

7 次方程式を解く例 with Mathematica14.0

-詳しい解説は他のファイルをご覧ください-

\$0 まとめ

```
In[*]:= ClearAll["`*"]
```

F35(「F35.nb」参照)

$f_1, f_2, f_3, g_1,$
 g_2 を求めるプログラム (「F1F2F3.nb, G1G2.nb」参照. ↓ を評価してください)

```
In[*]:= findF12G12[f_] := Module[{f35, factors, pos1, pos2, f12, d, R1, R2, f12factors, u, v, fp, fm, g1, g2, gcd1, gcd2},
Clear[a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7];
f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} → Reverse@CoefficientList[f, x, 7]];
factors = FactorList[f35];
pos1 = Position[Exponent[factors[[All, 1]], x], 14][[1, 1]];
f12 = factors[[pos1][[1]]];
d = Sqrt@Discriminant[f12, x];
f12factors = FactorList[f12, Extension → d];
pos2 = Flatten@Position[Exponent[f12factors[[All, 1]], x], 7];
{$f1, $f2} = (Expand[#, Coefficient[#, x, 7]] &) /@ f12factors[[pos2][[All, 1]]];
u = -(t1+t2)/14 + (t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
v = -(t1+t2)/14 - (t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
fp = ($f1 /. {x → u}) + ($f2 /. {x → v});
fm = Sqrt[-7] (( $f1 /. {x → u}) - ($f2 /. {x → v}));
g1 = GroebnerBasis[{f /. {x → (t1+t2)/7}, fp, fm}, {t1}, {t2}][[1]];
$g1 = If[Coefficient[g1, t1, 7] != 0, Expand[#, Coefficient[#, t1, 7]] & [g1] /. {t1 → x},
R1 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fp /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14}, t2];
R2 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fm /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14}, t2];
PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
gcd1 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
Expand[gcd1 / Coefficient[gcd1, t1, 7]] /. {t1 → x};
g2 = GroebnerBasis[{f /. {x → (t1+t2)/7}, fp, fm}, {t2}, {t1}][[1]];
$g2 = If[Coefficient[g2, t2, 7] != 0, Expand[#, Coefficient[#, t2, 7]] & [g2] /. {t2 → x},
R1 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fp /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14}, t1];
R2 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fm /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14}, t1];
gcd2 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
Expand[gcd2 / Coefficient[gcd2, t2, 7]] /. {t2 → x};
If[$g1 == x^7, {$f1, $f2, $g1, $g2} = {$f2, $f1, $g2, $g1}];
Return[{$f1, $f2, $g1, $g2}]]

(*findF3は$f1, $f2が必要なので, findF12G12が既に実行されている事が必要*)
findF3[f_] := Module[{R1, R2, gcd3},
R1 = Resultant[f, $f1 /. {x → (t-x)/2}, x];
R2 = Resultant[f, $f2 /. {x → (-t-x)/2}, x];
gcd3 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
$f3 = (Expand[#, Coefficient[#, t, 7]] & [gcd3]) /. {t → x}
```

r_1, r_2, r_4 を求める公式 (「Formula1.nb」参照)

(b_i, c_i は 各々 g_1, g_2 の $(7-i)$ 次の係数)

「 $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$ でない時」に r_1, r_2, r_4 を求める公式

$$R_1 = r_1^7 \quad (11)$$

$$R_1^3 + \left(\frac{b_3 b_4}{14} + b_7 \right) R_1^2 + \left(-\frac{b_3^2 b_4^2}{9604} - \frac{b_3^3 b_5}{38416} - \frac{b_4 b_5^2}{1372} + \frac{b_3 b_5 b_6}{1372} \right) R_1 + \left(\frac{b_3}{14} \right)^7 = 0 \quad (12)$$

$$r_2 = -2 r_1^2 \cdot \frac{R_1 (5488 b_3 b_4^2 - 1372 b_3^2 b_5 + 19208 b_5 b_6) + A}{R_1 (-196 b_3^4 - 10976 b_4^3 + 2744 b_3 b_4 b_5 - 76832 b_6^2) + B} \quad (13)$$

$$r_4 = \frac{-b_3}{14 r_1 r_2} \quad (14)$$

$$A = b_3^6 - 28 b_3^2 b_4^3 + 28 b_3^3 b_4 b_5 - \quad \square$$

$$196 b_4^2 b_5^2 + 98 b_3 b_5^3 + 7 b_3^4 b_6 + 196 b_3 b_4 b_5 b_6$$

$$B = b_3^5 b_4 - 28 b_3^2 b_4^2 b_5 + 14 b_3^3 b_5^2 + 28 b_3^3 b_4 b_6 \quad \square$$

