

F₃₅ の導出 with Mathematica14 .0

In[*]:= ClearAll["`*"]

全ファイル (F35.nb, ..., solveSepticProgram.nb) で

「基礎体は有理数Q, 7 次方程式fはmonicで既約かつ有理数係数の整式」とします.

(原論文ではもっと一般の体で考えています.) また

「F123.nb§3 から Example.nb」までは f の6次の係数「a₁ = 0」と仮定します.

さらに a₁ と a1 など添え字の大きさのみ違う変数は同じ変数を表すものとします.

(原則として text の中では読みやすいように a₁ を使い, input 文の中では a1 を使います.)

さて, これから述べるF₃₅ という35次の整式をQ (√D) (Dはfの判別式) 上で因数分解して,

F₁, F₂ という2つの7次の整式を取り出します. さらに F₁, F₂ から,

終結式 (あるいはグレブナー基底) を用いて やはり7次の整式F₃, G₁,

G₂ を作ります. そして解の公式はこれら5つの関数の係数を使って作られます.

(正確にはG₁, G₂, F₁ ± F₂, F₃ の係数.) F₃₅ は, いわば縁の下の力持ちですが,

実はその計算が最も技術的に困難で, 計算には何日もかかり,

結果は数千行にもなります. しかし数学的な内容は (高校 + α) レベルです.

(スパコンがあれば 2~3 行のプログラムで計算できるはずですが. 通常のパソコンでも計算できる様に,

様々な工夫が必要になります.) 従って定義の確認のみして,

次のファイル (F123.nb) に進まれても全く問題ありません. なお,

F₃₅ の式自体はこのファイルの最後の方に closed cell に入れて置いてあります.

Mathematica をお持ちでない方の為に

<https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/septic/F35.txt> にも置いてあります.

§1 F₃₅ と A_i の定義

既約で有理数係数かつ monic な7次方程式

「f = x⁷ + a₁ x⁶ + a₂ x⁵ + a₃ x⁴ + a₄ x³ + a₅ x² + a₆ x + a₇ = 0」の解を x₀,

x₁, ..., x₆ とします. x₀ ~ x₆ から異なる3つの解x_i, x_j,

x_k (0 ≤ i < j < k ≤ 6) を選んでその和s_{ijk} を作ります. この時,

fの補助方程式F₃₅ とその係数 A_i を次の様に定義します.

$$F_{35} = (x - s_{012})(x - s_{013}) \cdots (x - s_{456}) = \prod_{0 \leq i < j < k \leq 6} (x - s_{ijk}) = x^{35} + A_1 x^{34} + A_2 x^{33} + \cdots + A_{34} x + A_{35}$$

