目で見る行列・1次変換

河合塾 数学科　生越(おごせ) 茂樹(しげき)

2010年3月8日

目 次

1 線型性の大雑把な理解

$F=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す一次変換による像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=F\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=xF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+yF\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

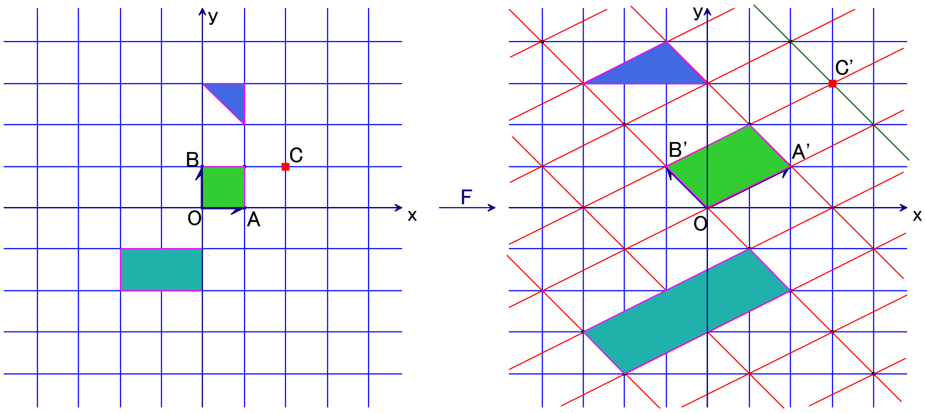
即ち

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

直感的にいうと，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc \fallingdotseq 0)$ による一次変換は，$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **で作られた網の目を，**$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **で作られる網の目に変えること**.

$\boxed{\textbf{例}}$ $F=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ による一次変換は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で作られた**網の目**を，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で作られる**網の目**に変える.

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\xrightarrow{F}\overrightarrow{\mathrm{OC}'}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$$



正則 $(ad-bc \fallingdotseq 0)$ な 1 次変換と図形

正則な 1 次変換によって

(1) 直線は直線に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．

(2) 平行な直線は平行な直線に移る．平行でない直線はやはり平行でない直線に移る．

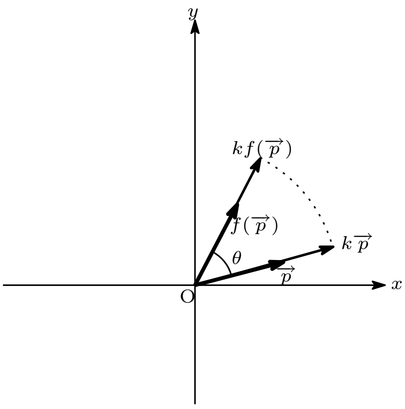
(3) 線分 AB を $m:n$ に内分 (または外分) する点は，線分 A$'$B$'$ を $m:n$ に内分 (または外分) する点に移る．

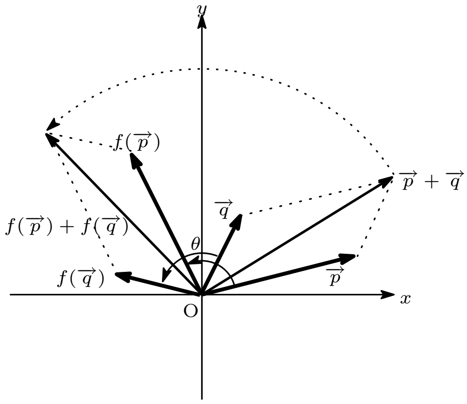
Comment

授業では，実際に生徒に紙上で **網の目**を描かせ，変換させます．その後 同じ変換を PC 上で見せます．時間がないので，生徒には 1〜2 枚ほどしか描かせる事はできませんが，PC 上では 三角形，四角形，円，写真, フリーハンドで描いた図, グラフなどを変換して見せます．PC 上で図を見せながら，一次変換の特徴も説明します.

