Delta(A)$ などと表します．
一般に $\mathrm{A}(a, c)$, $\mathrm{B}(b, d)$ のとき，平行四辺形 OACB の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} \cdot \sin\theta \\
&= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2} \\
&= \sqrt{(ad - bc)^2} \\
&= |ad - bc| \\
&= |detA|
\end{aligned}
$$



単位正方形を，4 点 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ を頂点とする正方形とします．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による一次変換は, $(1, 0)$ と $(0, 1)$ で張られる**網の目**を, (a, c) と (b, d) で張られる**網の目**に移す変換なので，単位正方形の面積が $|ad - bc| = |detA|$ 倍に移ります．一般に図形の面積は,「単位正方形何枚分の大きさか？」で測るので，**他の一般の図形も全て 元の面積の** $|ad - bc| = |detA|$ **倍に移ります．**



また,

「$ad - bc = 0 \longleftrightarrow$ ベクトル (a, c) と (b, d) で張られる図形の面積が 0」なので

行列式と平行

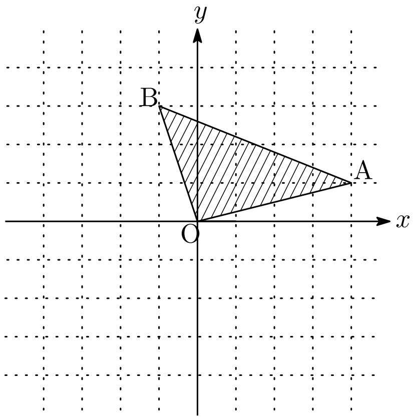
,$(a, c) \fallingdotseq (0, 0)$, かつ $(b, d) \fallingdotseq (0, 0)$ のとき，

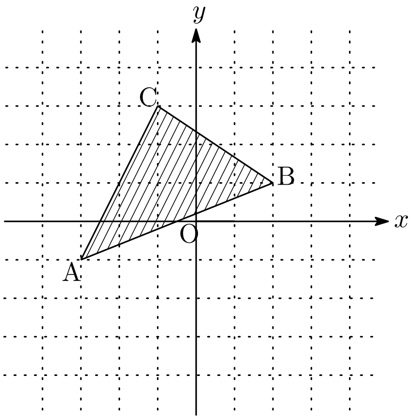
$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \iff a : b = c : d \iff ad - bc = 0$$

同様に，$(a, b) \fallingdotseq (0, 0)$, かつ $(b, d) \fallingdotseq (0, 0)$ のとき，

$$(a, b) // (c, d) \iff a : c = b : d \iff ad - bc = 0$$

問題 3-a (1) 左下図の三角形 OAB の面積を求めよ．
(2) 右下図の三角形 ABC の面積を求めよ．





問題 3-b $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される一次変換を f とする．円 $C : x^2 + y^2 = 1$ の A による像を C' とするとき，C' の囲む領域の面積を求めよ．

4 線形性を見る ($ad-bc=0$ の場合)

例題 4-a

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする.

(1) 全平面の f による像を求めよ.

(2) 直線 $x+y=1$ の f による像を求めよ.

(3) 直線 $l_1 : x+3y=-3,\ l_2 : x+3y=0,\ l_3 : x+3y=3$ の f による像を, それぞれ 求めよ.

解答

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+6y \\ x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+3y) \\ x+3y \end{pmatrix} = (x+3y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