「 $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0, b_7 \neq 0$ の時」に r_1, r_2, r_4 を求める公式

$$r_1 = \sqrt[7]{-b_7}, \quad r_2 = r_4 = 0$$

上のいずれの場合も r_1^7, r_2^7, r_4^7 は下の「 $R = 0$ 」の解となる。(↓評価してください)

In[*]:=

$R[\{b3_ , b4_ , b5_ , b6_ , b7_ \}] =$

$$x^3 + \left(\frac{b3 b4}{14} + b7 \right) x^2 + \left(-\frac{b3^2 b4^2}{9604} - \frac{b3^3 b5}{38416} - \frac{b4 b5^2}{1372} + \frac{b3 b5 b6}{1372} \right) x + \left(\frac{b3}{14} \right)^7 ;$$

【注】「 $b_7 = 0$ のときは $r_1 = 0$ 」となり「 $r_2 \sim r_6$ を r_1 で表す」という目的に使えません.

しかし、この時は τ によって変換すると「 $f_1 \leftrightarrow f_2, g_1 \leftrightarrow g_2$ 」となるから、この新しい g_1

で考えると (f が既約である事から)「 $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0$ 」となることはないです.

r_3, r_5, r_6 を r_1 で表す式 (「Formula2.nb」参照)

($b_i, c_i, d_i^+, d_i^-, e_i$ は, それぞれ $g_1, g_2,$
 $f^+ = f_1 + f_2, f^- = \sqrt{-7} (f_1 - f_2), \sqrt{-7} f_3$ の $(7-i)$ 次の係数)

r_1, r_2, r_4 と r_3, r_5, r_6 の関係

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_4 \\ r_4^2 & r_1^2 & r_2^2 \\ r_2^2 r_4 & r_1 r_4^2 & r_1^2 r_2 \\ r_2^4 & r_4^4 & r_1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_6 \\ r_5 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix},$$

$$\text{但し} \begin{cases} k_1 = -7 a_2 & (16) \\ k_2 = -\frac{1}{14} b_3 + \frac{21}{4} d_3^+ - \frac{7}{4} d_3^- - 14 a_3 & (17) \\ k_3 = \frac{1}{21} c_4 - \frac{1}{42} b_4 + \frac{49}{12} d_4^+ + \frac{49}{12} d_4^- - \frac{98}{3} a_4 & (18) \\ k_4 = 7 e_5 + \frac{1}{7} c_5 - \frac{3}{14} b_5 - \frac{343 (d_5^+ + d_5^-)}{4} + b_3 a_2 - 343 a_5 & (19) \end{cases}$$

上の4×3行列をmatとすると,det1,det2,det3の少なくとも一つは0でないので, r_3, r_5, r_6 も r_1 の式で表せます.

$$\begin{cases} \det 1 = \det (16, 17, 18) = -\frac{1}{7} b_6 - \frac{1}{49} b_3^2 & \square \\ \det 2 = \det (16, 17, 19) = -b_7 - \frac{4}{49} b_3 b_4 & \square \\ \det 3 = \det (16, 18, 19) = \frac{1}{49} b_4^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5 & \square \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_3 = \dots = b_6 = 0, b_7 \neq 0 \text{ のとき} & \det 2 = \det (16, 17, 19) \neq 0 \\ b_3 = 0, b_4 b_5 b_6 b_7 \neq 0 \text{ のとき} & \det 1 = \det (16, 17, 18) \neq 0 \\ b_3 \neq 0 \text{ のとき} & \det 1 = \det (16, 17, 18) \neq 0 \text{ または} \\ & \det 3 = \det (16, 18, 19) \neq 0 \end{cases}$$

§1 例を2つ

「Formula1.nb」であげた例と同じですが、今回は厳密解を求めて公式の正しさを確認します。

1. $f = x^7 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + 3$ (Gal = F_{42} , $b_3 \neq 0$)