2 回転を表す行列，回転 ∘ 拡大 を表す行列

2.1 原点中心の回転





原点中心の回転を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対し,

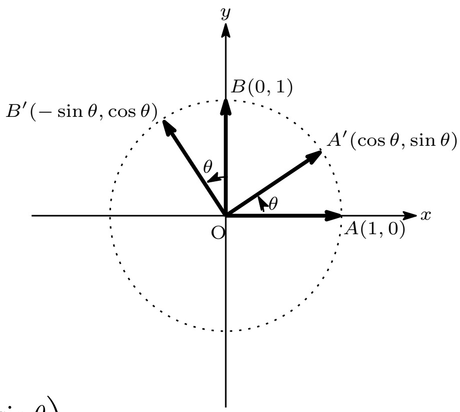
$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は１次変換である.

ゆえに, f を表す行列を R とすると, 左図より

$$R\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(90^\circ+\theta)\\ \sin(90^\circ+\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$



よって原点中心の θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ とすると

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

直感的にいうと，$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ で作られる**網の目**を，$e_1' = (\cos\theta,\sin\theta), e_2' = (-\sin\theta,\cos\theta)$ で作られる**網の目**に変換するので，f は１次変換である.

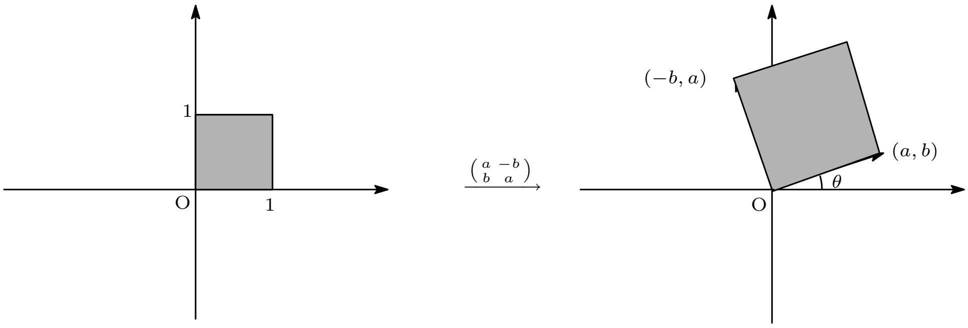
2.2　回転 ∘ 拡大

$a^2+b^2 \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

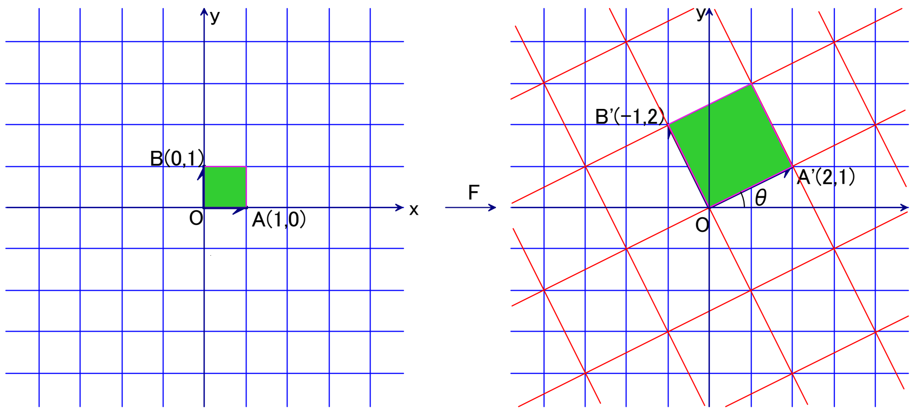
$$\left(\text{ただし}, \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

よって，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は,「原点中心の回転」と「原点中心の相似変換」の合成を表す行列である．



$\boxed{\textbf{例}}$ $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると，$F = \sqrt{5}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ゆえに，F は,「原点の周りに θ $\left(\text{但し} \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 回転し，原点からの距離を $\sqrt{5}$ 倍に拡大する 1 次変換」を表す．



Comment

図を使えば,「回転 ∘ 拡大を表す行列」の方が 「回転を表す行列」より簡単と思うので（三角関数が苦手な生徒も多いので), 前者の方から先に教えています．また，アニメーションも活用しています．このとき，幾何図形だけでなく写真などもアニメーションします．

