

目で見て分かるベクトル 1

-平面ベクトルの和・差・実数倍-

「講義編」

2014年5月
生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

§ 1-1.ベクトルの例

ベクトルとは「向きと大きさを持つ量」で、例えば「力」、「速度」、「移動」はベクトルである。ここでは、ベクトルの例として「移動」を考える。

但し「移動の向き」と「距離」だけを考え「移動の始点」は考えない。

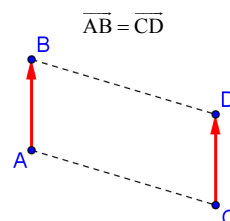
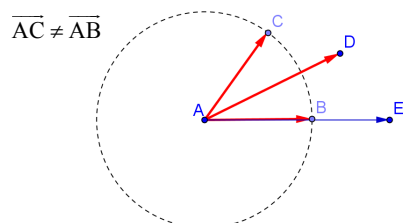
例えば、東京駅から東へ1km移動しても、京都駅から東へ1km移動しても「東へ1km移動」という同じベクトルになる。

始点がAで終点がBのベクトルを $\overrightarrow{AB}$ で表す。「東向き」と「西向き」

の移動は異なるので、 $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$

「始点と終点を入れ替えたベクトル」を「逆ベクトル」といい

「-」を付けて表す。例えば、 $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



ベクトルの和,差,実数倍

和

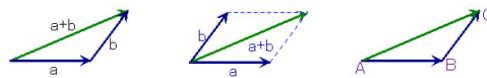
$\vec{a}$ の終点に $\vec{b}$ の始点を重ねたとき、「 $\vec{a}$ の始点から $\vec{b}$ の終点までの移動」を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和といい、 $\vec{a} + \vec{b}$ で表します。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないときは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を重ねたとき出来る平行四辺形の対角線と重なります。即ち、

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (定義)}$$

です。また明らかに、

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (性質)}$$

が成り立ちます。



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ は

$$\text{「(A から B への移動)+(B から C への移動)=(A から C への移動)」}$$

と理解すると簡単に覚えられます。

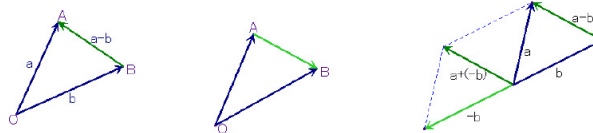
差

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を重ねて、その終点をそれぞれ A,B としたとき、 $\overrightarrow{BA}$ で表されるベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差といい $\vec{a} - \vec{b}$ で表します。すなわち

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \text{ (定義)}$$

このように定義すると、「 $\overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ 」が成り立つので、実数の計算法則「 $b + (a - b) = a$ 」と同じ規則が成り立ちます。(ベクトルの差をこのように定めた理由です)。

また右下図より $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ も成り立つことがわかります。



ベクトルの差は「始点変更の公式」(本当は公式ではなく、定義)としても良く使われます。中央上図より

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

これにより、A から、任意の点 O に始点を変更したことになる。「終ろー前」と覚えるか、

$$\text{(A から B への移動)} = \text{(A から O への移動)} + \text{(O から B への移動)} = (-\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

実数倍

$\vec{a} \neq \vec{0}, k > 0$ のとき

$$\begin{cases} \vec{a} \text{ と同じ向きで, 長さが } k \text{ 倍のベクトルを } k\vec{a}, \quad \dots \text{正の実数倍} \\ \vec{a} \text{ と反対向きで, 長さが } k \text{ 倍のベクトルを } (-k)\vec{a} \quad \dots \text{負の実数倍} \end{cases}$$

とします.

このように定めると 下図から

$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}, \quad 2\vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}, \quad (-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a}) = -3\vec{a}, \quad -2\vec{a} + (-\vec{a}) = -3\vec{a}$$

などが成り立つことが分かります. (ベクトルの和, 差は既に定義されているので二つの定義を比べることが出来ます.)



ベクトルの実数倍に関し,

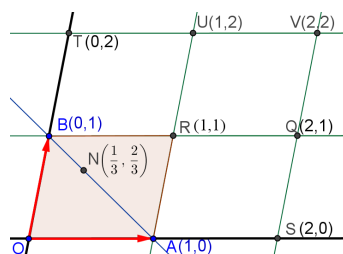
$$\begin{cases} s\vec{a} + t\vec{a} = (s+t)\vec{a} \\ s(t\vec{a}) = st\vec{a} \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

が成り立ちます. (例えば $2\vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$, $2(3\vec{a}) = 6\vec{a}$ など)

§ 2. 斜交座標

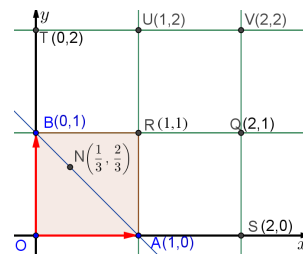
$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ で表される点Pに対し (s, t) を対応させると, $A(1,0), B(0,1)$ にした時の "座標のようなもの" になる. これを $(\vec{OA}, \vec{OB})$ を基底にした) **斜交座標** と言う.