(1)(x,y) が全平面上を動くとき, $x+3y$ は任意の実数値をとるので

$$\text{直線 } y=\frac{1}{2}x$$

(2) (x,y) が $x+y=1$ 上を動くとき, $x+3y$ は任意の実数値をとるので

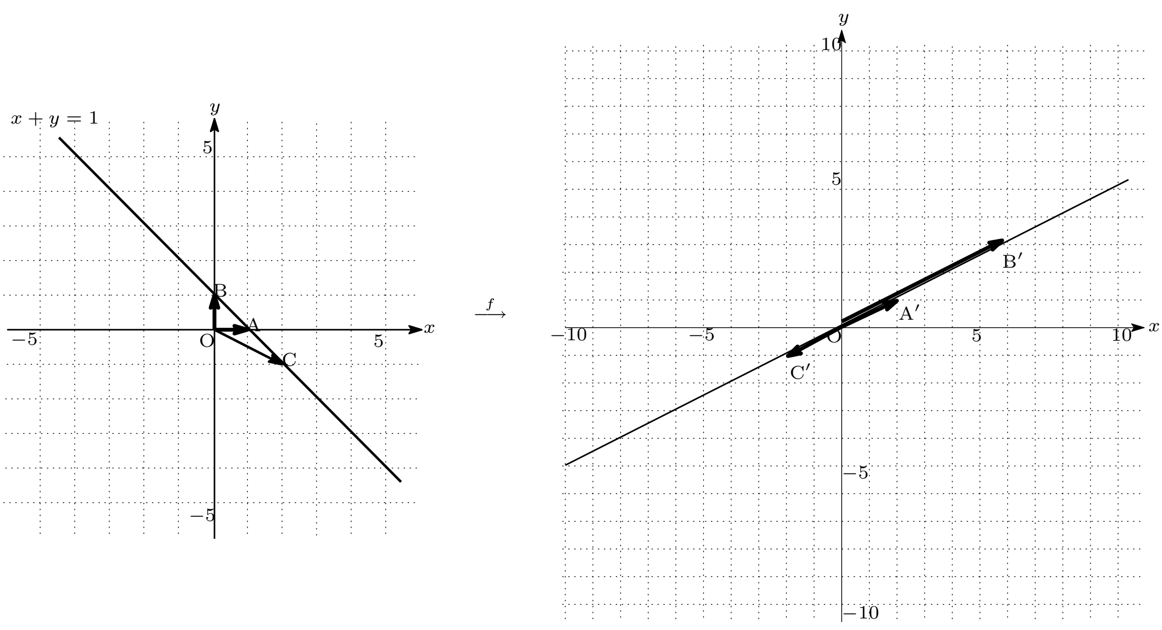
$$\text{直線 } y=\frac{1}{2}x$$

(3) (x,y) が l_1 :$x+3y=-3$ 上を動くとき, その像は ① より

$$\text{点 } (-6,-3)$$

同様にして, $l_2,\ l_3$ の像はそれぞれ

$$\text{点 } (0,0), \quad \text{点 } (6,3)$$



$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$A\fallingdotseq O$ において，

$$ad-bc=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \text{または}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{か} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{の一方が 零ベクトル}$$

よって $(a,c)\fallingdotseq(0,0)$ とすると $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (αは実数) とかける. このとき, 線形性より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\
&= (x+\alpha y)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，全平面は原点を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ の直線に移ります．また，直線 $x+\alpha y=k$(k は定数) は一点 (ka,kc) につぶれてしまいます．　$(b,d)\fallingdotseq(0,0)$ のときも同様です．即ち，

正則でない行列による図形の像

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($ad-bc=0, A\fallingdotseq O$) によって

(1) 平面全体は，原点を通る直線 m に移る．

(2) 直線の像は，m 全体 または m 上の一点になる．(元の直線の傾きによって決定される)

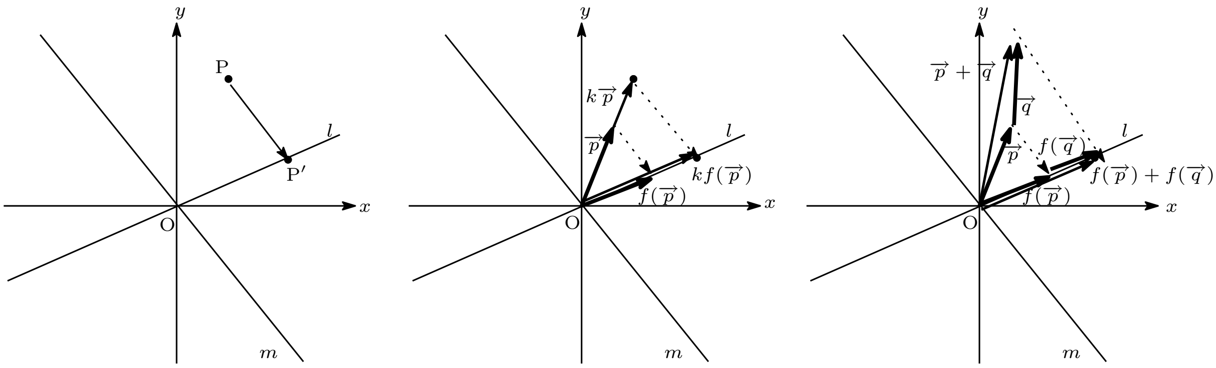
(3) 円，四角形などの図形の像は，m 上の線分になる．

問題 4-a $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．

(1) f によって，平面全体は，どのような図形に移るか？

(2) f によって，$l : y=ax+1$ が一点に移るとき，傾き a を求め, l の像を求めよ．

4.1 射影変換 ($ad-bc=0$ の代表例)



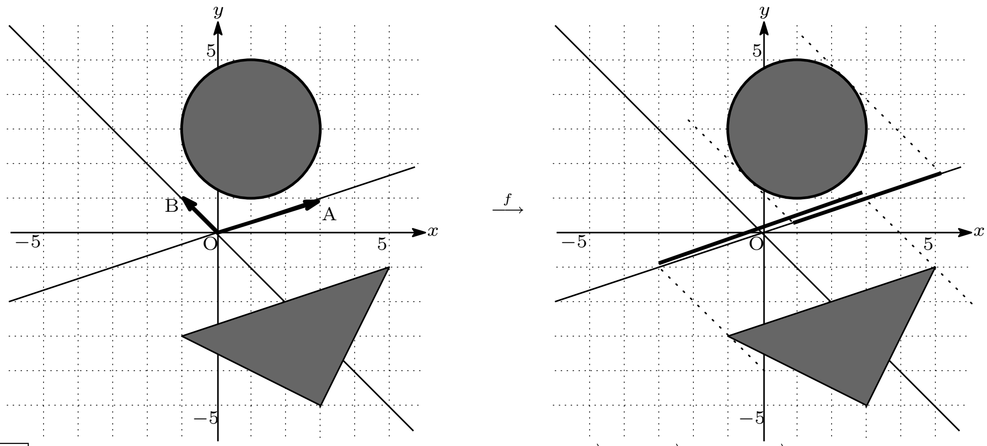
m, l を 互いに平行でない直線とするとき,「m に平行な 直線 l の上への**射影**」 というのは, 点 P に対し, P を通り m と平行な直線と直線 l の交点 P′ を対応させる変換のことです. 特に $l \perp m$ のとき,「直線 l の上への**正射影**」といいます. 上図より任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ と任意の実数 k に対し

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{kp}) = kf(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成立するので, f は 1 次変換です.