3　固有値，固有ベクトル，標準化

固有値と固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{但し}\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有ベクトル，k をその固有値という．即ち 固有ベクトルとは，A によって方向の変わらない（$\overrightarrow{0}$ でない）ベクトルである．k は 次の方程式 (固有方程式) の解となる．

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0 \cdots (*)$$

3.1　実固有ベクトルが 2 個のとき (固有方程式が異なる 2 実数解を持つか $A = kE$ のとき)

例 1 (固有値は 2&3)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A の表す一次変換を f とする．

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

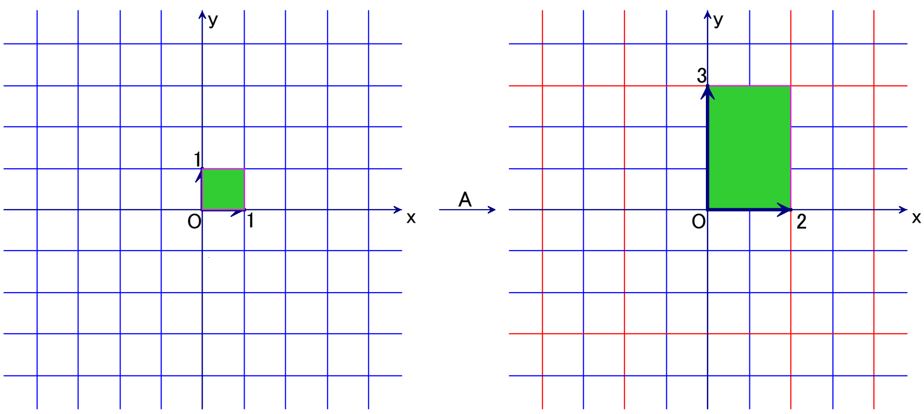
f の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ [\text{固有値は } 2]\ \text{と}\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ [\text{固有値は } 3]$$

f の不動直線は

$$x = 0, \quad y = 0$$

f の不動直線は「固有ベクトルを方向ベクトルにもち，**原点を通る**直線」．



例 2 (固有値は 2&1)

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ によって表される一次変換を f とする．

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

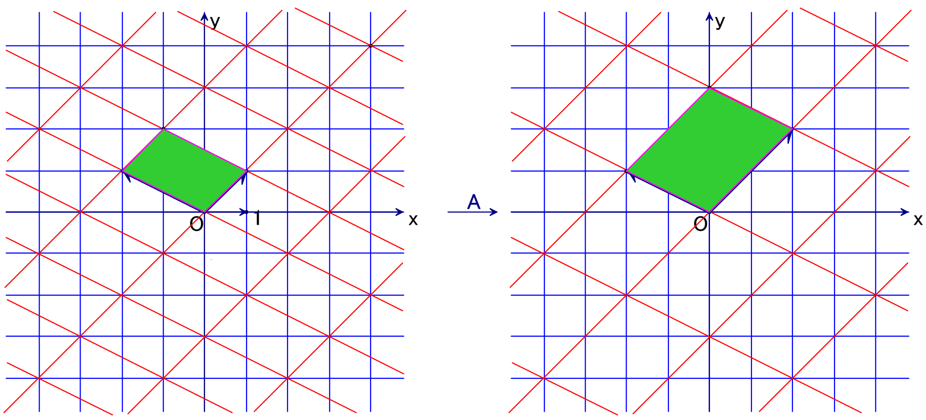
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ [固有値は 2] と } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ [固有値は 1]}$$

不動直線は

$$y = x + k \ (k \text{ は任意の実数}), \quad y = -\frac{1}{2}x$$

即ち **原点を通らない**不動直線 が存在する．



Comment

このことは,「$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$」でなく，固有ベクトルの「$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$」で **網の目** を作って変換すると一目瞭然です． また，固有ベクトルを使って アニメーションもします．

3.1.1　標準形 (実固有ベクトルが 2 個あるとき)

標準形 (その１)

