

2.1 ちょっといい e の話 (瞬間複利法)

ここでは e の古典的な定義; $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を直感的に理解してみましょう。(厳密な説明は「付録」にあります.) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ とします. 例えば

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{1}{1} = 2, & a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25, \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37037037, & a_4 &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2.44140625, \end{aligned}$$

このように n が増加すると a_n も増加します. これを直感的に理解してみましょう.

ある銀行に一万円預けて放っておくと, 一年間で2倍になるとします. (一年複利で利率 100%) これをもっと増やすことは出来ないでしょうか? もし銀行の利率が預ける期間と関係ないならば可能です. 注3) 仮に 半年後に下ろして利子も含めて預け入れるとしたら どうなるでしょうか? 半年後には 1 万 5 千円もらえます. それをさらに半年預けるとさらにその 1.5 倍ですから 一年後には

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \text{万円} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{万円}$$

となります. さっきより儲かります. この預金法を「半年複利」と言います. 今度は 4ヵ月後に下ろして利子も含めて預け, さらに 4ヵ月後にも同じことをすると 一年後にはどうなるでしょうか?

$$4 \text{ヵ月後: } 1 \text{万円} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \text{万円.}$$

$$8 \text{ヵ月後: } \frac{4}{3} \text{万円} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \text{万円.}$$

$$1 \text{年後: } \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \text{万円} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \text{万円.}$$

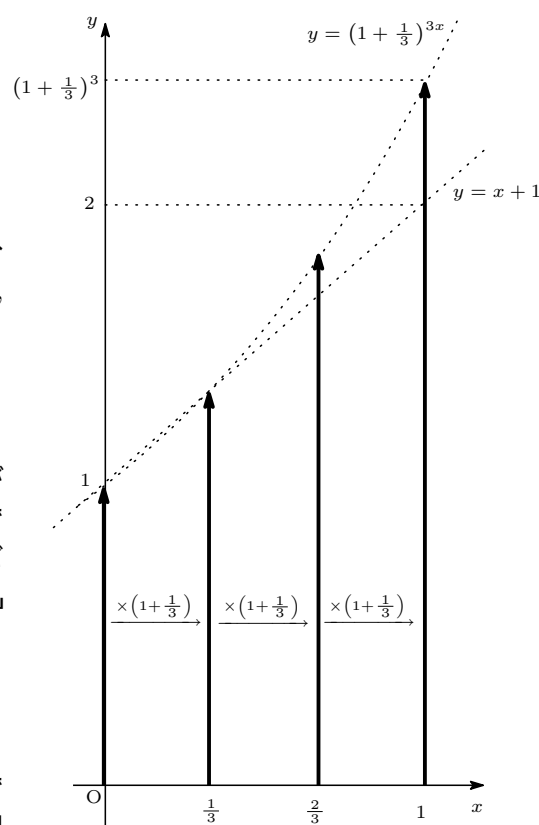
「半年複利」より「4ヶ月複利」の方がさらに儲かることが分かりました. 結局 一万円を預け入れ「 $\frac{1}{n}$ 年毎に引き出し, 利子と一緒に預け入れる」を繰り返すと, 一年後には

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{万円} = a_n \text{万円}$$

となります. これが a_n の直感的な意味です. すると a_n が n の増加関数となるのは「当たり前」です. そして, これで n をどんどん大きくしていき, 「1 秒, 0.1 秒, 0.01 秒...」ごとに複利で受けとり, 預け入れるようにする (瞬間複利法) なら 一万円を預けたときに, 一年後に受け取る金額は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ (万円)}$$

となります. これが e の直感的な意味です. $e \approx 2.71828$ ですから ほぼ 2 万 7 千円も貰えることになります. 一年複利で増やした場合の 2 万円よりはずーと大きくなります.



注3) 「利率が預ける期間と関係ない」というのは, 1 年間で 2 倍になる (一万円の利子が付く) としたら, 半年では 1 万 5 千円 (5 千円の利子がつく), 3ヶ月では 1 万 2500 円 (2500 円の利子がつく) になる ということです. ただし 実際の銀行では 利率は預け入れる期間によって変わります.