例題 4-b

直線 $m: y=-x$ に平行な 直線 $l: y=\frac{1}{3}x$ への射影を f とする．
(1)f を表す行列をもとめよ．
(2) f によって，図の三角形や円盤はどのような図形に移るか？右の方眼紙に書き込め．



解答 (1) A(3,1),B(−1,1) とする．A は l 上にあるので，$f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$．一方 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は m 上にあるので，$f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{0}$．
よって f を表す行列を P とおくと，

$$P\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\qquad P\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdots(*)\qquad\cdots(\text{答})$$

まとめて書くと

$$P\begin{pmatrix}3 & \vdots & -1\\1 & \vdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & \vdots & 0\\1 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

よって

$$P=\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\qquad\cdots(\text{答})$$

(2) $\mathrm{P}(x,y)$ の像を $\mathrm{P}'(x',y')$ とおくと，(1) より，

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{x+y}{4}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\qquad\cdots①$$

まず P が円内と円周上を動くとき，$x+y$ の取りえる範囲を求める．$x+y=k$ とおくと，この直線と円が共有点をもたないといけないから，「中心 $(1,3)$ との距離が 2 以下」．よって

$$\frac{|1+3-k|}{\sqrt{2}}\leqq 2\longleftrightarrow |k-4|\leqq 2\sqrt{2}\longleftrightarrow 4-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 4+2\sqrt{2}$$

① より「$x'=\frac{3}{4}(x+y)$」だから，円の像は

$$y=\frac{1}{3}x\quad\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\leqq x\leqq 3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

同様にして，三角形の像も求まるが，直接「目で」求めることもできる．
【注】(*) は，$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ が固有値 1 の固有ベクトル，$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ が固有値 0 の固有ベクトル であることを表している．

5　【発展】固有値と固有ベクトル

固有値と固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ 但し\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有ベクトル，k をその固有値という．すなわち固有ベクトルとは，A によって方向の変わらない（長さが 0 でない) ベクトルである．固有ベクトルは A の不動直線の方向ベクトルになる．

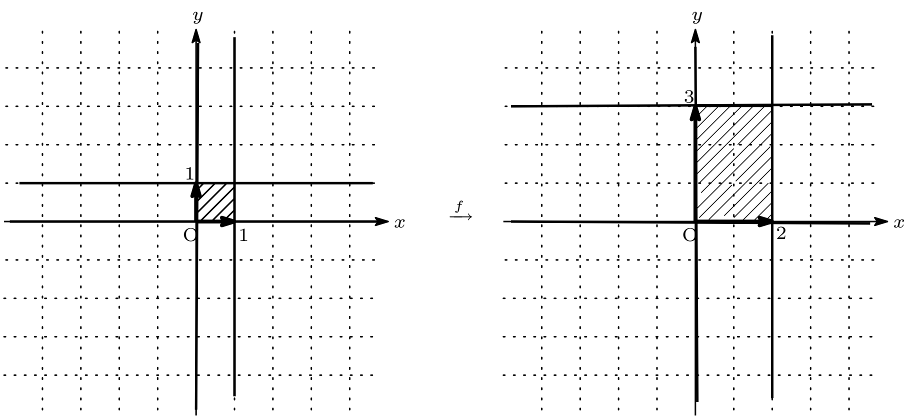
例 5-a

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，固有値はそれぞれ 2 と 3

(2)A の不動直線は 「$x = 0$」と 「$y = 0$」の 2 本.



固有値が 2 と 3 の時は，**不動直線は 原点を必ず通る．**

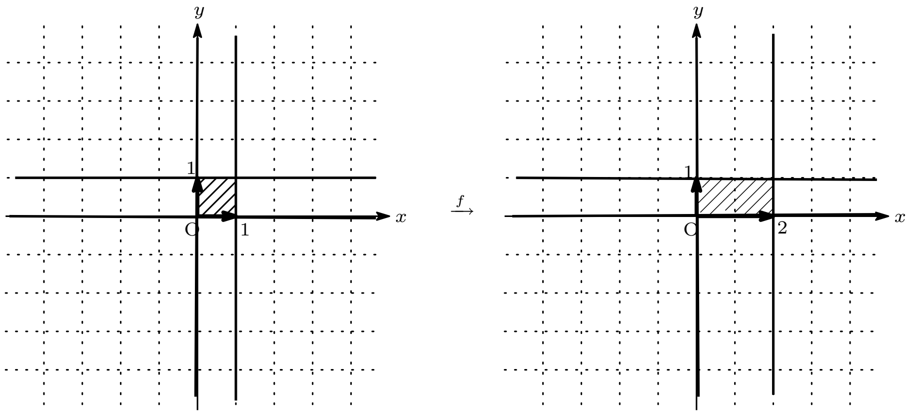
例 5-b

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，固有値はそれぞれ 2 と 1

(2)A の不動直線は 「$x = 0$」と 「$y = k$ (k は任意の実数)」



固有値が 2 と 1 の時は，**原点を通らない不動直線が（無数に）存在する．**
即ち, **原点を通らない不動直線が存在するのは 固有値が 1 の固有ベクトルが存在する時である．**

