

$x^5 + 15x + 12$ の厳密解 with *Mathematica* 13.3

Galois群が F_{20} の方程式

2025 年2月(2025年5月修正) by mixedmoss

§0. [準備] 原始元, 分解方程式, ガロア群

以下は GaloisGroupProgram.nb を使って求めた結果です.

```
In[*]:= ClearAll["`*"];  
f = x^5 + 15 x + 12;
```

$f(x)=0$ の解を x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ($\alpha, \beta, \dots$ などの代わりに $x_1, x_2, \dots$ を利用する). $f(x)$ の原始元を $v = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5$, v の最小多項式を $V[x]$ とすると

```
In[*]:= V[x_] = 2 371 842 000 000 000 + 79 290 090 000 000 x^2 - 10 682 052 390 000 x^4 + 850 670 100 000 x^6 -  
34 046 433 000 x^8 + 523 980 000 x^10 + 9 587 025 x^12 - 90 000 x^14 - 5370 x^16 + x^20;
```

f のガロア群を Gal とすると,

$$\text{gal} = \{ \text{Id}, \tau^3, \tau, \tau^2, \tau^2 \sigma^4, \sigma^4, \tau^3 \sigma^4, \tau \sigma^4, \tau^2 \sigma^3, \sigma^3, \tau^3 \sigma^3, \\ \tau^3 \sigma^2, \tau \sigma^2, \tau^2 \sigma^2, \sigma^2, \sigma, \tau^3 \sigma, \tau \sigma, \tau^2 \sigma \} = \langle \tau, \sigma \rangle \cong C_4 C_5$$

ただし $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\tau = (2, 3, 5, 4)$

このように $C_4 C_5$ の形で書ける群を F_{20} (Frobenius group) というらしい.

分解列は $F_{20} \triangleright D_5 \triangleright C_5 \triangleright \{\text{Id}\}$

ただし C_n は巡回群, D_n は2面体群で

$$C_5 = \langle \sigma \rangle, D_5 = C_5 + \tau^2 C_5, F_{20} = D_5 + \tau D_5 = C_5 + \tau C_5 + \tau^2 C_5 + \tau^3 C_5 \cong C_4 C_5$$

また 解の v による表現 sols は次のようになる.

```
In[*]:= sols = {x1, x2, x3, x4, x5} = { (-861 938 718 370 242 204 295 608 211 266 295 749 515 640 000 000 -  
684 433 253 827 819 307 591 593 725 116 638 734 918 408 000 000 v +  
56 453 863 409 949 377 565 172 037 271 904 795 583 245 800 000 v^2 +  
19 563 002 556 282 706 292 765 646 235 752 842 691 558 840 000 v^3 -  
7 978 466 780 980 478 967 648 684 319 768 154 297 604 375 000 v^4 -  
1 412 078 890 526 740 319 563 466 581 752 545 752 725 075 000 v^5 +  
454 647 992 046 551 629 938 068 763 322 137 557 640 847 500 v^6 +  
39 523 989 667 403 257 171 441 630 822 442 153 550 235 500 v^7 -  
13 776 327 979 571 728 133 852 521 864 693 297 147 931 250 v^8 + 182 204 829 309 166 623 059 648 702 064 842 417 343 750 v^9 -  
82 512 570 458 629 569 770 475 904 931 084 945 494 875 v^10 - 16 375 593 393 086 713 704 888 903 663 110 645 815 275 v^11 +  
4 797 148 900 075 425 726 389 295 085 994 209 777 500 v^12 - 306 835 892 721 536 375 300 648 923 135 537 216 500 v^13 +  
101 218 323 101 025 844 900 848 255 798 867 235 650 v^14 + 2 862 937 646 806 542 762 759 958 481 564 843 970 v^15 -  
733 123 275 960 863 452 231 815 446 003 913 250 v^16 + 86 517 962 663 944 011 222 846 746 522 076 950 v^17 -  
24 177 861 079 325 177 445 822 443 717 163 795 v^18 + 109 727 114 703 154 096 983 447 147 223 069 v^19) /  
2 041 681 628 667 118 655 087 624 863 780 198 236 925 920 000 000,  
(288 962 986 598 211 429 293 764 452 721 718 394 637 080 000 000 -  
174 012 846 661 039 643 819 687 509 171 589 175 686 928 000 000 v -  
60 001 378 726 542 522 459 935 163 913 547 847 315 185 400 000 v^2 +
```