F₃₅ は 7C₃ = 35 次で x₀ ~ x₆ の対称式なので その (35 - i) 次の係数を

A_i とすると A_i は有理数です. 例えば A₁, A₂, A₃ は以下の様に求まります.

```
In[*]:= vars = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6};
s = Total /@ Subsets[vars, {3}] (*=si,j,k*)
```

```
Out[*]=
```

```
{x0 + x1 + x2, x0 + x1 + x3, x0 + x1 + x4, x0 + x1 + x5, x0 + x1 + x6, x0 + x2 + x3, x0 + x2 + x4,
x0 + x2 + x5, x0 + x2 + x6, x0 + x3 + x4, x0 + x3 + x5, x0 + x3 + x6, x0 + x4 + x5, x0 + x4 + x6,
x0 + x5 + x6, x1 + x2 + x3, x1 + x2 + x4, x1 + x2 + x5, x1 + x2 + x6, x1 + x3 + x4, x1 + x3 + x5,
x1 + x3 + x6, x1 + x4 + x5, x1 + x4 + x6, x1 + x5 + x6, x2 + x3 + x4, x2 + x3 + x5, x2 + x3 + x6,
x2 + x4 + x5, x2 + x4 + x6, x2 + x5 + x6, x3 + x4 + x5, x3 + x4 + x6, x3 + x5 + x6, x4 + x5 + x6}
```

```
In[*]:= $F35[x_] = Product[x - s[[i]], {i, 1, 35}]
```

```
Out[*]=
```

```
(x - x0 - x1 - x2) (x - x0 - x1 - x3) (x - x0 - x2 - x3) (x - x1 - x2 - x3) (x - x0 - x1 - x4)
(x - x0 - x2 - x4) (x - x1 - x2 - x4) (x - x0 - x3 - x4) (x - x1 - x3 - x4) (x - x2 - x3 - x4)
(x - x0 - x1 - x5) (x - x0 - x2 - x5) (x - x1 - x2 - x5) (x - x0 - x3 - x5) (x - x1 - x3 - x5)
(x - x2 - x3 - x5) (x - x0 - x4 - x5) (x - x1 - x4 - x5) (x - x2 - x4 - x5) (x - x3 - x4 - x5)
(x - x0 - x1 - x6) (x - x0 - x2 - x6) (x - x1 - x2 - x6) (x - x0 - x3 - x6) (x - x1 - x3 - x6)
(x - x2 - x3 - x6) (x - x0 - x4 - x6) (x - x1 - x4 - x6) (x - x2 - x4 - x6) (x - x3 - x4 - x6)
(x - x0 - x5 - x6) (x - x1 - x5 - x6) (x - x2 - x5 - x6) (x - x3 - x5 - x6) (x - x4 - x5 - x6)
```

(後でも F35を定義するので、こちらは先頭に「\$」を付加しました。以下、適時、先頭に「\$や別の文字」を付加します。)

SymmetricReduction で A1,A2,A3を a1~a7 の式に直します。

SymmetricReduction [f , $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{s_1, \dots, s_n\}$]
 p における初等対称式を $s_1, \dots, s_n$ で置き換えたペア $\{p, q\}$ を与える。

【例】SymmetricReduction [$x^2 - y^2$, $\{x, y\}$, $\{s_1, s_2\}$] $\rightarrow \{s_1^2 - 2 s_2, -2 y^2\}$

```
In[*]:= AA[m_] := (-1)^m * Total[(Times @@ # &) /@ Subsets[s, {m}]]
```

```
In[*]:= A1 = SymmetricReduction[AA[1], vars, {-a1, a2, -a3, a4, -a5, a6, -a7}][[1]]
A2 = SymmetricReduction[AA[2], vars, {-a1, a2, -a3, a4, -a5, a6, -a7}][[1]]
A3 = SymmetricReduction[AA[3], vars, {-a1, a2, -a3, a4, -a5, a6, -a7}][[1]]
```

```
Out[*]=
```

```
15 a1
```

```
Out[*]=
```

```
105 a12 + 10 a2
```

```
Out[*]=
```

```
455 a13 + 140 a1 a2 + 2 a3
```

しかしこの方法では A₂₀ などになると計算量が多すぎて不可能です。

原論文ではこの課題を ニュートン恒等式 (ニュートン和) を用いて見事に解決しています。

ニュートン恒等式については例えば <https://manabitimes.jp/math/1304> をご覧ください。

【コメント】例えば A2の式をすべて挙げたものは下の closed cell に入っています。

§2 $S_i, S_{i,j}, S_{i,j,k}, T[m]$ の定義

§2-1 以下の定義では f の次数 n は 7 とは限定せず $n \geq 3$ とします.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 0 \text{ の異なる解の } i \text{ 乗の総和を } S_i \ (1 \leq i) \\ f = 0 \text{ の異なる解を } x, y \text{ としたとき } x^i y^j \text{ の総和を } S_{i,j} \ (1 \leq i \leq j) \\ f = 0 \text{ の異なる解を } x, y, z \text{ としたとき } x^i y^j z^k \text{ の総和を } S_{i,j,k} \ (1 \leq i \leq j \leq k) \end{array} \right. \quad \square$$

定義より「 $S_{i,j}=S_{j,i}, S_{i,j,k}=S_{i,k,j}=S_{j,i,k}=S_{j,k,i}=S_{k,i,j}=S_{k,j,i}$ 」です.