問題 5-a

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

【解 1】(固有値から先に求める方法)　固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

ここで $\left(\begin{smallmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{smallmatrix}\right)$ が逆行列を持てば, ① より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり矛盾する. よって

$$det\begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix} = (2-k)(1-k) - 1\cdot 6 = k^2 - 3k - 4 = 0. \qquad \therefore k = -1, k = 4 \qquad \cdots ②$$

$k = -1$ **のとき** ① より

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$k = 4$ **のとき** ① より

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上から A の固有値は -1 と 4 となる. また対応する固有ベクトルは それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (\text{固有値は} -1) \text{ と } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (\text{固有値は } 4)$$

注3)

注3)「固有ベクトル」といえば, 通常は 定数倍を付けずに 1 つの例をあげればよい.

固有方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ 但し \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq\!\!\!\!/ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つとき

$$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この行列が逆行列を持つと $x = y = 0$ となり矛盾するので

$$det\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} = (a-k)(d-k) - bc = k^2 - (a+d)k + (ad-bc) = 0 \qquad \cdots(*)$$

となることが必要である. (実は十分でもある.)

【解 2】(固有ベクトルを先に求める方法)

「$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a:b = c:d \Longleftrightarrow ad - bc = 0 \qquad (a^2 + c^2 \neq 0$ かつ $b^2 + d^2 \neq 0$ のとき$)$」を用いる.

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 6x+y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

平行条件より

$$(2x+y):(6x+y) = x:y \Longleftrightarrow (2x+y)y = (6x+y)x \Longleftrightarrow 6x^2 - xy - y^2 = (3x+y)(2x-y) = 0$$

ゆえに

$$y = -3x \text{ または } y = 2x$$

すなわち固有ベクトルは

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ と } \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

さらに

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だから $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ の固有値は　それぞれ (-1) と 4 になる.

問題 5-a

$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ で表される一次変換を f とする． f による 直線 $l : y = mx$ の像が 直線 l となった．このとき m の値を求めよ．(注; このとき l を f による**不動直線**と言います.)

問題 5-b

次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

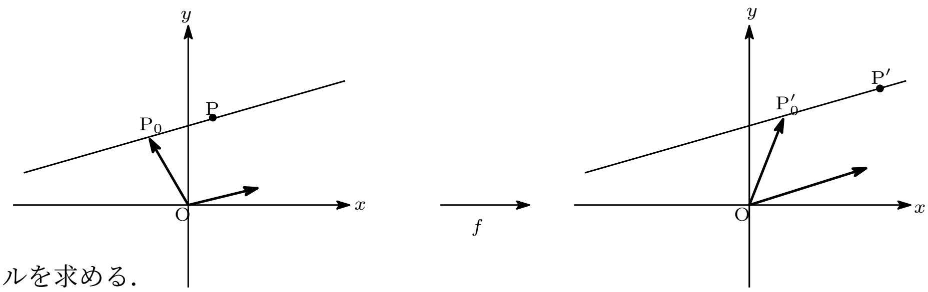
(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

原点を通らない不動直線を求めるには「2 点の像」より「1 点と方向ベクトル」に注目した方がいいです．

$$l \text{ は } A \text{ の不動直線} \longleftrightarrow \begin{cases} l \text{ の方向ベクトルは}, A \text{ の固有値が } 0 \text{ でない固有ベクトル}, \text{かつ} \\ l \text{ 上の } 1 \text{ 点が } A \text{ によって } l \text{ 上に移る} \end{cases}$$

例題 5-a

行列 $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ によって表される一次変換を f とする．
平面上の直線のうち f によって動かないものを全て求めよ．



(step1) 方向ベクトルを求める．
不動直線を l. l の方向ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすると，$\overrightarrow{n}$ は

$$A\overrightarrow{n} = k\overrightarrow{n}, \quad (\overrightarrow{n} \fallingdotseq \overrightarrow{0} \text{かつ } A\overrightarrow{n} \fallingdotseq \overrightarrow{0})$$

をみたす．$\overrightarrow{n} = (a, b)$ とすると

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4a+2b \\ a+5b \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\therefore b(4a+2b) = a(a+5b) \iff a^2 + ab - 2b^2 = (a+2b)(a-b) = 0 \iff a = -2b, a = b$$

ゆえに l の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ または } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これらは $A\overrightarrow{n} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ をみたす．よって方向ベクトルとして適する．

(step2) さらに「l 上の一点 P_0 の像が l 上にある」条件を求めると良い．l の傾きは $-\frac{1}{2}$ または 1 だから，l は $y = mx + n$ ($m = -\frac{1}{2}$ または $m = 1$) とおける．このとき $\mathrm{P}_0(0, n)$ の像は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2n \\ 5n \end{pmatrix}$$

これが l 上にある条件は

$$\frac{5n}{3} = m \cdot \frac{2n}{3} + n \iff \frac{2}{3}n(1-m) = 0 \iff n = 0 \text{ または } m = 1$$

