

5次方程式の厳密解を求めるprogram with *Mathematica* 14 -ver2-

2025 年7月 by mixedmoss

§1. プログラム

「GaloisResolvent.nb」をモジュール化して、可解で既約な5次方程式 $f(x)$ を入力するだけで、厳密解が求まるようにプログラムしました。3月に発表したプログラムでは原始元とガロア群を利用して、計算時間が20~30秒かかりましたが、今回はGalois分解式を利用し、あらかじめ補助公式(pb,pc,pd)を作っておくことにより即座に解が求まるようにしています。pb~pd, p20の定義など詳しい説明は「GaloisResolvent.nb」をご覧ください。それらの計算は非常に時間がかかるので直下のclosed cellに入れてあります。(計算には計14時間ほど掛かります)。したがって新規、またはClearAll["Global`*"]のなどの後には必ず「評価」して下さい。ノートブック全体の評価でも数秒です。

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(↓pb, pc, pd, p20 評価してください)

```

In[* ]:= (*gの有理数解で重複度がmultiplicityのいずれかとなるものを取り出す*)
getTheta[g_,multiplicity_List]:=Module[{ichiji},ichiji = Select[FactorList[g], Exponent[#][1],
If[ichiji!= {},x/.Solve[ichiji[[1,1]]==0,x] [[1]], {}]];

calculateQuintic[f_]:=Module[{(*alist,fb,pc,pd,θa,θb,θc,θd,wa1,wa2,seki1,seki2,perms,ξ,Ra,Rb,
(*Part1 (R1,R2,R3,R4)の4つの候補Ra,Rb,Rc,Rdを求める*)
alist=(CoefficientList[f,x]//Drop[#, -1]& //Reverse){-1,1,-1,1,-1};(*{a1,a2,a3,a4,a5}*)
fb:=pb/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
fc:=pc/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
fd:=pd/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
θa=2 alist[[1]]^2-5 alist[[2]];(*θa=r1r4+r2r3*)
θb=getTheta[fb,{1,6}];(* (r1 r4-r2 r3)^2*)
θc=getTheta[fc,{1,6}];(*θc=l1 l4+l2 l3*)
θd=getTheta[fd,{1,6}];(*θd=(l1+l4-l2-l3)^2*)
{wa1,wa2}={1/2 { (4 alist[[1]]^5-5θc+√θd √5), (4 alist[[1]]^5-5θc-√θd √5)} };(*{R1+R4,R2+R3}={wa1,wa2}
{seki1,seki2}=(1/2{θa+Sqrt[θb],θa-Sqrt[θb]})^5;(*{R1R4,R2R3}={seki1,seki2}または{seki2,seki1}
(*case a*)Ra=Flatten[{t/.Solve[t^2-wa1 t +seki1==0],t/.Solve[t^2-wa2 t+seki2==0,t]},{1,1}][{1,3,4}
(*case b*)Rb=Ra[[{1,3,2,4}]];
(*case c*)Rc=Flatten[{t/.Solve[t^2-wa1 t +seki2==0],t/.Solve[t^2-wa2 t+seki1==0,t]},{1,1}][{1,3,4}
(*case d*)Rd=Rc[[{1,3,2,4}]];
(*Part2 Ra,Rb,Rc,Rdのうち正しいものを 数値解から求める.数値解は先頭に$を付ける*)
perms={{1,2,3,4,5},{1,3,5,2,4},{1,5,4,3,2},{1,4,2,5,3},{2,1,5,3,4},{2,5,4,1,3},{2,4,3,5,1},{
{2,3,5,1,4},{2,5,4,3,1},{2,4,1,5,3},{2,1,3,4,5},{3,1,5,2,4},{3,5,4,1,2},{3,4,2,5,1},{3,2,1,4,
$sol=x/.NSolve[f==0,x];(*数値解*)
ξ=Cos[2Pi/5]+I Sin[2Pi/5];(*最後のr1234の値はξの選択に依存する事に注意*)
$r1234Table=Table[{1,ξ,ξ^2,ξ^3,ξ^4},{1,ξ^2,ξ^4,ξ,ξ^3},{1,ξ^3,ξ,ξ^4,ξ^2},{1,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ}
}$R1234Table=$r1234Table^5//Quiet;(*$solsに対する{R1,R2,R3,R4}*)
ΔRa=Norm/@($R1234Table-Table[N[Ra],24]);(*{R1,R2,R3,R4}=Raのとき, $R1234Tableとの差*)
ΔRb=Norm/@($R1234Table-Table[N[Rb],24]);
ΔRc=Norm/@($R1234Table-Table[N[Rc],24]);
ΔRd=Norm/@($R1234Table-Table[N[Rd],24]);
ΔRabcd={ΔRa,ΔRb,ΔRc,ΔRd};
pos=Position[ΔRabcd,Min[ΔRabcd]][[1]];(*厳密解{R1,R2,R3,R4}と$R1234Tableとの差が最小のposition*)
R1234={Ra,Rb,Rc,Rd}[[pos[[1]]]];(*{R1,R2,R3,R4}の厳密解*)
r1234=N@R1234^(1/5);(*{R1,R2,R3,R4}の偏角が最小の5乗根*)
$r1234=$r1234Table[[pos[[2]]]];(*正しい数値解{$r1,$r2,$r3,$r4}*)
(*Part3 正しい(R1,R2,R3,R4)の組から, (R1,R2,R3,R4)^(1/5) に掛けるξの指数を求める*)
power=Mod[Round[(Arg[$r1234]-Arg[r1234])/Arg[ξ]],5];
Clear[ξ];(*解をξを使って表すために「記号(偏角は2/5piで固定)」に戻す*)
{r1,r2,r3,r4}=R1234^(1/5)* ξ^power;(*{r1,r2,r3,r4}の厳密解*)
{x1,x2,x3,x4,x5}=1/5{{1,1,1,1,1},{1,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ},{1,ξ^3,ξ,ξ^4,ξ^2},{1,ξ^2,ξ^4,ξ,ξ^3},{1,ξ,
Print[{TraditionalForm[x1],TraditionalForm[x2],TraditionalForm[x3],TraditionalForm[x4],Tradit
]};

solveQuintic[f_]:=Module[{alist,f20,θ20},alist=(CoefficientList[f,x]//Drop[#, -1]& //Reverse){
f20:=p20/. AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5}→alist];
θ20=getTheta[f20,{1}];
If[IrreduciblePolynomialQ[f]&&θ20!= {},calculateQuintic[f], Print["可解で既約な5次方程式でありませ
]]