行列 A の一次独立な固有ベクトルを $\vec{e_1}$ と $\vec{e_2}$. その固有値を それぞれ α, β とすると，

$$A\vec{e_1} = \alpha\vec{e_1}, \quad A\vec{e_2} = \beta\vec{e_2}$$

この 2 式をまとめて 変形すると

$$A\,(\vec{e_1}\ \vec{e_2}) = (\alpha\vec{e_1}\ \beta\vec{e_2}) = (\vec{e_1}\ \vec{e_2})\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

ゆえに $P = (\vec{e_1}\ \vec{e_2})$ とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \qquad \cdots(*)$$

A の表す一次変換を f とすると，$P^{-1}AP$ は, $\vec{e_1}$ と$\vec{e_2}$ を 基底にとったときに，f を表す行列となる.

例 2 の続き $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ のとき,「$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$,$\vec{e_2} = \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$」 とおくと，

$$A\vec{e_1} = 2\cdot\vec{e_1},\ A\vec{e_2} = 1\cdot\vec{e_2} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A\vec{e_1} & = & 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2}\\ A\vec{e_2} & = & 0\vec{e_1} + 1\vec{e_2}\end{array}\right. \longleftrightarrow A\,(\vec{e_1}\ \vec{e_2}) = (\vec{e_1}\ \vec{e_2})\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ゆえに $P = (\vec{e_1}\ \vec{e_2})$ とすると

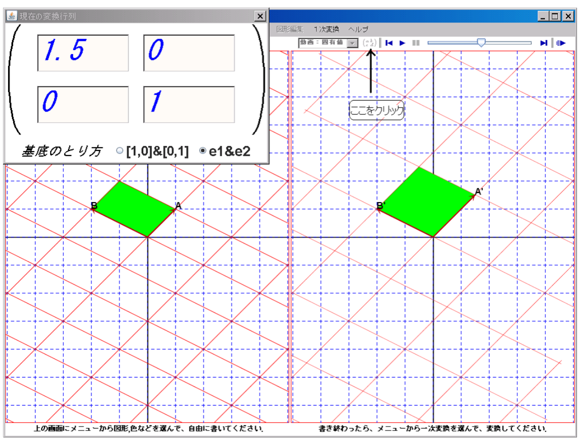
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

右辺は 「f による $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ の像を，$\vec{e_1}$と$\vec{e_2}$ で表した時の係数」を変換する行列．即ち，

$$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \vec{e_1} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} = 2\vec{e_1} + 0\vec{e_2}, \qquad \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \vec{e_2} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 0\vec{e_1} + 1\vec{e_2}$$

Comment

「$P^{-1}AP$」の変化を アニメーションで見れます．それには「ツールバー」の $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ をクリックします．



3.2 実固有ベクトルが 1 個のとき

例 1 (固有値は 1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，固有方程式は

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$$

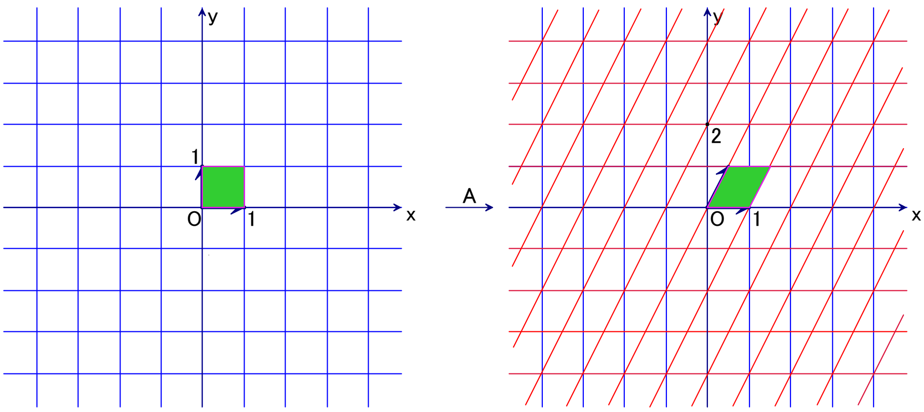
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{[固有値は 1]}$$