$$\begin{aligned}
& 19\,563\,002\,556\,282\,706\,292\,765\,646\,235\,752\,842\,691\,558\,840\,000\,v^3 + \\
& 6\,580\,063\,880\,550\,445\,698\,229\,626\,882\,944\,152\,376\,275\,125\,000\,v^4 - \\
& 1\,412\,078\,890\,526\,740\,319\,563\,466\,581\,752\,545\,752\,725\,075\,000\,v^5 - \\
& 316\,671\,295\,975\,123\,912\,024\,987\,067\,169\,784\,443\,651\,517\,500\,v^6 + \\
& 39\,523\,989\,667\,403\,257\,171\,441\,630\,822\,442\,153\,550\,235\,500\,v^7 + \\
& 6\,067\,999\,698\,672\,491\,109\,590\,008\,894\,958\,502\,641\,868\,750\,v^8 + 182\,204\,829\,309\,166\,623\,059\,648\,702\,064\,842\,417\,343\,750\,v^9 + \\
& 96\,204\,031\,481\,264\,240\,681\,635\,473\,494\,882\,788\,795\,875\,v^{10} - 16\,375\,593\,393\,086\,713\,704\,888\,903\,663\,110\,645\,815\,275\,v^{11} - \\
& 1\,239\,924\,706\,348\,598\,058\,510\,108\,525\,628\,473\,142\,500\,v^{12} - 306\,835\,892\,721\,536\,375\,300\,648\,923\,135\,537\,216\,500\,v^{13} - \\
& 55\,503\,894\,727\,181\,654\,479\,874\,499\,299\,363\,568\,450\,v^{14} + 2\,862\,937\,646\,806\,542\,762\,759\,958\,481\,564\,843\,970\,v^{15} + \\
& 49\,098\,725\,383\,619\,996\,457\,776\,558\,599\,182\,750\,v^{16} + 86\,517\,962\,663\,944\,011\,222\,846\,746\,522\,076\,950\,v^{17} + \\
& 10\,156\,737\,918\,838\,949\,953\,161\,614\,612\,963\,835\,v^{18} + 109\,727\,114\,703\,154\,096\,983\,447\,147\,223\,069\,v^{19}) / \\
& 1\,020\,840\,814\,333\,559\,327\,543\,812\,431\,890\,099\,118\,462\,960\,000\,000, \\
& (17\,682\,965\,821\,657\,195\,956\,640\,032\,738\,346\,434\,240\,000 + 3\,956\,628\,498\,066\,676\,567\,522\,910\,744\,266\,347\,000\,000\,v^2 - \\
& 322\,616\,275\,388\,652\,119\,062\,693\,539\,383\,779\,437\,000\,v^4 + 11\,125\,734\,870\,376\,676\,599\,102\,217\,027\,958\,772\,500\,v^6 + \\
& 102\,128\,776\,784\,474\,922\,892\,498\,560\,974\,779\,050\,v^8 - 6\,842\,221\,945\,748\,661\,717\,492\,745\,300\,989\,525\,v^{10} - \\
& 144\,277\,777\,424\,300\,821\,652\,509\,703\,231\,340\,v^{12} + 609\,503\,629\,255\,743\,300\,863\,141\,717\,310\,v^{14} + \\
& 39\,531\,224\,767\,096\,432\,236\,733\,301\,402\,v^{16} + 240\,601\,146\,642\,007\,769\,540\,230\,179\,v^{18}) / \\
& 63\,558\,743\,528\,095\,155\,461\,086\,764\,482\,499\,108\,480\,000, (288\,962\,986\,598\,211\,429\,293\,764\,452\,721\,718\,394\,637\,080\,000\,000 + \\
& 174\,012\,846\,661\,039\,643\,819\,687\,509\,171\,589\,175\,686\,928\,000\,000\,v - \\
& 60\,001\,378\,726\,542\,522\,459\,935\,163\,913\,547\,847\,315\,185\,400\,000\,v^2 - \\
& 19\,563\,002\,556\,282\,706\,292\,765\,646\,235\,752\,842\,691\,558\,840\,000\,v^3 + \\
& 6\,580\,063\,880\,550\,445\,698\,229\,626\,882\,944\,152\,376\,275\,125\,000\,v^4 + \\
& 1\,412\,078\,890\,526\,740\,319\,563\,466\,581\,752\,545\,752\,725\,075\,000\,v^5 - \\
& 316\,671\,295\,975\,123\,912\,024\,987\,067\,169\,784\,443\,651\,517\,500\,v^6 - \\