よって求める直線は

$$y = -\frac{1}{2}x \text{ または } y = x + n \ (n \text{ は任意の実数}) \qquad \cdots(\text{答})$$

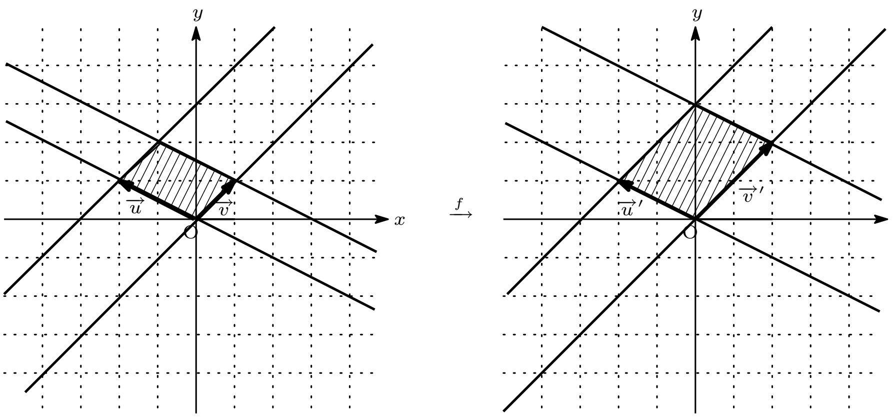
Comment

$$A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

即ち $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とおくと

$$A\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u},\qquad A\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{v}$$

よって $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ で網の目を作ると，f による変換は,「$\overrightarrow{u}$ 方向への 1 倍の拡大」と「$\overrightarrow{v}$ 方向への 2 倍の拡大」 を表す．ゆえに，下図より，$\overrightarrow{v}$ に平行な任意の直線は f によって動かないことが分かる．一方, $\overrightarrow{u}$ に平行で原点を通らない直線は原点からの距離が 2 倍になるので f によって動く．



問題 5-c

行列 $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\end{pmatrix}$ によって表される一次変換を f とする．

(1) 原点を通る直線のうち f によって動かないものを全て求めよ．

(2) 平面上の直線のうち f によって動かないものを全て求めよ．

6 【発展】基底の変換

基底の変換

$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ は 1 次独立とする．行列 A の表す一次変換 f による $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ の像が

$$\begin{cases} A\overrightarrow{u} = p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} \\ A\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

となったとする．(平面ベクトルは必ず $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ で表される.) まとめて

$$A(\overrightarrow{u} \ \ \overrightarrow{v}) = (A\overrightarrow{u} \ \ A\overrightarrow{v}) = (p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} \ \ r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \ \ \overrightarrow{v}) \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \qquad \cdots \text{【注】}$$

ゆえに $P = (\overrightarrow{u} \ \ \overrightarrow{v})$ とおくと,

$$AP = P \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}. \qquad \therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

このように $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ **は，$\boldsymbol{A}$ の表す一次変換f を, $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ で表した行列となる．**

すなわち $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のときは,

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \binom{1}{0}\text{の像} & \binom{0}{1}\text{の像} \end{matrix} \end{array}$$

となり，$\boldsymbol{A}$ **の第 1 列は** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **の像を, 第 2 列は** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **の像を表す．**

一方 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，$P = (\overrightarrow{u} \ \ \overrightarrow{v})$ のときは,

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} p \\ r \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} q \\ s \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \overrightarrow{u}\text{の像} & \overrightarrow{v}\text{の像} \end{matrix} \end{array}$$

となり，$\boldsymbol{P^{-1}AP}$ **の第 1 列は** $\overrightarrow{u}$ **の像を, 第 2 列は** $\overrightarrow{v}$ **の像を表す．**

【注】 $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$(p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} \ \ r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} pu_1 + qv_1 & ru_1 + sv_1 \\ pu_2 + qv_2 & ru_2 + sv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = (\overrightarrow{u} \ \ \overrightarrow{v}) \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

6.1 固有ベクトルが 2 個ある時

対角化と固有ベクトル

行列 A の 2 個の固有ベクトルを $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$. その固有値を それぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると,

$$A\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{u},\quad A\overrightarrow{v}=\beta\overrightarrow{v} \qquad \cdots ①$$

2 式をまとめて

$$A\,(\overrightarrow{u}\ \ \overrightarrow{v})=(\alpha\overrightarrow{u}\ \ \beta\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u}\ \ \overrightarrow{v})\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

ゆえに $P=(\overrightarrow{u}\ \ \overrightarrow{v})=\begin{pmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{pmatrix}$ とすると

$$AP=P\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}.\qquad \therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix} \qquad \cdots(*)$$

これを A の**標準形**といい，特に $A=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$ のような標準形[注4] に直すことを **対角化** といいます.

例 5-a の変換は $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, **例題 5-b** の変換は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ だから，**本質的には同じ一次変換である.** このように標準形が同じになる一次変換は　本質的には同じ一次変換となる.