まず $f_1, f_2, g_1, g_2, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-$ を求めます. ($\{f_1, f_2, g_1, g_2\}, f^+ = f_p, f^- = f_m$ の6式を表示しています)

```
In[*]:= f = x^7 - 2 x^5 + x^4 + 4 x^3 - x^2 - 4 x + 3 ;
{f1, f2, g1, g2} = findF12G12[f]
{a2, a3, a4, a5, a6, a7} = CoefficientList[f, x, 6] // Reverse;
{b3, b4, b5, b6, b7} = CoefficientList[g1, x, 5] // Reverse;
{c3, c4, c5, c6, c7} = CoefficientList[g2, x, 5] // Reverse;
Fp = f1 + f2 // Collect[#, x] & (*Fp=F+*)
Fm = Sqrt[-7] (f1 - f2) // Collect[#, x] & (*Fm=F-**)
{dp2, dp3, dp4, dp5, dp6, dp7} = CoefficientList[Fp, x, 6] // Reverse;
{dm2, dm3, dm4, dm5, dm6, dm7} = CoefficientList[Fm, x, 6] // Reverse;

Out[*]=
```

$$\left\{ -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{91}}{2} - \frac{23x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{91}x - 17x^2 + \sqrt{91}x^2 + \frac{3x^3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{91}x^3 + 3x^4 - \sqrt{91}x^4 - 4x^5 + x^7, -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{91}}{2} - \frac{23x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{91}x - 17x^2 - \sqrt{91}x^2 + \frac{3x^3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{91}x^3 + 3x^4 + \sqrt{91}x^4 - 4x^5 + x^7, \right.$$

$$\frac{381759}{2} - \frac{108045\sqrt{13}}{2} - \frac{220549x}{2} + \frac{64827\sqrt{13}x}{2} + 20580x^2 - 6174\sqrt{13}x^2 - \frac{2401x^3}{2} + \frac{1029\sqrt{13}x^3}{2} + 196x^4 + x^7, \frac{381759}{2} + \frac{108045\sqrt{13}}{2} - \frac{220549x}{2} - \frac{64827\sqrt{13}x}{2} + 20580x^2 + 6174\sqrt{13}x^2 - \frac{2401x^3}{2} - \frac{1029\sqrt{13}x^3}{2} + 196x^4 + x^7 \left. \right\}$$

```
Out[*]=
```

$$-3 - 23x - 34x^2 + 3x^3 + 6x^4 - 8x^5 + 2x^7$$

```
Out[*]=
```

$$21\sqrt{13} - 7\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}x^2 + 21\sqrt{13}x^3 + 14\sqrt{13}x^4$$

次に $R(=eq)$ とその解 sol を求めます

```
In[*]:= eq = R[{b3, b4, b5, b6, b7}] // Simplify;
sol = x /. Solve[eq == 0, x, Cubics -> True];
```

「 $r_1 = sol[[1]]^{(1/7)}$ 」として r_1, r_2 と r_4 の厳密解を求めます. (r_1 のみ表示しています)

```
In[*]:= findr2[r1_] :=
Simplify[-2 (r1)^2 * ((r1^7 (5488 b3 b4^2 - 1372 b3^2 b5 + 19208 b5 b6) + b3^6 - 28 b3^2 b4^3 +
28 b3^3 b4 b5 - 196 b4^2 b5^2 + 98 b3 b5^3 + 7 b3^4 b6 + 196 b3 b4 b5 b6) /
(r1^7 (-196 b3^4 - 10976 b4^3 + 2744 b3 b4 b5 - 76832 b6^2) + b3^5 b4 -
28 b3^2 b4^2 b5 + 14 b3^3 b5^2 + 28 b3^3 b4 b6)))]
```

```
In[*]:= r1 = sol[[1]]^(1/7)
r2 = findr2[r1];
r4 = -b3 / (14 r1 r2);
```

Out[*]=

$$\left(\frac{2401}{6} (-145 + 39 \sqrt{13}) - \left(1372 \times 7^{2/3} (-116506 + 32289 \sqrt{13}) \right) / \left(3 \left(\frac{1}{2} (-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{3(554388682885501321 - 153759755291383332 \sqrt{13})}) \right)^{1/3} \right) + \frac{49}{3} \left(\frac{7}{2} (-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{3(554388682885501321 - 153759755291383332 \sqrt{13})}) \right)^{1/3} \right)^{1/7}$$