& 39\,523\,989\,667\,403\,257\,171\,441\,630\,822\,442\,153\,550\,235\,500\,v^7 + \\
& 6\,067\,999\,698\,672\,491\,109\,590\,008\,894\,958\,502\,641\,868\,750\,v^8 - 182\,204\,829\,309\,166\,623\,059\,648\,702\,064\,842\,417\,343\,750\,v^9 + \\
& 96\,204\,031\,481\,264\,240\,681\,635\,473\,494\,882\,788\,795\,875\,v^{10} + 16\,375\,593\,393\,086\,713\,704\,888\,903\,663\,110\,645\,815\,275\,v^{11} - \\
& 1\,239\,924\,706\,348\,598\,058\,510\,108\,525\,628\,473\,142\,500\,v^{12} + 306\,835\,892\,721\,536\,375\,300\,648\,923\,135\,537\,216\,500\,v^{13} - \\
& 55\,503\,894\,727\,181\,654\,479\,874\,499\,299\,363\,568\,450\,v^{14} - 2\,862\,937\,646\,806\,542\,762\,759\,958\,481\,564\,843\,970\,v^{15} + \\
& 49\,098\,725\,383\,619\,996\,457\,776\,558\,599\,182\,750\,v^{16} - 86\,517\,962\,663\,944\,011\,222\,846\,746\,522\,076\,950\,v^{17} + \\
& 10\,156\,737\,918\,838\,949\,953\,161\,614\,612\,963\,835\,v^{18} - 109\,727\,114\,703\,154\,096\,983\,447\,147\,223\,069\,v^{19}) / \\
& 1\,020\,840\,814\,333\,559\,327\,543\,812\,431\,890\,099\,118\,462\,960\,000\,000, \\
& (-861\,938\,718\,370\,242\,204\,295\,608\,211\,266\,295\,749\,515\,640\,000\,000 + \\
& 684\,433\,253\,827\,819\,307\,591\,593\,725\,116\,638\,734\,918\,408\,000\,000\,v + \\
& 56\,453\,863\,409\,949\,377\,565\,172\,037\,271\,904\,795\,583\,245\,800\,000\,v^2 - \\
& 19\,563\,002\,556\,282\,706\,292\,765\,646\,235\,752\,842\,691\,558\,840\,000\,v^3 - \\
& 7978\,466\,780\,980\,478\,967\,648\,684\,319\,768\,154\,297\,604\,375\,000\,v^4 + \\
& 1\,412\,078\,890\,526\,740\,319\,563\,466\,581\,752\,545\,752\,725\,075\,000\,v^5 + \\
& 454\,647\,992\,046\,551\,629\,938\,068\,763\,322\,137\,557\,640\,847\,500\,v^6 - \\
& 39\,523\,989\,667\,403\,257\,171\,441\,630\,822\,442\,153\,550\,235\,500\,v^7 - \\
& 13\,776\,327\,979\,571\,728\,133\,852\,521\,864\,693\,297\,147\,931\,250\,v^8 - 182\,204\,829\,309\,166\,623\,059\,648\,702\,064\,842\,417\,343\,750\,v^9 - \\
& 82\,512\,570\,458\,629\,569\,770\,475\,904\,931\,084\,945\,494\,875\,v^{10} + 16\,375\,593\,393\,086\,713\,704\,888\,903\,663\,110\,645\,815\,275\,v^{11} + \\
& 4\,797\,148\,900\,075\,425\,726\,389\,295\,085\,994\,209\,777\,500\,v^{12} + 306\,835\,892\,721\,536\,375\,300\,648\,923\,135\,537\,216\,500\,v^{13} + \\
& 101\,218\,323\,101\,025\,844\,900\,848\,255\,798\,867\,235\,650\,v^{14} - 2\,862\,937\,646\,806\,542\,762\,759\,958\,481\,564\,843\,970\,v^{15} - \\
& 733\,123\,275\,960\,863\,452\,231\,815\,446\,003\,913\,250\,v^{16} - 86\,517\,962\,663\,944\,011\,222\,846\,746\,522\,076\,950\,v^{17} - \\
& 24\,177\,861\,079\,325\,177\,445\,822\,443\,717\,163\,795\,v^{18} - 109\,727\,114\,703\,154\,096\,983\,447\,147\,223\,069\,v^{19}) / \\
& 2\,041\,681\,628\,667\,118\,655\,087\,624\,863\,780\,198\,236\,925\,920\,000\,000\};
\end{aligned}$$