A の不動直線は

$$y = k \ (k \text{ は任意の実数})$$

原点を通らない不動直線が存在する．



例 2 (固有値は 2)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，固有方程式は

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

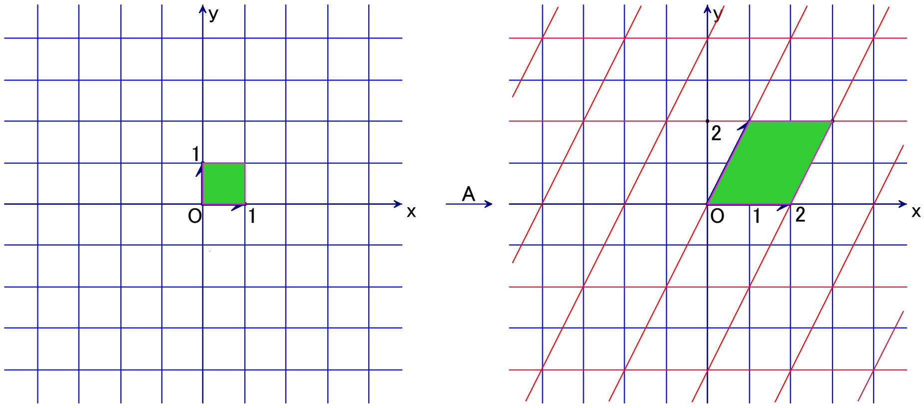
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{[固有値は 2]}$$

A の不動直線は

$$y = 0$$

不動直線は **原点を通る**．(次頁の図参照)



3.2.1　標準形 (実固有ベクトルが 1 個のとき)

標準形 (その 2)

固有値 α に対する固有ベクトルと　一次独立な任意のベクトル $\overrightarrow{e_2}$ をとり

$$\overrightarrow{e_1} = (A - \alpha E)\overrightarrow{e_2} \qquad \cdots ①$$

とする．このとき，$P = (\overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{e_2})$ とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

【証明】「$(A-\alpha E)\overrightarrow{e_1} = (A-\alpha E)^2\overrightarrow{e_2} = O\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$」より，$\overrightarrow{e_1}$ は A の固有ベクトルとなる．① と併せ

$$\begin{cases} A\overrightarrow{e_1} = \alpha\overrightarrow{e_1} \\ A\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} + \alpha\overrightarrow{e_2} \end{cases} \longleftrightarrow A\,(\overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{e_2}) = (\overrightarrow{e_1}\ \overrightarrow{e_2})\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \longleftrightarrow AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

3.3　実固有ベクトルが 0 個のとき

標準形 (その 3)

固有方程式の解を $p \pm qi$ (p, q 実数), $p + qi$ に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} + i\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ の成分は実数) とする．このとき，$P = (\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v})$ とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

【証明】固有ベクトルの定義より，

$$A\overrightarrow{x} = (p+qi)\overrightarrow{x} \longleftrightarrow A(\overrightarrow{v} + i\overrightarrow{u}) = (p+qi)(\overrightarrow{v} + i\overrightarrow{u})$$

上の式の虚部と実部を比べて

$$\begin{cases} A\overrightarrow{u} = p\overrightarrow{u} + q\overrightarrow{v} \\ A\overrightarrow{v} = -q\overrightarrow{u} + p\overrightarrow{v} \end{cases} \longleftrightarrow A\,(\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v})\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \longleftrightarrow AP = P\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$$

4 入試問題

> 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面上の一次変換を f とする．原点以外のある点 Q が f によって Q 自身に移されるならば，原点を通らない f の不動直線が存在する事を証明せよ．ただし $ad-bc\fallingdotseq 0$ とする． (東大 S57 改)

【証明】$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{u}$ とおく．

(i)「$A\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ が一次独立」となるベクトル $\overrightarrow{v}$ が存在した時．

$k=0$ とすると，$A\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ となり $ad-bc\fallingdotseq 0$ と矛盾．よって，$k\fallingdotseq 0$. ここで「$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$ (t は媒介変数)」で表される直線を l とすると, l は原点を通らない．また,

$$A\overrightarrow{OX}=A\left(\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}\right)=A\overrightarrow{u}+tA\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+tk\overrightarrow{v}$$