「 $b_3 \neq 0$ 」なので「 $\det 1 \neq 0$ 」または「 $\det 3 \neq 0$ 」のはずです。チェックします。

```
In[*]:= det1 = -1/7 b6 - 1/49 b3^2 // Simplify
```

Out[*]=

$$-\frac{49}{2} (-611 + 189 \sqrt{13})$$

「 $\det 1 \neq 0$ 」なので (16), (17), (18) は一次独立です。よって $\text{mat}[\{1,2,3\}]$ と k_1, k_2, k_3 から, r_3, r_5, r_6 を求められます。(クラメルの公式を使います.)

```
In[*]:= rightHand = {k1, k2, k3} = {-7 a2, -1/14 b3 + 21/4 dp3 - 7/4 dm3 - 14 a3,
1/21 c4 - 1/42 b4 + 49/12 (dp4 + dm4) - 98/3 a4} // Simplify;
mat1 = mat2 = mat3 = {{r1, r2, r4}, {r4^2, r1^2, r2^2}, {r4 r2^2, r1 r4^2, r2 r1^2}};
mat1[[All, 1]] = mat2[[All, 2]] = mat3[[All, 3]] = rightHand;
{r6, r5, r3} = {Det[mat1], Det[mat2], Det[mat3]} / det1;
```

Lagrange 分解式の逆変換を使って, $x_0 \sim x_6$ (= Xs) を求めます。(ξ は1の原始7乗根です.)

```
In[*]:= Xs = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6} = 1/7
{ {1, 1, 1, 1, 1, 1}, {xi^6, xi^5, xi^4, xi^3, xi^2, xi}, {xi^5, xi^3, xi, xi^6, xi^4, xi^2},
{xi^4, xi, xi^5, xi^2, xi^6, xi^3}, {xi^3, xi^6, xi^2, xi^5, xi, xi^4}, {xi^2, xi^4,
xi^6, xi, xi^3, xi^5}, {xi, xi^2, xi^3, xi^4, xi^5, xi^6} }. {r1, r2, r3, r4, r5, r6};
```

長いので, x_0 のみ「Shortで」表示します.(通常表示では数ページに渡ります.)

```
In[*]:= x0 // Short
```

Out[*]//Short=

$$\frac{1}{7} \left(\left(\frac{2401}{6} (-145 + 39 \sqrt{13}) - \frac{\langle\langle 1 \rangle\rangle}{3 (\langle\langle 1 \rangle\rangle)^{1/3}} + \frac{49}{3} \left(\frac{7}{2} (\langle\langle 1 \rangle\rangle)^{1/3} \right)^{1/3} \right)^{1/7} + \langle\langle 9 \rangle\rangle \right)$$

この近似値を求めて, NSolveの数値解と比較します。御覧の様に小数点5桁まで一致します。

```

In[*]:= N[Xs /. {ξ → Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7]}] // Sort
Out[*]:=
{-1.3888 - 1.12271 × 10-6 i, -1.0395 + 0.82652 i, -1.0395 - 0.82652 i, 0.736558 + 0.408262 i,
 0.736559 - 0.408261 i, 0.997338 + 0.855759 i, 0.997338 - 0.855758 i}

In[*]:= x /. NSolve[f == 0, x]
Out[*]:=
{-1.3888, -1.0395 - 0.82652 i, -1.0395 + 0.82652 i, 0.736558 - 0.408262 i,
 0.736558 + 0.408262 i, 0.997338 - 0.855759 i, 0.997338 + 0.855759 i}

```

【コメント】「Formula2.nb」で述べた様に、「 $r_1 \rightarrow r_1 \xi$ 」としても「 $x_0 \sim x_6$ 」の値は変わりません。