Mathematica では $n=7$ のとき, 次の様に定義できます.

```
In[*]:= $S[i_] := Total[vars^i]
u[{a_, b_}, {i_, j_}] := a^i b^j + a^j b^i
u[{a_, b_, c_}, {i_, j_, k_}] :=
  a^i b^j c^k + a^i b^k c^j + a^j b^i c^k + a^j b^k c^i + a^k b^i c^j + a^k b^j c^i
$S[i_, j_] :=
  u[#, {i, j}] & /@ (Subsets[vars, {2}]) / Factorial[Max[Tally[{i, j}][[All, 2]]] // Total
$S[i_, j_, k_] := u[#, {i, j, k}] & /@ (Subsets[vars, {3}]) /
  Factorial[Max[Tally[{i, j, k}][[All, 2]]] // Total // Expand
```


両辺を加えて

$$S_{n+3} + a_1 S_{n+2} + a_2 S_{n+1} + a_3 S_n = 0$$

即ち

$$-S_i = a_1 S_{i-1} + a_2 S_{i-2} + a_3 S_{i-3} \quad (i = 4, 5, 6 \dots)$$

$1 \leq i \leq 3$ に対しては次のようになります.

$$\begin{cases} -S_3 = a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3 a_3 & (\text{この証明は上と同じ}) & (\text{工}) \\ -S_2 = a_1 S_1 + 2 a_2 & (\text{これの一般的証明はちょっと難しい}) & (\text{オ}) \\ -S_1 = a_1 & (\text{解と係数の関係}) & (\text{カ}) \end{cases}$$

§2-3 $S_j, S_{i,j}, S_{i,j,k}$ の関係

次に $S_{i,j}$ と S_i の関係式は次のようになります.

$$\ln[*] := \begin{cases} S_{i,j} = S_i S_j - S_{i+j} & (i \neq j) \\ S_{i,i} = (S_i^2 - S_{2i}) / 2 & (i = j) \end{cases}$$

例えば 3 次方程式の時は, 下より「 $S_{2,3}=S_2 S_3 - S_5$, $S_{3,3}=(S_3^2 - S_6)/2$ 」などが確認できます.

$$\begin{cases} S_{2,3} = \alpha^2 \beta^3 + \alpha^3 \beta^2 + \beta^2 \gamma^3 + \beta^3 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^3 + \gamma^3 \alpha^2 & \square \\ S_2 S_3 - S_5 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - (\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5) & \square \\ S_{3,3} = \alpha^3 \beta^3 + \beta^3 \gamma^3 + \gamma^3 \alpha^3 & \square \\ S_3^2 - S_6 = (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)^2 - (\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6) & \square \end{cases}$$

$S_{i,j,k}$ を $S_{i,j}$ と S_i で表す式は次のようになります.

$$\begin{cases} S_{i,j,k} = S_i S_{j,k} - S_{i+j,k} - S_{i+k,j} & (i, j, k \text{ が全て異なるとき}) \\ S_{i,i,k} = S_k S_{i,i} - S_{i+k,i} & (i = j \neq k) \\ S_{i,k,k} = S_i S_{k,k} - S_{i+k,k} & (i \neq j = k) \\ S_{i,i,i} = (S_i S_{i,i} - S_{2i,i}) / 3 & (i = j = k) \end{cases}$$

例えば 3 次方程式の時は, 下より「 $S_{2,3,4}=S_2 S_{3,4} - S_{5,4} - S_{6,3}$, $S_{3,3,2}=S_2 S_{3,3} - S_{5,3}$, $S_{3,3,3}=(S_3 S_{3,3} - S_{6,3})/3$ 」などが確認できます.