§ 1. Lagrange分解式 r_1, r_2, r_3, r_4 の5乗の値を求める

1-1. Lagrange分解式

$C_5 \triangleright \{Id\}$ の部分に注目し、ラグランジュの5次分解式をつくる。(ζは1の原始5乗根のひとつ。)
 このとき、 $V(v)$ と円分方程式 $v^4+v^3+v^2+v+1$ で割った余りを考える。(PolynomialMod)。

```
In[*]:= r0 = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 // PolynomialMod[#, V[v]] &;
r1 =
  x1 + ζ x2 + ζ^2 x3 + ζ^3 x4 + ζ^4 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
r2 = x1 + ζ^2 x2 + ζ^4 x3 + ζ x4 + ζ^3 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
r3 = x1 + ζ^3 x2 + ζ x3 + ζ^4 x4 + ζ^2 x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
r4 = x1 + ζ^4 x2 + ζ^3 x3 + ζ^2 x4 + ζ x5 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &;
```

解と係数の関係より $r_0 = 0$ 。また以下の性質が成り立つ。

$$(\#1) \begin{cases} r_1 \text{を}\sigma \text{で移すと } r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1, \quad \tau \text{で移すと } r_1 \rightarrow r_3, \quad \tau^2 \text{で移すと } r_1 \rightarrow r_4, \\ r_2 \text{を}\sigma \text{で移すと } r_2 \rightarrow \zeta^3 r_2, \quad \tau \text{で移すと } r_2 \rightarrow r_1, \quad \tau^2 \text{で移すと } r_2 \rightarrow r_3, \\ r_3 \text{を}\sigma \text{で移すと } r_3 \rightarrow \zeta^2 r_3, \quad \tau \text{で移すと } r_3 \rightarrow r_4, \quad \tau^2 \text{で移すと } r_3 \rightarrow r_2, \\ r_4 \text{を}\sigma \text{で移すと } r_4 \rightarrow \zeta r_4, \quad \tau \text{で移すと } r_4 \rightarrow r_2, \quad \tau^2 \text{で移すと } r_4 \rightarrow r_1, \end{cases}$$

τ は分解式を「 $r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1$ 」のように移し、 σ は「 $r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1 \rightarrow \zeta^3 r_1 \rightarrow \zeta^2 r_1 \rightarrow \zeta r_1 \rightarrow r_1$ 」のように移す。

さらに同型写像 $\omega: \zeta \rightarrow \zeta^3$ とすると、分解式は次のように移る。 ω は τ と同じように分解式を移す。

$$(\text{by } \omega) r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1 \cdots \quad (\text{by } \omega^2) r_1 \leftrightarrow r_4, \quad r_2 \leftrightarrow r_3$$

以上より、 $(\#2) \mathbf{R1} = \mathbf{r1}^5, \mathbf{R2} = \mathbf{r2}^5, \mathbf{R3} = \mathbf{r3}^5, \mathbf{R4} = \mathbf{r4}^5$ とおくと、

σ は $\mathbf{R1} \sim \mathbf{R4}$ を動かさない、 τ は $\mathbf{R1} \xrightarrow{\tau} \mathbf{R3} \xrightarrow{\tau} \mathbf{R4} \xrightarrow{\tau} \mathbf{R2} \xrightarrow{\tau} \mathbf{R1}$ のように移す。