解の簡略化

上の x_0 の表現はいくらなんでも長すぎます。原論文では理論的な事に注力していましたが、私はできるだけ簡単な表現が欲しいです。そのためには $r_2^7 \sim r_6^7$ も「 $R=0$ 」の解として求めて、近似値を使いその7乗根を選びます。またMathematicaの3次方程式の解の公式は「分母の有理化」が行われていません。（「 $x^3+px+q=0$ 」の解を「 $x=u+v$ 」とおくとき、 u^3, v^3 は2次方程式「 $t^2+qt-p^3/27=0$ 」の解です。u,vはその2解の3乗根をとる必要があり、その際「 $uv=-p/3$ 」を満たすように偏角を選ばないといけません。即ち適当なvを1つ取り、 $v, \omega v, \omega^2 v$ のうち最適なものを選ばないといけないのですが、恐らくMathematicaは「 $v=-p/(3u)$ 」としています。）従って、分母に3乗根を含まない解の公式 *solveCube* も作ります。

```

In[*]:= solveCube[f_] := Module[{delta, g, u, v, power},
  delta = Coefficient[f, x, 2];
  g = Expand[f /. {x → x - delta / 3}];
  {q, p} = CoefficientList[g, x, 2];
  {u, v} = {(-q / 2 + Sqrt[q^2 / 4 + p^3 / 27])^(1 / 3),
    (-q / 2 - Sqrt[q^2 / 4 + p^3 / 27])^(1 / 3)};
  ω = Cos[2 / 3 Pi] + I Sin[2 / 3 Pi];
  power = Mod[Round[N[(Arg[-p / 3] - Arg[u] - Arg[v])] / (2 Pi / 3)], 3];
  v = v * ω^power; (*Clear[ω];*)
  Simplify[{u + v, u ω + v ω^2, u ω^2 + v ω} - delta / 3]]

```

[1][$r_1 \sim r_6$ の近似値を求める。求めた数値解は\$ $r_1 \sim r_6$ に入れる]

```

In[*]:= sol = solveCube[eq];
r1 = sol[[1]]^(1 / 7);
$r1 = N[r1];
$r2 = findr2[$r1];
$r4 = -b3 / (14 $r1 $r2);
det1 = -1/7 b6 - 1/49 b3^2;
$mat1 = $mat2 = $mat3 =
  {{$r1, $r2, $r4}, {$r4^2, $r1^2, $r2^2}, {$r4 $r2^2, $r1 $r4^2, $r2 $r1^2}};
rightHand = {-7 a2, -1/14 b3 + 21/4 dp3 - 7/4 dm3 - 14 a3, 1/21 c4 - 1/42 b4 + 49/12 (dp4 + dm4) - 98/3 a4};
$mat1[[All, 1]] = $mat2[[All, 2]] = $mat3[[All, 3]] = rightHand;
{$r6, $r5, $r3} = {Det[$mat1], Det[$mat2], Det[$mat3]} / det1;

```

[2][r_1, r_2, r_4 の厳密値を求める. 求めた厳密値は r_1, r_2, r_4 に入れる]

```
In[*]:= posR2 = PositionSmallest[Abs[N[$r2^7 - sol[[{2, 3}]]]]][[1]] + 1;
(*R2=r2^7のsolにおけるposition*)
posR4 = 5 - posR2; (*R3=r3^7のsolにおけるposition.posR2=2→posR3=3, posR2=3→posR3=2*)
{R2, R4} = sol[[{posR2, posR4}]];
{r2, r4} = {R2, R4}^(1/7);
power1 = Mod[Round[(N[{Arg[$r2] - Arg[r2], Arg[$r4] - Arg[r4]}]) / (2 Pi / 7)], 7];
{r2, r4} = {r2, r4} ⋈^power1;
```

[3][r_3, r_5, r_6 の厳密値を求める. 求めた厳密値は r_3, r_5, r_6 に入れる]

R の式で「 $b_i \rightarrow c_i$ 」に変えた式を S とすると, r_3^7 ,
 r_5^7, r_6^7 は「 $S = 0$ 」の解です. r_2, r_4 と同様にして r_3, r_5, r_6 を求めます.

```
In[*]:= sol2 = solveCube[R[{c3, c4, c5, c6, c7}]];
posR3 = PositionSmallest[Abs[$r3^7 - sol2]][[1]]; (*R3=r3^7のsol2におけるposition*)
posR5 = PositionSmallest[Abs[$r5^7 - sol2]][[1]]; (*R5=r5^7のsol2におけるposition*)
posR6 = 6 - (posR3 + posR5);
{R3, R5, R6} = sol2[[{posR3, posR5, posR6}]];
{r3, r5, r6} = {R3, R5, R6}^(1/7);
power2 = Mod[Round[
  (N[{Arg[$r3] - Arg[r3], Arg[$r5] - Arg[r5], Arg[$r6] - Arg[r6]}]) / (2 Pi / 7)], 7];
{r3, r5, r6} = {r3, r5, r6} ⋈^power2;
```