```

§2. 使用例

可解で既約な有理数係数でmonicな5次方程式fに対応しています。コマンドや使い方は「solveQuinticProgram.nb」と同じにしました。(旧バージョンと異なりGalois群は出力されません。また旧バージョンと併用される場合は名前を変更してください。) 即ち **solveQuintic[f]** と入力するだけで厳密解が得られます。但し今回は「 $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ 」をそのまま「 ζ 」という記号の形で出力させました。これはその方が見やすいと感じたからです。厳密解は変数「x1,x2,x3,x4,x5」に入っているのので、「 ζ 」を「 $\cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ 」に直すことも容易です。

「solveQuinticProgram.nb」と同じ例で見えます。

■ 例1. $x^5 - 5x + 12$

In[*]:= **f = x^5 - 5 x + 12;**

In[*]:= **solveQuintic[f]**

$$\left\{ \frac{1}{\zeta^{2/5}} \left(\left(\sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-25 - 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}} + 5^{3/10} \sqrt[5]{-\frac{1}{25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}}} \right) \zeta^2 + \sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} \right), \right.$$

$$\frac{1}{\zeta^{2/5}} \left(5^{3/10} \sqrt[5]{-\frac{1}{25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}}} \zeta^3 + \sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} \zeta^2 + \sqrt[5]{-5(5 + 2\sqrt{5}) - 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}} \zeta + \sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} \right),$$

$$\frac{1}{\zeta^{2/5}} \left(\sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} \zeta^4 + \left(\sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-25 - 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}} \right) \zeta^3 + 5^{3/10} \sqrt[5]{-\frac{1}{25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}}} \zeta \right),$$