【注】 ①,② は成分を使うと次のようになる.

$$A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

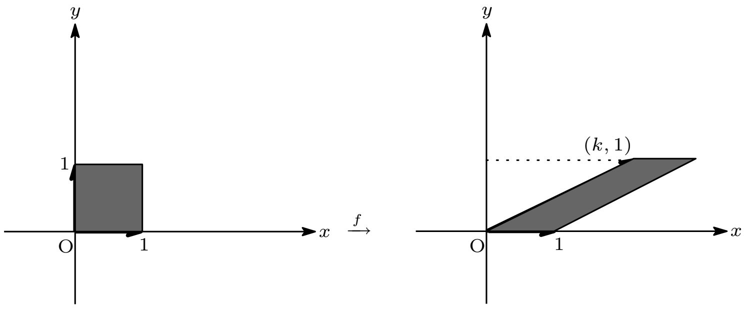
2 式をまとめて

$$A\begin{pmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha u_1&\beta v_1\\\alpha u_2&\beta v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

注4) 「$(1,2),(2,1)$ 成分が 0 の行列」です．例えば $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ などは対角化されています．しかし $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ などは対角化されていません.

6.2　固有ベクトルが 1 個の時

(イ) のタイプの代表例は,「ずらし変換」$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$ です．これは x 軸方向への「ずらし」を表しています．[注5] 固有ベクトルが 1 個の行列は, 適当な P をとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と直せることが知られています.



固有方程式は,

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

よって固有値は $x = 1$ (重解) です．さらに

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに 固有ベクトルは 1 つしかなく，(これは図からも明らかですが,)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.3　固有ベクトルが 0 個の時

固有ベクトルは常にあるとは限りません．例えば「回転を表す行列」は固有ベクトルを持ちません．[注6]
$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有方程式は,

$$x^2 - 2\cos\theta + 1 = 0$$

ゆえに

$$x = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta + \sqrt{-\sin^2\theta}$$

ゆえに，$\sin\theta = 0$ $(\theta = 0, \pi)$ のとき以外は固有ベクトルはありません.

[注5] y 軸方向への「ずらし」を表す行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$ です.

[注6] これは実数の範囲での話しです．大学レベルでは虚数成分の固有ベクトルも考えます.

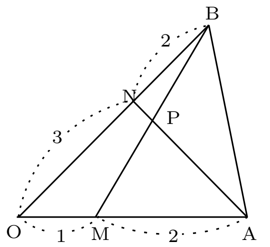
7 【補充】

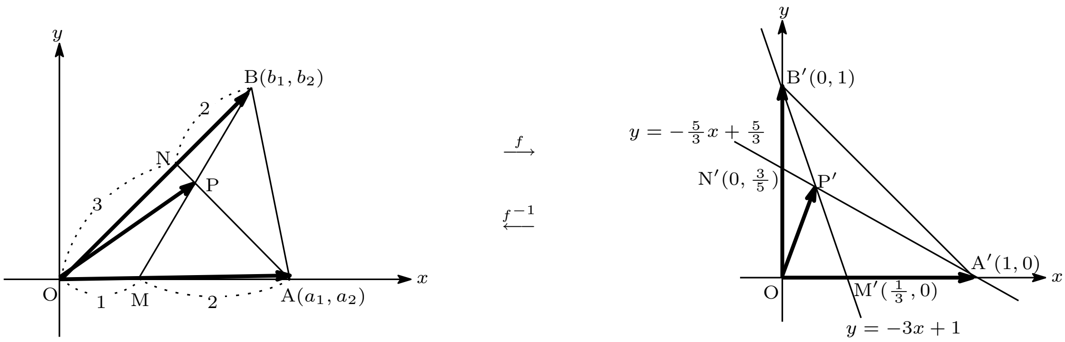
ベクトルの問題への応用 線形性を利用すると，次の問題をすぐ解くことができます.

例題

$\triangle$OAB で，線分 OA を $1:2$ に内分する点を M, 線分 OB を $3:2$ に内分する点を N とし，直線 AN と直線 BM の交点を P とする.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ.





点 O が原点にくるように座標系をとったとき，点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, 点 $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ となったとする．このとき，f を 点 A が $\mathrm{A}'(1,0)$, 点 B が $\mathrm{B}'(0,1)$ になるような 1 次変換とすると, 線形性より M の像 M′ は 線分 OA′ を $1:2$ に内分する点, N の像 N′ は 線分 OB′ を $3:2$ に内分する点となるので, M′,N′ の成分は,

$$\mathrm{M}'\left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad \mathrm{N}'\left(0, \frac{3}{5}\right)$$

また 1 次変換により, 直線は直線に，交点は交点に移るので, P は直線 A′N′ と 直線 B′M′ の交点 P′ にうつる．ここで,

$$\begin{cases} \mathrm{AN}: & y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} \\ \mathrm{BM}: & y = -3x + 1 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$\mathrm{P'}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}'$$