1-2. $t_1=R_1+R_4, t_2=R_2+R_3, t_3=r_1r_4, t_4=r_2r_3$ の値を求める

$t_1=R_1+R_4, t_2=R_2+R_3, t_3=r_1r_4, t_4=r_2r_3$ とおく。(＃)より t_1, t_2, t_3, t_4 は σ と τ^2 で不変。故に t_1, t_2, t_3, t_4 は D_5 で不変。さらに τ により $t_1 \leftrightarrow t_2$ かつ $t_3 \leftrightarrow t_4$ であるから、 $(t_1 + t_2), (t_1 - t_2)^2, (t_1 - t_2)(t_3 - t_4), (t_3 + t_4), (t_3 * t_4)$ は τ で不変で、 $F_{20} = D_5 + \tau D_5$ だから、これらは F_{20} で不変。故に $Q(\zeta)$ に入る。「単純計算」すると、

```

In[ ]:= {R1, R2, R3, R4} = {r1, r2, r3, r4}^5;
t1 = R1 + R4; t2 = R2 + R3; t3 = r1 * r4; t4 = r2 * r3;

p = t1 + t2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(t1 - t2)^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
(t1 - t2) (t3 - t4) // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
t3 + t4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &
q = t3 * t4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ξ]}] &

Out[ ]:=
7500

Out[ ]:=
225 000 000

Out[ ]:=
-450 000

Out[ ]:=
0

Out[ ]:=
-225

```

$\sqrt{225} = 15$ だから, 上の計算より

$$\begin{cases} t1 - t2 & = \pm 15\,000 \\ t1 + t2 & = 7500 \\ (t3, t4) & = (\pm 15, \mp 15) \text{ (複号同順)} \\ (t1 - t2)(t3 - t4) & < 0 \end{cases}$$

故に $(t1, t2, t3^5, t4^5) =$

$$(R1 + R4, R2 + R3, R1 R4, R2 R3) = (11\,250, -3750, -759\,375, 759\,375) \\ \text{または } (-3750, 11\,250, 759\,375, -759\,375) - (1)$$

1-3. R_1, R_2, R_3, R_4 の値を求める

(1) より, (ア) または (イ) のいずれか

$$\begin{array}{ll} \text{(ア)} \begin{cases} R1 + R4 & = 11\,250 \\ R1 R4 & = -759\,375 \end{cases} & \text{かつ} \begin{cases} R2 + R3 & = -3750 \\ R2 R3 & = 759\,375 \end{cases} \\ \text{(イ)} \begin{cases} R1 + R4 & = -3750 \\ R1 R4 & = 759\,375 \end{cases} & \text{かつ} \begin{cases} R2 + R3 & = 11\,250 \\ R2 R3 & = -759\,375 \end{cases} \end{array}$$

$R1$ と $R4$, $R2$ と $R3$ を解に持つ2次方程式を作って解けば, $R1, R2, R3, R4$ が求まる. ここではSolve で一度に求め Rset に入れる.

```
In[*]:= Rset = {$R1, $R2, $R3, $R4} /. Solve[
  ($R1 + $R4 == 11250 && $R1 $R4 == -759375 && $R2 + $R3 == -3750 && $R2 $R3 == 759375) ||
  ($R1 + $R4 == -3750 && $R1 $R4 == 759375 && $R2 + $R3 == 11250 && $R2 $R3 == -759375),
  {$R1, $R2, $R3, $R4}] // Simplify
```

```
Out[*]=
```

```
{ { 225 (25 - 8 √10), -75 (25 + 7 √10), 75 (-25 + 7 √10), 225 (25 + 8 √10) },
  { 225 (25 - 8 √10), 75 (-25 + 7 √10), -75 (25 + 7 √10), 225 (25 + 8 √10) },
  { -75 (25 + 7 √10), 225 (25 - 8 √10), 225 (25 + 8 √10), 75 (-25 + 7 √10) },
  { -75 (25 + 7 √10), 225 (25 + 8 √10), 225 (25 - 8 √10), 75 (-25 + 7 √10) },
  { 75 (-25 + 7 √10), 225 (25 - 8 √10), 225 (25 + 8 √10), -75 (25 + 7 √10) },
  { 75 (-25 + 7 √10), 225 (25 + 8 √10), 225 (25 - 8 √10), -75 (25 + 7 √10) },
  { 225 (25 + 8 √10), -75 (25 + 7 √10), 75 (-25 + 7 √10), 225 (25 - 8 √10) },
  { 225 (25 + 8 √10), 75 (-25 + 7 √10), -75 (25 + 7 √10), 225 (25 - 8 √10) } }
```

【ひとりごと】Galois群Galが C_5 のときは「単純計算」で R_1, R_2, R_3, R_4 が求まった。Gal= D_5 のときは「単純計算」で $t_1=R_1+R_4, t_2=R_2+R_3$ が求まった。それから2次方程式を解いて R_1, R_2, R_3, R_4 が求まった。Gal= F_{20} のときは、 $t_1+t_2=R_1+R_2+R_3+R_4, (t_1-t_2)^2=((R_1+R_4)-(R_2+R_3))^2$ しか「単純計算」では求まらない。これから2次方程式を解いて t_1, t_2 が求まる。（この例では平方根が有理数になったので、このステップは不要でした）。さらにもう一回、2次方程式を解いてやっと R_1, R_2, R_3, R_4 が求まる。