$$\frac{1}{\zeta^{2/5}} \left(\sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} \zeta^4 + \left(\sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-25 - 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}} \right) \zeta^3 + 5^{3/10} \sqrt[5]{-\frac{1}{25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}}} \zeta \right),$$

$$\frac{1}{\zeta^{2/5}} \left(\left(\sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} + 5^{3/10} \sqrt[5]{-\frac{1}{25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}}} \right) \zeta^4 + \sqrt[5]{-25 + 10\sqrt{5} - 3\sqrt{125 - 55\sqrt{5}}} \zeta^3 + \sqrt[5]{-5(5 + 2\sqrt{5}) - 3\sqrt{125 + 55\sqrt{5}}} \right) \}$$

但し $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$

In[*]:=

例によって **NSolve** で求めた数値解と比較します。そのためには x1~x5 を「 $\zeta \rightarrow \text{Cos}[2 \text{ Pi}/5] + i \text{ Sin}[2$

Pi/5]」を使って変形してから 近似値を求めます。上が厳密解の近似値で、下がNSolveを使って求めた数値解です。ご覧の様に一致します。

```
In[*]:= {x1, x2, x3, x4, x5} /. {ξ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f, x] // Sort

Out[*]=
{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}

Out[*]=
{-1.84209, -0.351854 - 1.70956 i,
 -0.351854 + 1.70956 i, 1.2729 - 0.719799 i, 1.2729 + 0.719799 i}

In[*]:=
```

■ 例2. $x^5 - 3$

```
In[*]:= f = x5 - 3 ;
solveQuintic[f]
{ $\sqrt[5]{3}$ ,  $\sqrt[5]{3} \zeta$ ,  $\sqrt[5]{3} \zeta^2$ ,  $\sqrt[5]{3} \zeta^3$ ,  $\sqrt[5]{3} \zeta^4$ }
但し  $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ 
```

これなどは特に ζ を使った方が見やすい気がします。この例では計算せずとも正しいことが分かりますが、念のためチェックしてみましょう。

```
In[*]:= {x1, x2, x3, x4, x5} /. {ξ → Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f, x] // Sort

Out[*]=
{-1.00782 - 0.732222 i, -1.00782 + 0.732222 i,
 0.384952 - 1.18476 i, 0.384952 + 1.18476 i, 1.24573}

Out[*]=
{-1.00782 - 0.732222 i, -1.00782 + 0.732222 i,
 0.384952 - 1.18476 i, 0.384952 + 1.18476 i, 1.24573}
```

■ 例3. $x^5 - 11x^3 - 10x^2 + 11x + 10$

最後に計算時間も見ておきましょう。

```
In[*]:= f = x^5 - 11 x^3 - 10 x^2 + 11 x + 10;
Timing[solveQuintic[f]]
```

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[5]{2} 5^{4/5}} \left(\sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} + \sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} + \sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} + \sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \right), \right. \\ \frac{1}{\sqrt[5]{2} 5^{4/5}} \zeta \left(\sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta^3 + \sqrt[5]{-5 (455 + 211 \sqrt{5}) - 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \zeta^2 + \sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta + \sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \right), \\ \frac{1}{\sqrt[5]{2} 5^{4/5}} \zeta \left(\sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta^3 + \sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \zeta^2 + \sqrt[5]{-5 (455 + 211 \sqrt{5}) - 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \zeta + \sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \right), \\ \frac{1}{\sqrt[5]{2} 5^{4/5}} \zeta \left(\sqrt[5]{-5 (455 + 211 \sqrt{5}) - 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \zeta^3 + \sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta^2 + \sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta + \sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \right), \\ \left. \frac{1}{\sqrt[5]{2} 5^{4/5}} \zeta \left(\sqrt[5]{-2275 - 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \zeta^3 + \sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta^2 + \sqrt[5]{-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})}} \zeta + \sqrt[5]{-5 (455 + 211 \sqrt{5}) - 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})}} \right) \right\}$$

但し $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$

```
Out[*]= {0.515625, Null}
```