[4][r_k の値を使って $x_0 \sim x_6$ を求める]

```
In[*]:= X = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6} = 1/7
  {{1, 1, 1, 1, 1, 1}, {⋈^6, ⋈^5, ⋈^4, ⋈^3, ⋈^2, ⋈}, {⋈^5, ⋈^3, ⋈, ⋈^6, ⋈^4, ⋈^2},
   {⋈^4, ⋈, ⋈^5, ⋈^2, ⋈^6, ⋈^3}, {⋈^3, ⋈^6, ⋈^2, ⋈^5, ⋈, ⋈^4}, {⋈^2, ⋈^4,
   ⋈^6, ⋈, ⋈^3, ⋈^5}, {⋈, ⋈^2, ⋈^3, ⋈^4, ⋈^5, ⋈^6}}.{r1, r2, r3, r4, r5, r6};
```

x_0 のみ今度は 省略なしで 表示してみます.

ず〜と短くなりました. 但し「 $\zeta = \cos(2\pi/7) + \iota \sin(2\pi/7)$ 」です.

In[]:= **x0 // Simplify**

Out[]:=

$$\frac{1}{2^{2/7} \times 3^{1/7} \times 7^{5/7}} \left(\left(2 \left(-7105 + 1911 \sqrt{13} + 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} - 3i \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} + \left(98(-145 + 39\sqrt{13}) + i 2^{2/3}(i + \sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} - 3i \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + 2^{2/3}(-1 - i\sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} + \left(98(-145 + 39\sqrt{13}) + 2^{2/3}(-1 - i\sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} - 3i \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + i 2^{2/3}(i + \sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} \right)^{1/7} \zeta^3 + \left(2 \left(-49(145 + 39\sqrt{13}) + 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} - 3i \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} \zeta^3 + \left(-98(145 + 39\sqrt{13}) + i 2^{2/3}(i + \sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} - 3i \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + 2^{2/3}(-1 - i\sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} \zeta^3 + \left(-98(145 + 39\sqrt{13}) + 2^{2/3}(-1 - i\sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} - 3i \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + i 2^{2/3}(i + \sqrt{3}) \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + 3i \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} \zeta^3 \right)$$

解の近似値を求めて、NSolveの数値解と比較します。御覧の様に小数点5桁まで一致します。

In[]:= **N[X /. {ξ → Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7]}] // Chop // Sort**

Out[]:=

{-1.3888, -1.0395 + 0.82652 i, -1.0395 - 0.82652 i, 0.736558 + 0.408262 i, 0.736558 - 0.408262 i, 0.997338 + 0.855759 i, 0.997338 - 0.855759 i}

In[]:= **x /. NSolve[f == 0, x]**

Out[]:=

{-1.3888, -1.0395 - 0.82652 i, -1.0395 + 0.82652 i, 0.736558 - 0.408262 i, 0.736558 + 0.408262 i, 0.997338 - 0.855759 i, 0.997338 + 0.855759 i}

2. $f = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 3$ (Gal = F_{42} , $b_3 = \dots = b_6 = 0$, $b_7 \neq 0$)

まず $f_1, f_2, g_1, g_2, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-$ を求めます. ($\{f_1, f_2, g_1, g_2\}$, $f^+ = f_p$, $f^- = f_m$ の 6 式を表示しています)

```
In[*]:= f = x^7 - 7 x^5 + 14 x^3 - 7 x + 3;
{f1, f2, g1, g2} = findF12G12[f];
{a2, a3, a4, a5, a6, a7} = CoefficientList[f, x, 6] // Reverse
{b3, b4, b5, b6, b7} = CoefficientList[g1, x, 5] // Reverse
{c3, c4, c5, c6, c7} = CoefficientList[g2, x, 5] // Reverse
Fp = f1 + f2 // Collect[#, x] & (*Fp=F+*)
Fm = Sqrt[-7] (f1 - f2) // Collect[#, x] & (*Fm=F-**)
{dp2, dp3, dp4, dp5, dp6, dp7} = CoefficientList[Fp, x, 6] // Reverse
{dm2, dm3, dm4, dm5, dm6, dm7} = CoefficientList[Fm, x, 6] // Reverse;
f3 = findF3[f]
e5 = Sqrt[-7] Coefficient[f3, x, 2];
```

```
Out[*]=
{-7, 0, 14, 0, -7, 3}
```

```
Out[*]=
{0, 0, 0, 0,  $\frac{2470629}{2} + \frac{823543\sqrt{5}}{2}$ }
```

```
Out[*]=
{0, 0, 0, 0,  $\frac{2470629}{2} - \frac{823543\sqrt{5}}{2}$ }
```

```
Out[*]=
39 - 112 x + 112 x^3 - 28 x^5 + 2 x^7
```

```
Out[*]=
{-28, 0, 112, 0, -112, 39}
```

```
Out[*]=
343  $\sqrt{35}$  - 2401 x + 686 x^3 - 49 x^5 + x^7
```

「 $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$ 」なので (13), (14) の式は使えず「 $r_2 = r_4 = 0$ 」です.