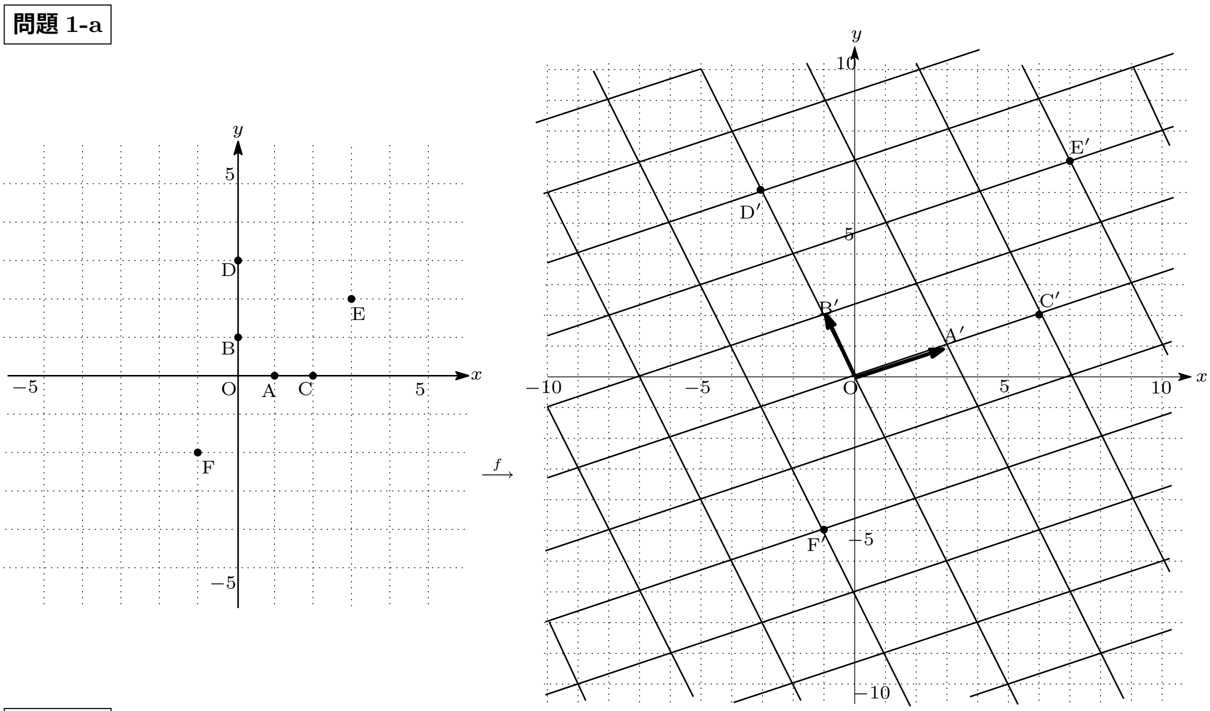
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立なので，f は逆変換 f^{-1} を持つ．よって，f^{-1} の線形性より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots(答)$$

【お土産】 この授業で使った教材やソフト（マフィン君) は, 私のサイト mixedmoss.com または，オンラインソフトのサイトである www.vector.co.jp に飛んで 「マフィン君」を「キーワード検索」して下さい.