特に $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1, \vec{OA} \perp \vec{OB}$ のとき, (s, t) は 中学, 高校で習ってきた通常の座標と同じになる. これを **直交座標** という.



斜交座標

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= 2\vec{OA} + 1\vec{OB} \rightarrow Q(2,1) \\ \vec{OA} &= 1\vec{OA} + 0\vec{OB} \rightarrow A(1,0) \\ \vec{OB} &= 0\vec{OA} + 1\vec{OB} \rightarrow B(0,1) \end{aligned}$$



直交座標

§ 3.内分・外分の公式

内分の公式

線分 AB を $m:n$ に 内分する点を P とすると,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

[覚え方] A と n , B と m を組み合わせる.

$$AB \text{ を } m:n \rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB}$$

ただし, O は原点である必要は無く, 任意の点でよい.

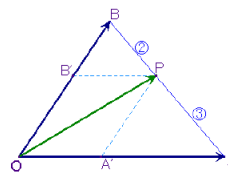
[例 1] P が線分 AB を 3:2 に内分する場合.

P を通り直線 OB と平行な直線と直線 OA の交点を A', P を通り直線 OA と平行な直線と直線 OB の交点を B' とすると, 「A'P // OB, B'P // OA」だから,

$$OA':OA = 2:5, \quad OB':OB = 3:5$$

よって,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{5}$$



[注] ここで「 $\frac{\vec{a}}{5}$ 」は「 $\frac{1}{5}\vec{a}$ 」の意味で,

$$\frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{5} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} \leftarrow \because k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

外分の公式

線分 AB を $m:n$ に 外分する点を P とすると,

[覚え方] n を $(-n)$ に代えて, 内分の公式と同様に, A と $(-n)$, B と m を組み合わせる.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{(-n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m + (-n)}$$

$$AB \text{ を } m:n \text{ に外分} \rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{m}{m-n} \overrightarrow{AB}$$

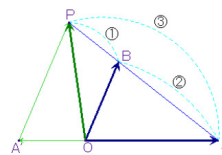
[例 2] P が線分 AB を 3:1 に内分する場合.

P を通り直線 OB と平行な直線と直線 OA の交点を A' とすると, 「A'P // OB」だから「 $\triangle OAB \sim \triangle A'AP$ 」. よって

$$OA':OA = 1:2, \quad A'P:OB = 3:2$$

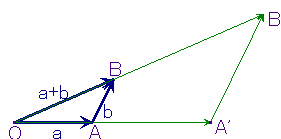
ゆえに,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'P} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{-\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}$$



$$\text{ベクトルの計算法則} \quad \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} & (\text{交換法則}) \\ (s+t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a} \\ s(t\vec{a}) = st\vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) & (\text{結合法則}) \\ k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} & (\text{三角形の相似}) \end{cases}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = k\vec{a} + k\vec{b}$$



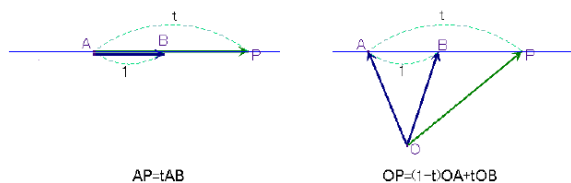
例

$$\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{4}{6}\vec{a} + \frac{2}{6}\vec{b} = \frac{1}{6}(4\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{4\vec{a} + 2\vec{b}}{6}$$

§ 4. 共線条件

$$\begin{aligned} \text{Pが直線AB上にある} &\iff \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \quad (t \text{ は任意の実数}) \\ &\iff \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &\iff \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &\iff \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (s+t=1) \end{aligned}$$

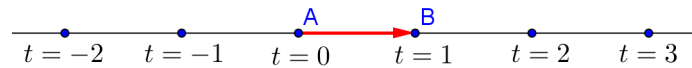
(ただし O は, 直線 AB 上に無い任意の点)



4 つの表現は全て同値です. 2 行目以外は全て大切です. また「 $1-t=s$ 」とおくと, 「 $s+t=1$ 」ですから, 3 行目から 4 行目にはすぐ移れます. よって「始点が直線上にあるとき」(左上図)と「始点が直線上に無いとき」(右上図)の二つの場合になります.