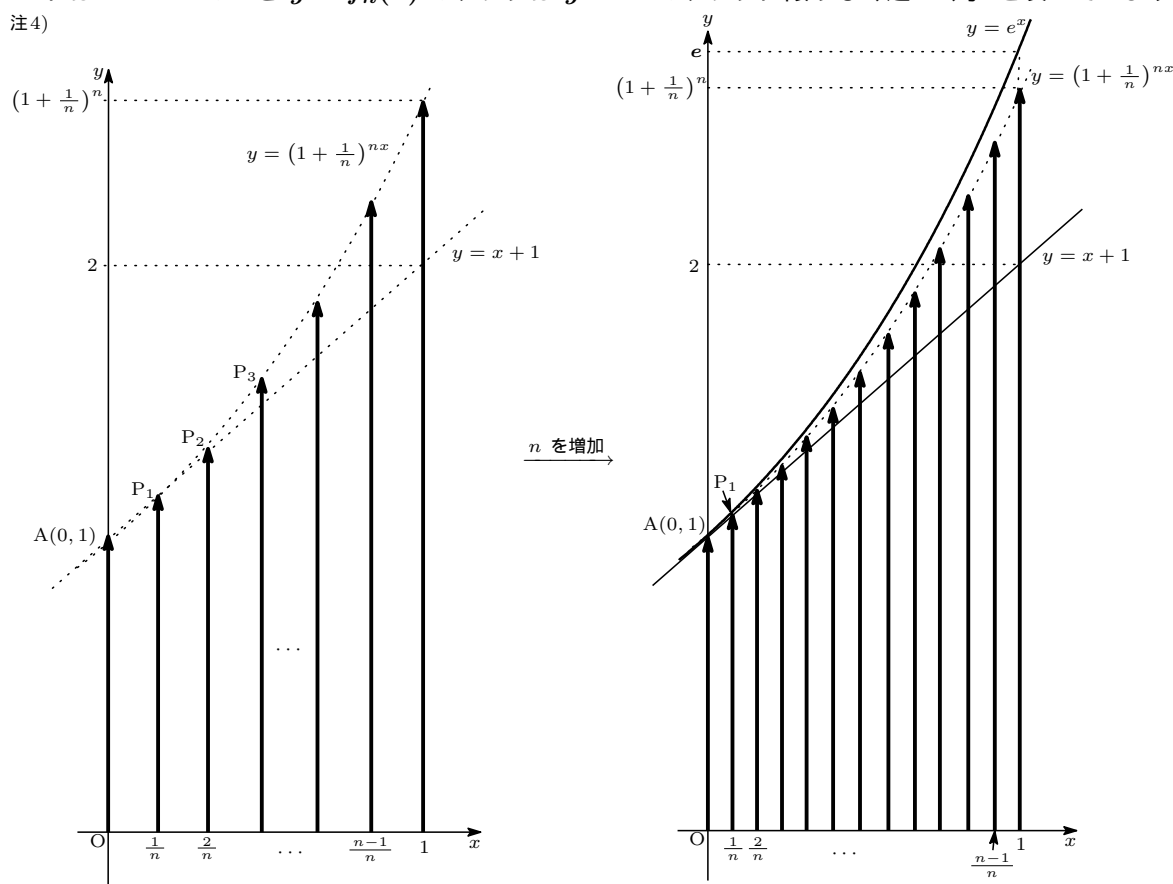
次に

$$P_1\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), P_2\left(\frac{2}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right), P_3\left(\frac{3}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3\right), \dots, P_k\left(\frac{k}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\right), \dots,$$

と置くと P_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) は全て $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ 上にあります。ここで $f_n(x) = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ において、 x を一定にして n を限りなく大きくすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^x = e^x \quad \dots (*)$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき $y = f_n(x)$ のグラフは $y = e^x$ のグラフに限りなく近づく事 を表しています。
注4)



練習 2-2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ を利用して次の極限を求めよ。注5)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

注4) $P_1\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ ですから、 $A(0, 1)$ とすると直線 AP_1 の傾きは常に 1 です。(点 P_1 は直線 $y = x + 1$ 上にあります。)そして $n \rightarrow \infty$ のとき点 P_1 は限りなく $y = e^x$ 上の点 $Q\left(\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}}\right)$ に近づきます。さらに点 Q は A に限りなく近づくので、 $y = x + 1$ が点 A において $y = e^x$ と接すること もわかります。

注5) (1),(2) は、一万円を 年利 100%の銀行で、瞬間複利で預けたとすると $\frac{1}{2}$ 年後と 2 年後には 何万円貰えるかということです。また (3) は 年利が 200% のときの金額を表します。