約0.3秒です。ガロア群を使った旧バージョンでは約20秒かかっていたので60倍ほど速いです。

なお、旧バージョンの様に 全てを累乗根で表すことも簡単です。例えば x1 の場合は次の様になります。

```
In[*]:= x1 /. {z -> Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // Simplify
```

```
Out[*]= \frac{1}{2^{1/5} 5^{4/5}} \left( \left( -2275 + 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right)^{1/5} + \left( -2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right)^{1/5} + \right. \\ \left. \left( -2275 - 1055 \sqrt{5} - 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right)^{1/5} + \left( -2275 - 1055 \sqrt{5} + 2 i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right)^{1/5} \right)
```

最後に数値解との比較です。ご覧の様に一致しています。

```
In[*]:= {x1, x2, x3, x4, x5} /. {z -> Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f, x] // Sort
```

```
Out[*]= {-2.3504, -1.42891, -0.813416, 1.0264, 3.56632}
```

```
Out[*]= {-2.3504, -1.42891, -0.813416, 1.0264, 3.56632}
```

§3. プログラムの解説

まず、基本の確認をします.

f の解を $x_1 \sim x_5$, ガロア群を $F_{20} = \langle \tau, \sigma \rangle$

ただし $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\tau = (2, 3, 5, 4)$ とします. ここで Lagrange 分解式

$$(H1) \quad \begin{cases} r_0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ r_1 &= x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 + \zeta^3 x_4 + \zeta^4 x_5 \\ r_2 &= x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta^4 x_3 + \zeta x_4 + \zeta^3 x_5 \\ r_3 &= x_1 + \zeta^3 x_2 + \zeta x_3 + \zeta^4 x_4 + \zeta^2 x_5 \\ r_4 &= x_1 + \zeta^4 x_2 + \zeta^3 x_3 + \zeta^2 x_4 + \zeta x_5 \end{cases}$$

を考えると, σ は「 $r_1 \rightarrow \zeta^4 r_1 \rightarrow \zeta^3 r_1 \rightarrow \zeta^2 r_1 \rightarrow \zeta r_1 \rightarrow r_1$ 」の様に移し,

τ は 分解式を「 $r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1$ 」の様に移します.

さらに $R_1 = r_1^5$, $R_2 = r_2^5$, $R_3 = r_3^5$, $R_4 = r_4^5$ とすると σ によって R_1, R_2, R_3, R_4 は動かず,

τ によって「 $(R_1, R_2, R_3, R_4) \xrightarrow{\tau} (R_3, R_1, R_4, R_2) \xrightarrow{\tau}$

$(R_4, R_3, R_2, R_1) \xrightarrow{\tau} (R_2, R_4, R_1, R_3) \xrightarrow{\tau} (R_1, R_2, R_3, R_4) \dots$ 」の様に移ります.

先ず「Final_F20.nb」と同様にして $\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d$ を使い (R_1, R_2, R_3, R_4) の候補 R_a, R_b, R_c, R_d を求めます. ここまでは「Final_F20.nb」と同様なので省略します.

次に f の数値解 $sol = \{\$x1, \$x2, \$x3, \$x4, \$x5\}$ を使って正しい (R_1, R_2, R_3, R_4) を求め, そのあとやはり sol を使って $R_1 \sim R_4$ の正しい5乗根 $r_1 \sim r_4$ を求めます.

次の例 (式は例3と同じ) で見てみましょう.

以下 数値解とそれから直接計算できる変数は先頭に「\$」を付けて表します.

■ 【例4】 $x^5 - 11x^3 - 10x^2 + 11x + 10$

§3-1. 正しい (R_1, R_2, R_3, R_4) を選択する

まず 5 次の対称群 S_5 は次の様に6個の左剰余類に分けられます.