§1'[別解]. R1~R4を解とする4次方程式を立てて R1~R4を求める

(#1,#2)より, $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 (=p=t_1+t_2)$, $R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4$, $R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4$, $R_1 R_2 R_3 R_4 (=q^5=(t_3 t_4)^5)$ は σ, τ で不変だから F_{20} で不変. 故に $Q(\zeta)$ に入る. 「単純計算」すると,

```
In[*]:= s1 = p
          s2 = R1 R2 + R1 R3 + R1 R4 + R2 R3 + R2 R4 + R3 R4 //
              PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
          s3 = R1 R2 R3 + R1 R2 R4 + R1 R3 R4 + R2 R3 R4 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, ζ]}] &
          s4 = q^5

Out[*]=
7500

Out[*]=
-42187500

Out[*]=
11390625000

Out[*]=
-576650390625
```

故に, R_1, R_2, R_3, R_4 を解に持つ方程式は $x^4 - (s_1)x^3 + (s_2)x^2 - (s_3)x + (s_4) = 0$ となる. これを解くと $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ の値は

```
In[*]:= x /. Solve[x^4 - s1 x^3 + s2 x^2 - s3 x + s4 == 0, x, Quartics -> True]

Out[*]=
{225 (25 - 8 √10), 75 (-25 - 7 √10), 75 (-25 + 7 √10), 225 (25 + 8 √10)}
```

結局(§1)でやっていたのは, 4次方程式を (2次+2次) に分けて解いていただけと分かる. この方法はすっきりしていて, より高次でも使えるが, 計算時間がかなりかかる. $R_1 = l_0 + l_1 \zeta + l_2 \zeta^2 + l_3 \zeta^3 + l_4 \zeta^4$ で定義される $l_1 \sim l_4$ の4次方程式を立てる方が, 時間的には速い. (Another_F20.nb 参照)

§2. $(r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4)$ と $(r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2)$ の値を考慮し r_1, r_2, r_3, r_4 の値を求める

(R_1, R_2, R_3, R_4) の値は 8 組あるがこれらは順序が異なっているだけで、先頭の順序を $(1, 2, 3, 4)$ と改めておいた時、 $(1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1)$ と $(2, 1, 4, 3), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2)$ の 8 通りとなる。ここで r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 の定義と $r_0 = 0$ から

$$\begin{cases} x_1 = 1/5 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ x_2 = 1/5 (\zeta^4 r_1 + \zeta^3 r_2 + \zeta^2 r_3 + \zeta r_4) \\ (\#\#) \begin{cases} x_3 = 1/5 (\zeta^3 r_1 + \zeta r_2 + \zeta^4 r_3 + \zeta^2 r_4) \\ x_4 = 1/5 (\zeta^2 r_1 + \zeta^4 r_2 + \zeta r_3 + \zeta^3 r_4) \\ x_5 = 1/5 (\zeta r_1 + \zeta^2 r_2 + \zeta^3 r_3 + \zeta^4 r_4) \end{cases} \end{cases}$$

$w_1 = r_1 r_2^2 + r_3^2 r_4$, $w_2 = r_1^2 r_3 + r_2 r_4^2$ とおく。 w_1 と w_2 は σ と τ^2 で変わらないので、 D_5 の固定体に入る。さらに w_1 と w_2 は τ によって、それぞれ w_2 と w_1 に入れ替わる。故に $w_1 + w_2$ と $(w_1 - w_2)^2$ は F_{20} の固定体 $Q(\zeta)$ に入る。「単純計算」して

```
In[*]:= w1 = r1 r2^2 + r3^2 r4; w2 = r1^2 r3 + r2 r4^2;
w1 + w2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, 5]}] &
(w1 - w2)^2 // PolynomialMod[#, {V[v], Cyclotomic[5, 5]}] &

Out[*]=
0

Out[*]=
90000
```

故に「 $w_1 + w_2 = 0$ かつ $(w_1 - w_2)^2 = 90000$ 」-- (2)