$$\begin{aligned} S_{2,3,4} &= \alpha^2 \beta^3 \gamma^4 + \alpha^2 \beta^4 \gamma^3 + \alpha^3 \beta^2 \gamma^4 + \alpha^3 \beta^4 \gamma^2 + \alpha^4 \beta^2 \gamma^3 + \alpha^4 \beta^3 \gamma^2 \\ S_2 S_{3,4} - S_{5,4} - S_{6,3} &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (\alpha^3 \beta^4 + \alpha^4 \beta^3 + \beta^3 \gamma^4 + \beta^4 \gamma^3 + \gamma^3 \alpha^4 + \gamma^4 \alpha^3) - \\ &\quad (\alpha^5 \beta^4 + \alpha^4 \beta^5 + \beta^5 \gamma^4 + \beta^4 \gamma^5 + \gamma^5 \alpha^4 + \gamma^4 \alpha^5) - \\ &\quad (\alpha^6 \beta^3 + \alpha^3 \beta^6 + \beta^6 \gamma^3 + \beta^3 \gamma^6 + \gamma^6 \alpha^3 + \gamma^3 \alpha^6) \\ S_{3,3,2} &= \alpha^3 \beta^3 \gamma^2 + \alpha^3 \beta^2 \gamma^3 + \alpha^2 \beta^3 \gamma^3 \\ S_2 S_{3,3} - S_{5,3} &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (\alpha^3 \beta^3 + \beta^3 \gamma^3 + \gamma^3 \alpha^3) - (\alpha^5 \beta^3 + \alpha^3 \beta^5 + \beta^5 \gamma^3 + \beta^3 \gamma^5 + \gamma^5 \alpha^3 + \gamma^3 \alpha^5) \\ S_{3,3,3} &= \alpha^3 \beta^3 \gamma^3 \\ S_3 S_{3,3} - S_{6,3} &= (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) (\alpha^3 \beta^3 + \beta^3 \gamma^3 + \gamma^3 \alpha^3) - (\alpha^6 \beta^3 + \alpha^3 \beta^6 + \beta^6 \gamma^3 + \beta^3 \gamma^6 + \gamma^6 \alpha^3 + \gamma^3 \alpha^6) \end{aligned}$$

§2-4 $T[m]$ の定義と $S_i, S_{i,j}, S_{i,j,k}$ との関係

これら $S_i, S_{i,j}, S_{i,j,k}$ を用いて「 $T[m] = \sum_{x,y,z \text{ は } f \text{ の異なる解}} (x+y+z)^m$ 」が求められます。

ただし, $m \geq 1$ で,

Σ は「 f の解から異なる3つの解 x, y, z を取る全てのケースを考え, 和を取る」という意味です。

例えば 7 次方程式の場合は $T[5]$ は次のようになります。

```
In[ ]:= $T[m_] := Total[Power[#, m] & /@ Total/@Subsets[vars, {3}]]
$T[5]

Out[ ]:=
(x0 + x1 + x2)5 + (x0 + x1 + x3)5 + (x0 + x2 + x3)5 + (x1 + x2 + x3)5 + (x0 + x1 + x4)5 +
(x0 + x2 + x4)5 + (x1 + x2 + x4)5 + (x0 + x3 + x4)5 + (x1 + x3 + x4)5 + (x2 + x3 + x4)5 +
(x0 + x1 + x5)5 + (x0 + x2 + x5)5 + (x1 + x2 + x5)5 + (x0 + x3 + x5)5 + (x1 + x3 + x5)5 +
(x2 + x3 + x5)5 + (x0 + x4 + x5)5 + (x1 + x4 + x5)5 + (x2 + x4 + x5)5 + (x3 + x4 + x5)5 +
(x0 + x1 + x6)5 + (x0 + x2 + x6)5 + (x1 + x2 + x6)5 + (x0 + x3 + x6)5 + (x1 + x3 + x6)5 +
(x2 + x3 + x6)5 + (x0 + x4 + x6)5 + (x1 + x4 + x6)5 + (x2 + x4 + x6)5 + (x3 + x4 + x6)5 +
(x0 + x5 + x6)5 + (x1 + x5 + x6)5 + (x2 + x5 + x6)5 + (x3 + x5 + x6)5 + (x4 + x5 + x6)5
```

以下 $m \geq 1, i, j,$

$k \geq 0$ に対して「 $\binom{m}{i} = mC_i, \binom{m}{i, j, k} = \frac{m!}{i! j! k!}$ (但し $i + j + k = m$)」とします。