「 $S_5 = F_{20} + (1, 2, 3) F_{20} + (1, 3, 2) F_{20} + (1, 2) F_{20} + (2, 3) F_{20} + (1, 3) F_{20}$ 」

(H) より (R_1, R_2, R_3, R_4) の固定群 $M (\subset S_5)$ は $M = \langle \sigma \rangle$ です. $F_4 = \langle \tau \rangle$ とすると, $F_{20} / M = F_4$ なので, $T = S_5 / M$ とおくと,

「 $T = F_4 + (1, 2, 3) F_4 + (1, 3, 2) F_4 + (1, 2) F_4 + (2, 3) F_4 + (1, 3) F_4$ 」で,

T の位数は 24 です. 結局,

f の解の順列を変えたときに (R_1, R_2, R_3, R_4) の取りえる値は 24 通り有りますが,

その各々に対する $x_1 \sim x_5$ の変換を行う要素を S_5 から1つずつ集めた集合が T となります.

数値解 $sol = \{\$x1, \$x2, \$x3, \$x4, \$x5\}$ を T を使って移し,

その各々に対する $(\$R1, \$R2, \$R3, \$R4)$ の24通りの組を考え,

そのうち R_a, R_b, R_c, R_d の何れかのセットと一致する組を見つけます.

さて「Final_F20.nb」と同様にしてもとめた (R_1, R_2, R_3, R_4) の候補は次の4つとなります.

$$\begin{aligned} \text{In[*]} := \text{Ra} &= \left\{ \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right), \frac{(-55 + 17 \sqrt{5})^5}{80 \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 \sqrt{-1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right)}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 \sqrt{-1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right), \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right) \right\}; \\ \text{Rb} &= \left\{ \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right), -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 \sqrt{-1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{(-55 + 17 \sqrt{5})^5}{80 \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2 \sqrt{-1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right)}, \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1666825 + 3145551 \sqrt{5}} \right) \right\}; \\ \text{Rc} &= \left\{ \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right), -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right), \right. \\ &\quad \left. -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right), \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right) \right\}; \\ \text{Rd} &= \left\{ \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right), -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right), \right. \\ &\quad \left. -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right), \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right) \right\}; \end{aligned}$$

各々の近似値は次の通りです.

```
In[*] := N[Ra]
N[Rb]
N[Rc]
N[Rd]

Out[*] =
{210.129 - 14748.3 i, -1.90774, -23168.4, 210.129 + 14748.3 i}

Out[*] =
{210.129 - 14748.3 i, -23168.4, -1.90774, 210.129 + 14748.3 i}

Out[*] =
{210.129 - 6.69291 i, -11585.1 - 9129.14 i, -11585.1 + 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i}

Out[*] =
{210.129 - 6.69291 i, -11585.1 + 9129.14 i, -11585.1 - 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i}
```

一方, f の数値解 sol は次のようになります.

```
In[*] := sol = {$x1, $x2, $x3, $x4, $x5} = x /. NSolve[f == 0, x]

Out[*] =
{-2.3504, -1.42891, -0.813416, 1.0264, 3.56632}
```

以下の計算は「 $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ 」と固定します.

また perms は「T を順列 {1, 2, 3, 4, 5} の置換の形として表したもの」です.

この時, sol の $x_1 \sim x_5$ を perms を使って移し,

その各々に対する (r_1, r_2, r_3, r_4) , (R_1, R_2, R_3, R_4) の値を求めると,

次の r_{1234} Table と R_{1234} Table のようになります. (r_{1234} Table のみ表示します.)

```
In[*]:= ξ = Cos[2 Pi / 5] + I Sin[2 Pi / 5];
$r1234Table = Table[{1, ξ, ξ^2, ξ^3, ξ^4}, {1, ξ^2, ξ^4, ξ, ξ^3},
  {1, ξ^3, ξ, ξ^4, ξ^2}, {1, ξ^4, ξ^3, ξ^2, ξ}].sol[[perms[[i]]], {i, 1, 24}];
$R1234Table = $r1234Table^5
```