4.1 始点を直線上に取ったとき

$$P \text{ が直線 } AB \text{ 上} \iff \overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB} \quad (t \text{ は実数})$$



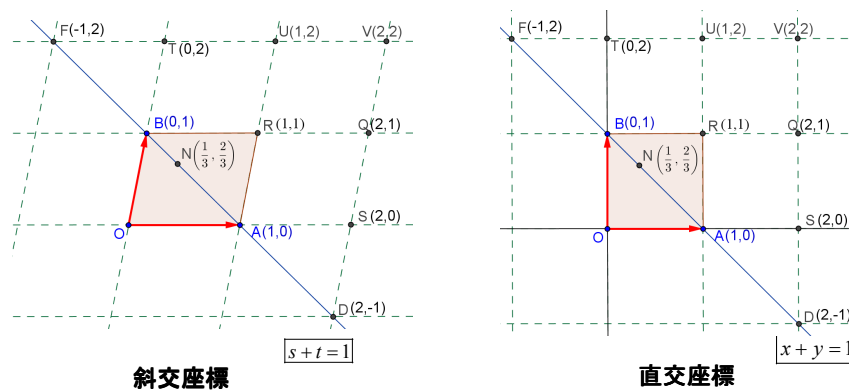
t は「 $A(0)$, $B(1)$ とした時の数直線上の座標」のようなもの

(斜交座標との類似性に注目してください!)

4.2 始点を直線の外に取ったとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \\ &= s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \quad (s+t=1) \end{aligned}$$

平面上の任意の点 P に対し、「 $\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}$ (s, t は実数)」と一通りに表せますが、 P が直線 AB 上にある時に限り「 $s+t=1$ 」となります。



目で見て分かるベクトル 2

-平面ベクトルの和・差・実数倍-

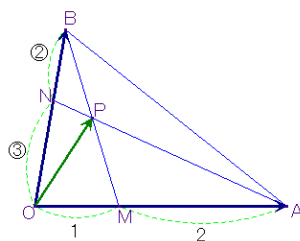
「演習編」

2014年5月
生越 茂樹

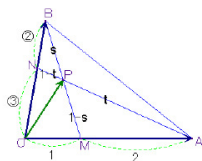
(HD画質で作成してあります)

§ 5.問題演習

[例1] 線分OAを1:2に内分する点をM, 線分OBを3:2に内分する点をNとする.
このとき直線ANと直線BMの交点Pを $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ で表せ.

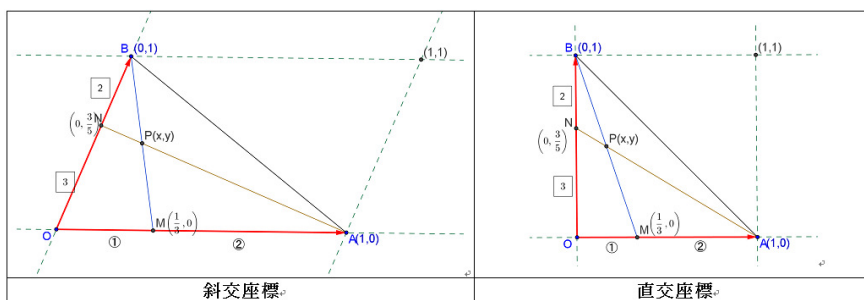


[解 1] (最も標準的な解法)



P は線分 AN, BM を内分しているので, $BP:PM = s:(1-s)$, $AP:PN = t:(1-t)$ ($0 < s < 1, 0 < t < 1$) とおける. (P が AB を外分している時は, このように置けません. 直接, 下の式を書き下します.)

[解 2] 斜交座標の利用

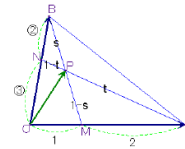


「 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ (x, y は実数) 」とおくと, P は直線 AN 上より,

[解3] 「解2」の厳密化

[解 1]と同様にして,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1-t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{ON} = (1-t) \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}t \overrightarrow{OB} \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{OP} = (1-s) \overrightarrow{OB} + s \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}s \overrightarrow{OA} + (1-s) \overrightarrow{OB} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