「 $R_1 \sim R_4$ が全て実数の時は、 $r_1 \sim r_4$ が全て実数と仮定しても一般性を失わない」(補足3) 故に

(R_1, R_2, R_3, R_4) の候補の 8 組から (r_1, r_2, r_3, r_4) の候補が同じく 8 組定まり、その内 (2) を満たすものは次の 4 組となる。(時間節約のため有効数字計算を使用しています)

```

In[*]:= realRoot[p_] := Sign[p] Abs[p]^(1/5) (*実数に対し5乗根を求めるコマンド*)
rset = Select[realRoot/@Rset, (a1 = #[[1]];
  a2 = #[[2]];
  a3 = #[[3]];
  a4 = #[[4]];
  w1 = a1 a2^2 + a3^2 a4;
  w2 = a1^2 a3 + a2 a4^2;
  N@Abs[w1 + w2] < 10^(-8) && N@Abs[(w1 - w2)^2 - 90000] < 10^(-8)) &] // Quiet

```

Out[*]=

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left\{ -15^{2/5} \left(-25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5}, -5^{2/5} \left(3 \left(25 - 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5}, \right. \right. \\
&\quad \left. -5^{2/5} \left(3 \left(25 + 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5}, 15^{2/5} \left(25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5} \right\}, \left\{ -5^{2/5} \left(3 \left(25 + 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5}, \right. \\
&\quad \left. -15^{2/5} \left(-25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5}, 15^{2/5} \left(25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5}, -5^{2/5} \left(3 \left(25 - 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5} \right\}, \\
&\left\{ -5^{2/5} \left(3 \left(25 - 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5}, 15^{2/5} \left(25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5}, -15^{2/5} \left(-25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5}, \right. \\
&\quad \left. -5^{2/5} \left(3 \left(25 + 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5} \right\}, \left\{ 15^{2/5} \left(25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5}, -5^{2/5} \left(3 \left(25 + 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5}, \right. \\
&\quad \left. -5^{2/5} \left(3 \left(25 - 7 \sqrt{10} \right) \right)^{1/5}, -15^{2/5} \left(-25 + 8 \sqrt{10} \right)^{1/5} \right\} \}
\end{aligned}$$

§3. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 の値を求める

これらの4組の先頭の解を $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ とおくと, τ により $r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_2$ と移るので $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, $\{r_3, r_1, r_4, r_2\}$, $\{r_4, r_3, r_2, r_1\}$, $\{r_2, r_4, r_1, r_3\}$, は $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ の順序を変えるだけ. 従って上の4つの $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ の値は同じ解集合を与える. (このことから §1 の (R_1, R_2, R_3, R_4) の8組の解は実質2種類で, §2 でその内の一つを選んだだけということも分かる.) 故に $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ として先頭の解を選んでよい. これから方程式の解 $x_1, x_2, \dots$ は次の様に求まる.

```
In[*]:= {r1, r2, r3, r4} = rset[[1];
g = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
x1 = 1 / 5 (r1 + r2 + r3 + r4) // Simplify (*定義の塗替えをしている*)
x2 = 1 / 5 (g^4 r1 + g^3 r2 + g^2 r3 + g r4) // Simplify
x3 = 1 / 5 (g^3 r1 + g r2 + g^4 r3 + g^2 r4) // Simplify
x4 = 1 / 5 (g^2 r1 + g^4 r2 + g r3 + g^3 r4) // Simplify
x5 = 1 / 5 (g r1 + g^2 r2 + g^3 r3 + g^4 r4) // Simplify
```

$$\text{Out[*]} = \frac{3^{1/5} \left((25 - 7\sqrt{10})^{1/5} + (25 + 7\sqrt{10})^{1/5} + (-75 + 24\sqrt{10})^{1/5} - (75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \right)}{5^{3/5}}$$

$$\text{Out[*]} = \frac{1}{32 \times 5^{3/5}} 3^{1/5} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) \left(8(75 + 24\sqrt{10})^{1/5} - 2(25 + 7\sqrt{10})^{1/5} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (25 - 7\sqrt{10})^{1/5} \left(2 + 2\sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} - i \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (-75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(2 + 2\sqrt{5} - i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + i \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \frac{1}{32 \times 5^{3/5}} 3^{1/5} \left(-i(-1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) \left(-8i(25 - 7\sqrt{10})^{1/5} - 2(75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(-i(-1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (25 + 7\sqrt{10})^{1/5} \left(2i(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} - \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (-75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(2i(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) \right)$$

$$\text{Out[*]} = \frac{1}{32 \times 5^{3/5}} 3^{1/5} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) \left(-8(25 + 7\sqrt{10})^{1/5} - 2(-75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (25 - 7\sqrt{10})^{1/5} \left(2 + 2\sqrt{5} - i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + i \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. i(75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(2i(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) \right)$$