このとき「 $r_1 = -\sqrt[7]{b_7}$ 」ですから,

```
In[*]:= r2 = r4 = 0;
r1 = -b7^(1/7)
```

```
Out[*]=
-  $\left( \frac{2470629}{2} + \frac{823543\sqrt{5}}{2} \right)^{1/7}$ 
```

「 $b_3 = b_4 = 0$, $b_7 \neq 0$ 」なので「 $\det 2 = \det(16, 17, 19) \neq 0$ 」です.

故に $\{k_1, k_2, k_4\}$ と $\text{mat}[\{1, 2, 4\}]$ を求め r_3, r_5, r_6 を求めます.

```

In[*]:= det2 = -b7 -  $\frac{4}{49}$  b3 b4;

rightHand = { -7 a2, - $\frac{1}{14}$  b3 +  $\frac{21}{4}$  dp3 -  $\frac{7}{4}$  dm3 - 14 a3,
  7 e5 +  $\frac{1}{7}$  c5 -  $\frac{3}{14}$  b5 -  $\frac{343 (dp5 + dm5)}{4}$  + b3 a2 - 343 a5 } // Simplify
mat1 = mat2 = mat3 = { {r1, r2, r4}, {r4^2, r1^2, r2^2}, {r2^4, r4^4, r1^4} };
mat1[[All, 1]] = mat2[[All, 2]] = mat3[[All, 3]] = rightHand;
{r6, r5, r3} = {Det[mat1], Det[mat2], Det[mat3]} / det2;

Out[*]=
{49, 0, 0}

```

$x_0 \sim x_6$ を表示します。但し「 $\xi = \cos(2\pi/7) + i \sin(2\pi/7)$ 」です。

```

In[*]:= X = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6} =
  1/7 { {1, 1, 1, 1, 1, 1}, {ξ^6, ξ^5, ξ^4, ξ^3, ξ^2, ξ}, {ξ^5, ξ^3, ξ, ξ^6, ξ^4, ξ^2},
    {ξ^4, ξ, ξ^5, ξ^2, ξ^6, ξ^3}, {ξ^3, ξ^6, ξ^2, ξ^5, ξ, ξ^4},
    {ξ^2, ξ^4, ξ^6, ξ, ξ^3, ξ^5}, {ξ, ξ^2, ξ^3, ξ^4, ξ^5, ξ^6} }.
  {r1, r2, r3, r4, r5, r6} // Simplify // Chop // Sort

```

```

Out[*]=
{ - $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} - \left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7},$ 
  - $\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7} \xi^3 - \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} \xi^4, -\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} \xi^3 - \left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7} \xi^4,$ 
  - $\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7} \xi^2 - \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} \xi^5, -\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} \xi^2 - \left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7} \xi^5,$ 
  - $\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7} \xi - \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} \xi^6, -\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{1/7} \xi - \left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^{1/7} \xi^6 }$ 

```

この場合は、公式通りに $r_1 \sim r_6$ を求めても解は簡単です。

次に近似値を求めて、NSolveの数値解と比較します。御覧の様に一致します。

```

In[*]:= X /. {ξ -> Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7]} // N // Sort

Out[*]=
{-2.01893, -1.25878 + 0.215665 i, -1.25878 - 0.215665 i, 0.449255 + 0.268929 i,
  0.449255 - 0.268929 i, 1.819 - 0.119685 i, 1.819 + 0.119685 i}

In[*]:= x /. NSolve[f == 0, x]

Out[*]=
{-2.01893, -1.25878 - 0.215665 i, -1.25878 + 0.215665 i, 0.449255 - 0.268929 i,
  0.449255 + 0.268929 i, 1.819 - 0.119685 i, 1.819 + 0.119685 i}

```