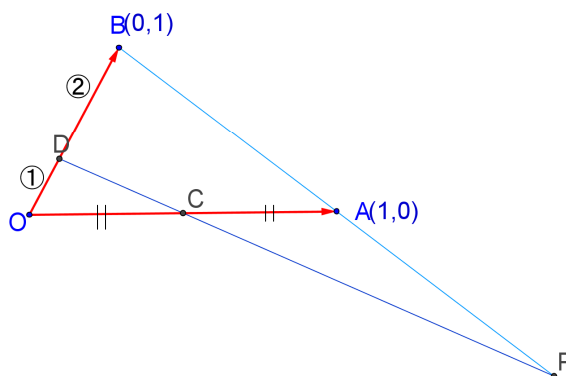


「 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 」とおくと, ①より

[例題2]

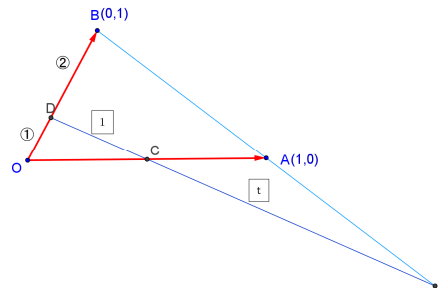
C を線分 OA の midpoint, D を OB を1:2に内分する点.

直線 CD と直線 AB の交点を P とすると, $\vec{OP}$ を $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ で表せ.



【解答】

Pは直線CD上より,



Pは直線AB上より,

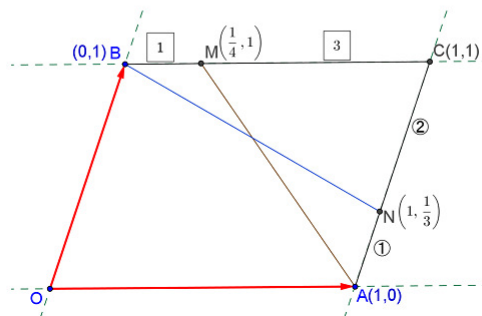
【例題3】

図のような平行四辺形 $OACB$ があり, 辺 BC を $1:3$ に内分する点を M , 辺 AC を $1:2$ に内分する点を N とする. 等式

$$\overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} \quad (x, y \text{ は実数}) \quad \cdots (*)$$

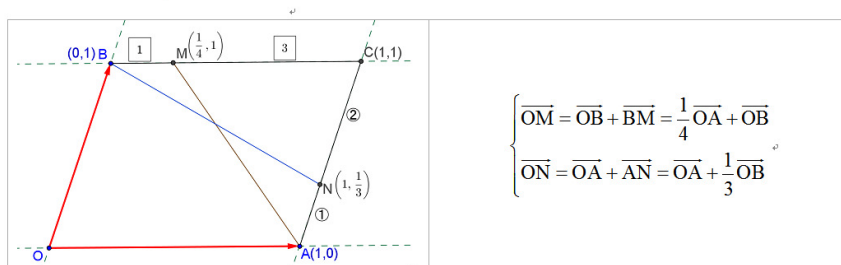
について次の問いに答えよ.

- (1) P が直線 AM 上にある時, x, y の満たす関係式を求めよ.
- (2) P が直線 BN 上にある時, x, y の満たす関係式を求めよ.
- (3) P が直線 AM と BN の交点の時, x, y の値を求めよ.



$$\overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} \quad (x, y \text{ は実数}) \quad \dots(*)$$

【解答】仮定より,



$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

(1) P が直線 AM 上にあるとき,

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OM} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

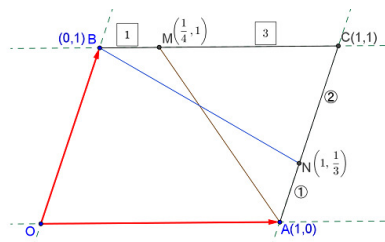
これと(*)を比べて,

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{3}{4}t \\ y = t \end{cases}$$

これから t を消去して,

$$y = -\frac{4}{3}(x-1) \dots Ans$$

$$\overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} \quad (x, y \text{ は実数}) \quad \dots(*)$$



(2) P が直線 BN 上にあるとき,

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{ON} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) = s\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{2}{3}s\right)\overrightarrow{OB}$$

これと(*)を比べて,

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - \frac{2}{3}s \end{cases}$$

これから s を消去して,

$$y = -\frac{2}{3}x + 1 \dots Ans$$

(3) (1)(2)の式を連立して,

$$s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2}{3} \quad \dots Ans$$

ここまで見てくださり、ありがとうございました.
今回 使用した PowerPoint(pdf)は、私の site に置いておきます.

<http://mixedmoss.com/youtube/vector1&2.pdf>

同じアドレスを、YouTubeのコメント欄にも書いてあるので、そこから リンクをたどる事も できます.

他にもいろいろ置いていますので、是非 ご覧ください.