Out[*]=

$$\frac{1}{32 \times 5^{3/5}} 3^{1/5} \left(-i (-1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) \left(-8i (-75 + 24\sqrt{10})^{1/5} + 2(25 - 7\sqrt{10})^{1/5} \left(-i (-1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(-2i(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (25 + 7\sqrt{10})^{1/5} \left(2i(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) \right)$$

Out[*]=

$$\frac{1}{32 \times 5^{3/5}} 3^{1/5} \left(-i (-1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) \left(-8i (-75 + 24\sqrt{10})^{1/5} + 2(25 - 7\sqrt{10})^{1/5} \left(-i (-1 + \sqrt{5}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (75 + 24\sqrt{10})^{1/5} \left(-2i(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. (25 + 7\sqrt{10})^{1/5} \left(2i(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) \right)$$

x1~x5の近似値と Nsolveで解いた解を比べる

```
In[*]:= N@{x1, x2, x3, x4, x5} // Sort
x /. NSolve[f == 0, x] // Sort
```

Out[*]=

```
{-1.16886 - 1.45104 i, -1.16886 + 1.45104 i,
-0.780669, 1.55919 - 1.41298 i, 1.55919 + 1.41298 i}
```

Out[*]=

```
{-1.16886 - 1.45104 i, -1.16886 + 1.45104 i,
-0.780669, 1.55919 - 1.41298 i, 1.55919 + 1.41298 i}
```

見た限りは一致している。また少し時間は掛るが、厳密に計算しても $f(x_1)=0$ が確かめられる。(Simplifyを2回使う) 実数解x1と虚数解x2を累乗根を使って表してみる。

```
In[*]:= x1 // TraditionalForm // Print
x2 // TraditionalForm // Print
```

$$\frac{\sqrt[5]{3} \left(\sqrt[5]{25 - 7\sqrt{10}} + \sqrt[5]{25 + 7\sqrt{10}} + \sqrt[5]{24\sqrt{10} - 75} - \sqrt[5]{75 + 24\sqrt{10}} \right)}{5^{3/5}} \\ \frac{1}{32 \times 5^{3/5}} \sqrt[5]{3} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) \left(8 \sqrt[5]{75 + 24\sqrt{10}} - 2 \sqrt[5]{25 + 7\sqrt{10}} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. \sqrt[5]{25 - 7\sqrt{10}} \left(2 + 2\sqrt{5} + i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} - i \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) + \right. \\ \left. \sqrt[5]{24\sqrt{10} - 75} \left(2 + 2\sqrt{5} - i \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} + i \sqrt{10(5 + \sqrt{5})} \right) \right)$$

§4. 補足

〔補足1〕「 $\text{Gal} = F_{20}$ のとき R_1, R_2, R_3, R_4 は全て実数となる」
と予想していたのだが、これは誤りと分かった。

$\text{Gal} = F_{20}$ のとき、圧倒的多数は $R_1 \sim R_4$ は実数で、 $f=0$ は実数解を一個しか持たないが、 $f_1 = x^5 - 10x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 10x + 2$ と $f_2 = x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 10x + 2$ は $\text{Gal} = F_{20}$ で実数解を 5 個持つ。これは非常に珍しいので、余り確認もせずに予想していた。実際 $f = x^5 + a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$ (a, b, c, d 整数, $-10 \leq a, b, c \leq 10, 1 \leq d \leq 10$) で既約かつ $\text{Gal} = F_{20}$ となるのは 238 個あるが、このうち 234 個は実数解を 1 個持ち、残り 4 個だけが実数解を 5 個持つ。

〔補足2〕 R_1, R_2, R_3, R_4 が全て実数のとき、
 r_1, r_2, r_3, r_4 を実数としても一般性を失わない

ガロア群が D_5 のときの、〔補足3〕の証明と殆ど同じにできる。

〔補足3〕 R_1, R_2, R_3, R_4 が全て実数のとき、実数解は 1 個だけ

ガロア群が D_5 のときの、〔補足4〕の証明と同じ

他の 5 次方程式については <https://mixedmoss.com/Mathematica/Galois> にお越しください。