Out[*]=

```
{ {-8598.43 - 218.924 i, -171.417 - 1272.93 i, -171.417 + 1272.93 i, -8598.43 + 218.924 i},
  {-171.417 + 1272.93 i, -8598.43 - 218.924 i, -8598.43 + 218.924 i, -171.417 - 1272.93 i},
  {-8598.43 + 218.924 i, -171.417 + 1272.93 i, -171.417 - 1272.93 i, -8598.43 - 218.924 i},
  {-171.417 - 1272.93 i, -8598.43 + 218.924 i, -8598.43 - 218.924 i, -171.417 + 1272.93 i},
  {-840.815 - 827.442 i, 3480.92 - 8235.98 i, 3480.92 + 8235.98 i, -840.815 + 827.442 i},
  {3480.92 + 8235.98 i, -840.815 - 827.442 i, -840.815 + 827.442 i, 3480.92 - 8235.98 i},
  {-840.815 + 827.442 i, 3480.92 + 8235.98 i, 3480.92 - 8235.98 i, -840.815 - 827.442 i},
  {3480.92 - 8235.98 i, -840.815 + 827.442 i, -840.815 - 827.442 i, 3480.92 + 8235.98 i},
  {50.0537 + 24.7503 i, -1399.19 - 17624.2 i, -1399.19 + 17624.2 i, 50.0537 - 24.7503 i},
  {-1399.19 + 17624.2 i, 50.0537 + 24.7503 i, 50.0537 - 24.7503 i, -1399.19 - 17624.2 i},
  {50.0537 - 24.7503 i, -1399.19 + 17624.2 i, -1399.19 - 17624.2 i, 50.0537 + 24.7503 i},
  {-1399.19 - 17624.2 i, 50.0537 - 24.7503 i, 50.0537 + 24.7503 i, -1399.19 + 17624.2 i},
  {210.129 - 6.69291 i, -11585.1 - 9129.14 i, -11585.1 + 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i},
  {-11585.1 + 9129.14 i, 210.129 - 6.69291 i, 210.129 + 6.69291 i, -11585.1 - 9129.14 i},
  {210.129 + 6.69291 i, -11585.1 + 9129.14 i, -11585.1 - 9129.14 i, 210.129 - 6.69291 i},
  {-11585.1 - 9129.14 i, 210.129 + 6.69291 i, 210.129 - 6.69291 i, -11585.1 + 9129.14 i},
  {-204.657 - 102.717 i, 9099.11 - 11311.2 i, 9099.11 + 11311.2 i, -204.657 + 102.717 i},
  {9099.11 + 11311.2 i, -204.657 - 102.717 i, -204.657 + 102.717 i, 9099.11 - 11311.2 i},
  {-204.657 + 102.717 i, 9099.11 + 11311.2 i, 9099.11 - 11311.2 i, -204.657 - 102.717 i},
  {9099.11 - 11311.2 i, -204.657 + 102.717 i, -204.657 - 102.717 i, 9099.11 + 11311.2 i},
  {-2238.77 + 581.546 i, -5301.8 - 3171.03 i, -5301.8 + 3171.03 i, -2238.77 - 581.546 i},
  {-5301.8 + 3171.03 i, -2238.77 + 581.546 i, -2238.77 - 581.546 i, -5301.8 - 3171.03 i},
  {-2238.77 - 581.546 i, -5301.8 + 3171.03 i, -5301.8 - 3171.03 i, -2238.77 + 581.546 i},
  {-5301.8 - 3171.03 i, -2238.77 - 581.546 i, -2238.77 + 581.546 i, -5301.8 + 3171.03 i}}
```

\$R1234Table と $N[Ra] \sim N[Rd]$ の値を比べると、 $N[Rc]$ と上表の13番目の要素が一致することが分かります。故に、正しい (R_1, R_2, R_3, R_4) ($= R_{1234}$ とおく) は

$$\text{In}[*]:= R1234 = Rc = \left\{ \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093(1525 - 682\sqrt{5})} \right), -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093(1525 + 682\sqrt{5})} \right), \right. \\ \left. -\frac{5}{2} \left(2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093(1525 + 682\sqrt{5})} \right), \frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093(1525 - 682\sqrt{5})} \right) \right\};$$

です。また13番目の要素に対する $(\$r_1, \$r_2, \$r_3, \$r_4)$ の値 ($= \$r_{1234}$ とおく) は

```
In[*]:= $r1234 = $r1234Table[[13]]
```