X の像も l 上にあり, t が全ての実数を取る時 kt も全ての実数を取るので, l の像は l となる．(左下図)

(ii)「$A\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ が一次独立」となるベクトル $\overrightarrow{v}$ が存在しない時．

$\overrightarrow{u}$ と一次独立な任意の定ベクトルを $\overrightarrow{v}$ とし,

$$\begin{cases} A\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{u} \\ A\overrightarrow{v} &= \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v} \end{cases}$$

となったとする．仮定より「$\alpha\fallingdotseq 0$」. ここで「$\overrightarrow{\omega}=\alpha\overrightarrow{u}+(\beta-1)\overrightarrow{v}$」とおくと

$$A\overrightarrow{\omega}=A\left\{\alpha\overrightarrow{u}+(\beta-1)\overrightarrow{v}\right\}=\alpha\overrightarrow{u}+(\beta-1)\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}\right)=\beta\left\{\alpha\overrightarrow{u}+(\beta-1)\overrightarrow{v}\right\}=\beta\overrightarrow{\omega}$$

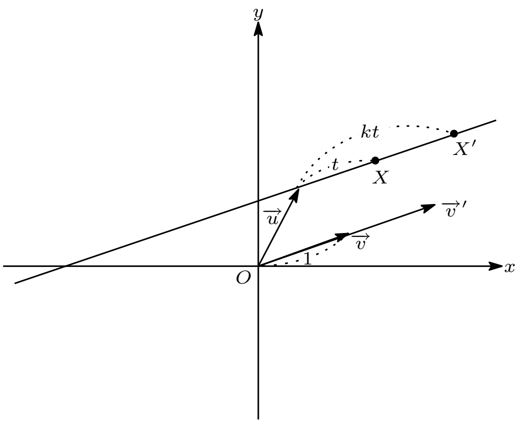
「$\beta\fallingdotseq 1$」とすると，$\overrightarrow{\omega}$ は $\overrightarrow{u}$ と一次独立な固有ベクトルとなり仮定と矛盾．よって「$\beta=1$」. ゆえに,

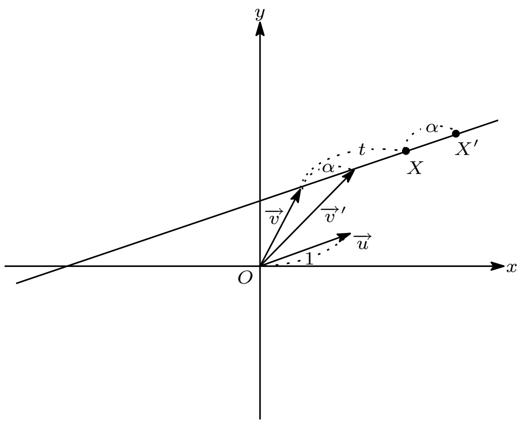
$$\begin{cases} A\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{u} \\ A\overrightarrow{v} &= \alpha\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

ここで「$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{v}+t\overrightarrow{u}$ (t は媒介変数)」で表される直線を l とすると, l は原点を通らない．また,

$$A\overrightarrow{OX}=A\left(\overrightarrow{v}+t\overrightarrow{u}\right)=A\overrightarrow{v}+tA\overrightarrow{u}=\left(\alpha\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)+t\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+(\alpha+t)\overrightarrow{u}$$

X の像も l 上にあり, かつ $(\alpha+t)$ も全ての実数を取るので, l の像は l となる．(右下図)





Comment

標準形の証明 [3-2-1] と同様にして，(∗) を導く事もできます．また $\vec{\omega}$ は以下の様にして見つけました．

$$\begin{cases} A\vec{u} &= \vec{u} \\ A\vec{v} &= \alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \end{cases} \longleftrightarrow A\,(\vec{u}\ \ \vec{v}) = (\vec{u}\ \ \vec{v})\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \longleftrightarrow (\vec{u}\ \ \vec{v})^{-1}A\,(\vec{u}\ \ \vec{v}) = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