8　【解答】

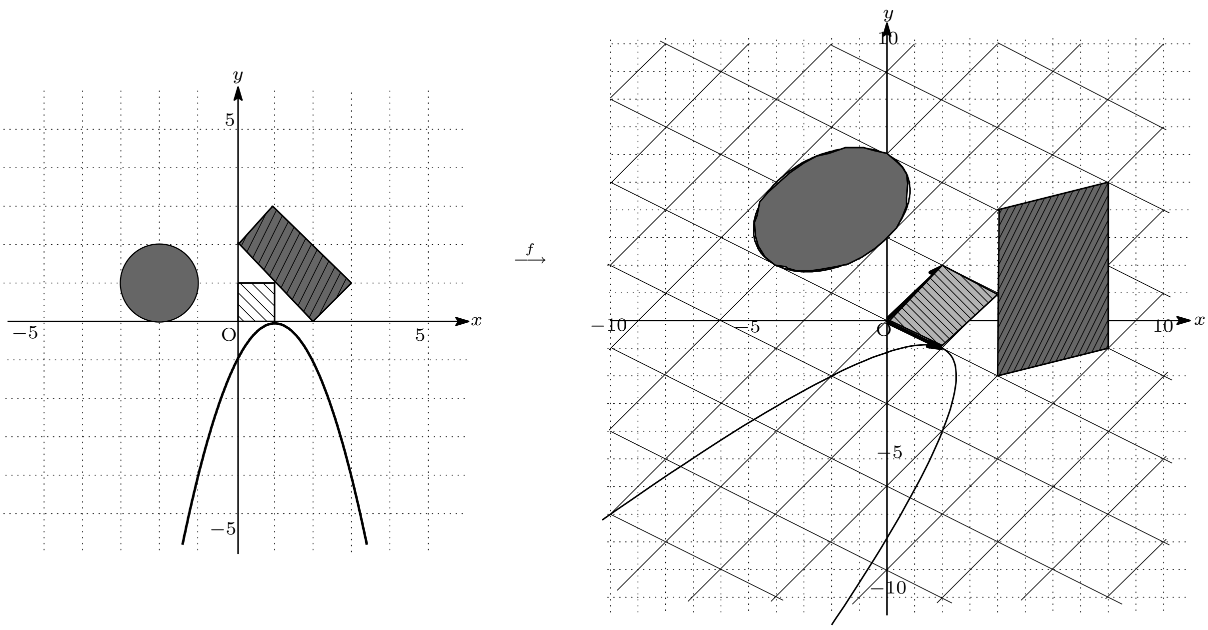
問題 1-a



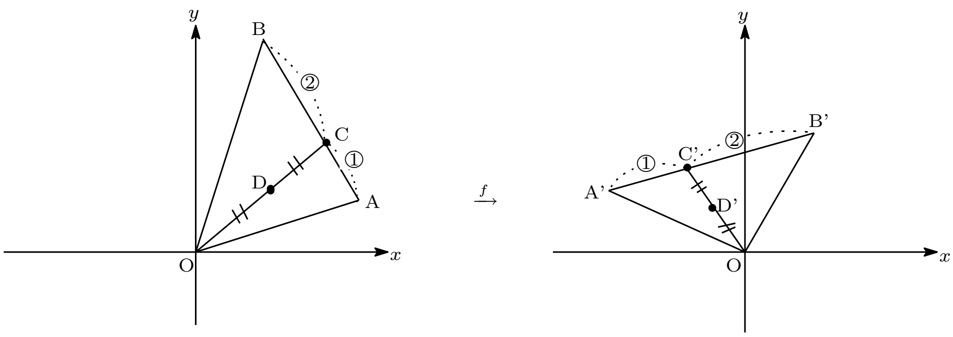
問題 2-a　$\mathrm{A}'(3,1), \mathrm{B}'(1,2)$ だから，求める行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})$$

問題 1-b



問題 1-c 「一次変換は 同一直線上にある点の比を変えない」ので,

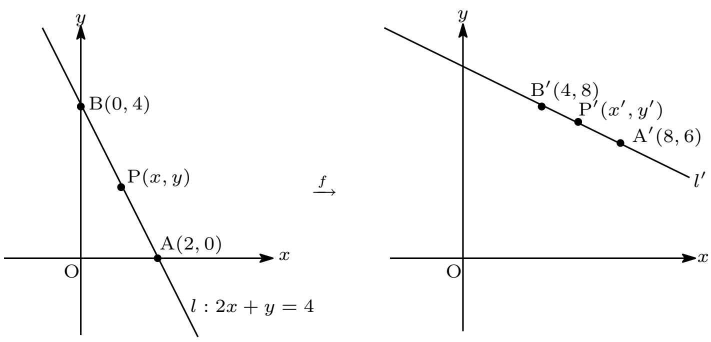


問題 1-d 一次変換は，平行な 2 直線を平行な 2 直線に移し，同一直線上にある点の比は保存する．故に **図 3**

問題 1-e **【解 1】2 点の像に注目する**

$2x+y=4$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(2,0)$,$\mathrm{B}(0,4)$ をとる．f による像はそれぞれ $\mathrm{A}'(8,6)$ と $\mathrm{B}'(4,8)$．「逆行列を持つ行列による一次変換は，直線を直線に移す」ので，l の像は $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ となる．すなわち，

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-8)\longleftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+10$$



【解 2】逆変換を利用する

l の点 $\mathrm{P}(x,y)$ の像を $\mathrm{P}'(x',y')$ とすると,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって

$$x=\frac{2x'-y'}{5},\qquad y=\frac{-3x'+4y'}{5}$$

$2x+y=4$ へ代入して

$$2\times\frac{2x'-y'}{5}+\frac{-3x'+4y'}{5}=4\longleftrightarrow x'+2y'=20$$

ゆえに l' の式は

$$x+2y=20$$

問題 1-f **【解】1 点と方向ベクトルの像に注目する.** l 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ の像を $\mathrm{P}'(x',y')$ とすると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって l' の媒介変数表示は,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

問題 2-a

$$\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

よってこの一次変換は, 原点の周りの $\frac{\pi}{3}$ の回転と，原点を中心とする 2 倍の拡大の合成となる．よって円は円に移り，その中心は

$$\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

また半径は 2 倍となるから，求める像は

$$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$$

問題 3-a (1) $\mathrm{A}(4,1)$,$\mathrm{B}(-1,3)$ だから,

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|4\times3-1\times(-1)\right|=\frac{13}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ だから,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|5\times4-2\times2\right|=8 \qquad \cdots(\text{答})$$

問題 3-b

$$detA=\left|1\times4-(-1)\times2\right|=6$$

よって A は対応する図形の面積を 6 倍にする．一方，円 C の囲む面積は π だから，C' の囲む面積は

$$6\pi$$

$\boxed{\textbf{問題 4-a}}$ $\mathrm{P}(x, y)$ の像を $\mathrm{P}'(x', y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots①$$

(1) 平面全体の像は,

$$y = -\frac{1}{3}x \qquad \cdots(答)$$

(2)f によって，一点に移される直線は $x + 2y = k$ (k は一定の実数) であるから，求める a は

$$a = -\frac{1}{2} \qquad \cdots(答)$$

この時 l は

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \longleftrightarrow x + 2y = 2$$

ゆえに ① より, l の像は

$$点\ (6, -2) \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{\textbf{問題 5-b}}$ (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ [固有値\ 5], \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ [固有値\ 2]$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\ [固有値\ 0], \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\ [固有値\ (-4)]$$

$\boxed{\textbf{問題 5-c}}$ (1)

$$y = x,\ y = -\frac{1}{2}x$$

(2)

$$y = x,\ y = -\frac{1}{2}x + n\ (n\ は任意)$$