Out[*]=

```
{ -2.3468 + 1.72799 i, -1.22548 - 6.70856 i, -1.22548 + 6.70856 i, -2.3468 - 1.72799 i }
```

となります。

§3 - 2. 正しい5乗根を選択する

まずは $R1234$ の5乗根 $(R_1^{1/5}, R_2^{1/5}, R_3^{1/5}, R_4^{1/5})$ の近似値 $r1234$ を求めます。

```
In[*]:= r1234 = N[R1234]^(1/5)
```

Out[*]=

```
{ 2.91429 - 0.0185588 i, 6.00152 - 3.23856 i, 6.00152 + 3.23856 i, 2.91429 + 0.0185588 i }
```

多分、Mathematicaでは「 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, -\pi < \theta < \pi$)」に対し、

$$z^{\frac{1}{5}} = r^{\frac{1}{5}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{5} \right) \right)$$

と定義しています。

何れにせよ, r_{1234} の要素は5乗根の内の一つを選んでいるので,
 r_{1234} の各々の要素に ζ^k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) を掛けて $\$r_{1234}$ とできるだけ一致させます.
 そのためには偏角を調べるとOKです. 例えば r_1 と $\$r_1$ に対しては

```
In[*]:= (Arg[$r1234[[1]] - Arg[r1234[[1]])] / Arg[ $\zeta$ ]
```

```
Out[*]=
```

2.

となるので, 「 $\$r_1 = r_1 * \zeta^2$ 」と分かります.
 同様にして 「 $\$r_2 = r_2 * \zeta^4$, $\$r_3 = r_3 * \zeta$, $\$r_4 = r_4 * \zeta^3$ 」となるので,
 正しい (r_1, r_2, r_3, r_4) の厳密解は

```
In[*]:= Clear[ $\zeta$ ]
```

```
R1234^(1/5) *  $\zeta^{\{2, 4, 1, 3\}}$ 
```

```
Out[*]=
```

$$\left\{ \left(\frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right) \right)^{1/5} \zeta^2, \right.$$

$$\left(\frac{5}{2} \left(-2275 - 1055 \sqrt{5} - 2i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right) \right)^{1/5} \zeta^4,$$

$$\left(\frac{5}{2} \left(-2275 - 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093 (1525 + 682 \sqrt{5})} \right) \right)^{1/5} \zeta,$$

$$\left. \left(\frac{5}{2} \left(-2275 + 1055 \sqrt{5} + 2i \sqrt{1093 (1525 - 682 \sqrt{5})} \right) \right)^{1/5} \zeta^3 \right\}$$

となります. 後はこれを代入して $x_1 \sim x_5$ の厳密解を求めるだけです. (略)

§3-3. 補足

「§3-2」で $\$x_1 \sim \x_5 の置換として $\sigma=(1,2,3,4,5)$ を考えてない事にお気づきの方もいらっしゃると思います.
 σ により ($\$r_1, \$r_2, \$r_3, \r_4) は次の様に移ります. (直下の行は,見やすくするため「\$」は省略.)

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \xrightarrow{\sigma} (r_1 \zeta^4, r_2 \zeta^3, r_3 \zeta^2, r_4 \zeta) \xrightarrow{\sigma} (r_1 \zeta^3, r_2 \zeta, r_3 \zeta^4, r_4 \zeta^2) \xrightarrow{\sigma} \\ (r_1 \zeta^2, r_2 \zeta^4, r_3 \zeta, r_4 \zeta^3) \xrightarrow{\sigma} (r_1 \zeta, r_2 \zeta^2, r_3 \zeta^3, r_4 \zeta^4) \xrightarrow{\sigma} (r_1, r_2, r_3, r_4)$$

($\$r_1, \$r_2, \$r_3, \r_4) としては確かに上の5通りある訳ですが,
 このうちどれをとっても $\{\$x_1, \$x_2, \$x_3, \$x_4, \$x_5\}$
 の集合は同じになることが簡単な計算で示せます. このことが Dummit 氏の言われる
 「 r_1 を R_1 の任意の5乗根にとっても一般性を失わない事」に当たります.