よって $P=(\vec{u}\ \ \vec{v})$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \qquad \cdots(**)$$

この行列の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ [\text{固有値 }1],\quad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta-1\end{pmatrix}\ [\text{固有値}\beta]$$

(∗∗) は $\vec{u},\vec{v}$ を基底に取った時の f の表現なので，f の固有ベクトルは

$$\vec{u}\ [\text{固有値 }1],\quad \alpha\vec{u}+(\beta-1)\vec{v}\ [\text{固有値}\beta]$$

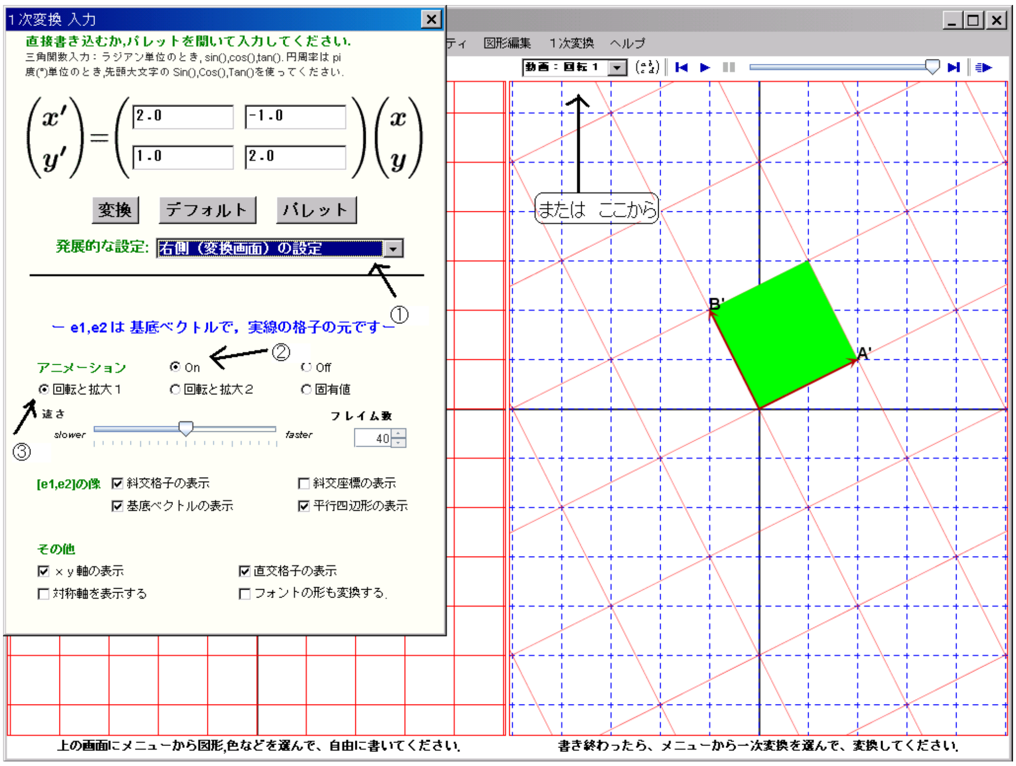
5 ソフト (マフィン君) の操作

マフィン君は Vector から，また**プレゼン用のマフィン君**は，私のサイトからダウンロードして下さい．

アニメーション

1. 反時計回りの回転．　2. 回転角の絶対値が小さくなる向きに回転．　3. 固有ベクトルの利用

の 3 種類あります．アニメーションに入るには,「一次変換 の popup window」で「発展的な設定」をクリックし,「右側（変換画面) の設定」で設定するか，または ツールバーから 選択します．



基底ベクトルの変換 任意の「$\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$」で**網の目**を作るには,「一次変換 の popup window」で「発展的な設定」をクリックし,「左側（オリジナル画面) の設定」から設定します．最後に「OK」をクリックしてください．さらに，右下の $\boxed{P^{-1}AP\text{ の表示}}$ をクリックすると $P^{-1}AP$ が表示されます．