上の $T[5]$ を展開したときの同類項の個数を考えます。

上の例で $x0^5$ の個数は $(x0 + xj + xk)^5$ ($0, j, k$ はすべて異なる「 x の添え数字」)

の個数と等しいから $\binom{6}{2} (j, k \text{ を選ぶ組み合わせ } {}_6C_2 = 15 \text{ です。}$

次に $x0^2 x1^3$ の個数を求めます。 $(x0 + x1 + x2)^5$ を展開したときの $x0^2 x1^3$ の個数は,

多項定理より $5! / (2! \times 3!) = \binom{5}{2}$ です。

$(x0 + x1 + xk)^5$ ($0, 1, k$ はすべて異なる「 x の添え数字」) の個数は $\binom{5}{1} = {}_5C_1$ なので,

$T[5]$ の $x0^2 x1^3$ の個数は $5 * \binom{5}{2}$ です。

更に $x0^2 x1^2 x2^1$ の個数を求めます。

$(x0 + x1 + x2)^5$ を展開したときの $x0^2 x1^2 x2^1$ の個数は,

多項定理より $5! / (2! \times 2! \times 1!) = \binom{5}{2, 2, 1}$ です。

$(x0 + x1 + x2)^5$ ($0, 1, k$ はすべて異なる「 x の添え数字」) の個数は 1 なので,

$T[5]$ の $x0^2 x1^2 x2^1$ の個数は $5! / (2! \times 2! \times 1!) = \binom{5}{2, 2, 1}$ です。

以上と $x_0 \sim x_6$ の対称性より, $T[5]$ は次と等しいです。

$$T[5] = 15 (x_0^5 + x_1^5 + \dots + x_6^5) + 5 * \binom{5}{2} (x_0^2 x_1^3 + x_0^3 x_1^2 + \dots + x_5^2 x_6^3 + x_5^3 x_6^2) + \\ 5 * \binom{5}{1} (x_0^1 x_1^4 + x_0^4 x_1^1 + \dots + x_5^1 x_6^4 + x_5^4 x_6^1) +$$

$$\binom{5}{2, 2, 1} (x_0^2 x_1^2 x_2^1 + x_0^2 x_1^1 x_2^2 + \cdots + x_4^2 x_5^2 x_6^1 + x_4^2 x_5^1 x_6^2) + \\ \binom{5}{3, 1, 1} (x_0^3 x_1^1 x_2^1 + x_0^1 x_1^3 x_2^1 + \cdots + x_4^1 x_5^3 x_6^1 + x_4^1 x_5^1 x_6^3)$$

即ち

$$T[5] = 15 S_5 + 5 * \binom{5}{2} S_{2,3} + 5 * \binom{5}{1} S_{1,4} + \binom{5}{2, 2, 1} S_{2,2,1} + \binom{5}{3, 1, 1} S_{3,1,1}$$

一般に $m = 1, 2, 3 \dots$ に対し

$$T[m] =$$

$$\sum_{x,y,z \text{ は } f \text{ の異なる解}} (x+y+z)^m = 15 S_m + 5 \sum_{i \geq j, i+j=m} \binom{m}{i} S_{i,j} + \sum_{i \geq j \geq k, i+j+k=m} \binom{m}{i, j, k} S_{i,j,k}$$

§2-5 $T[m]$ の値から A_i を求める

定義より $T[m]$ は F_{35} の異なる解の m 乗の総和と一致します.

故にニュートン恒等式の $i \leq n$ の式で「 $S_i \rightarrow T[i]$ 」, $a_i \rightarrow A_i$ と入れ替えて,

$$A_0 = 1, \quad -i A_i = T[1] A_{i-1} + T[2] A_{i-2} + \cdots + T[i-1] A_1 + T[i] \quad (1 \leq i \leq 35)$$

$T[1], T[2], \dots, T[35]$ の値は求まるので, A_i を $A_1 \sim A_{i-1}$ で表すことができ、
 A_i が求まります. 結局 §2-2 では 方程式の係数から解の k 乗の総和を求めたのに対し、
 ここでは逆に解の k 乗の総和から方程式の係数を求めます. 上手いです.

【コメント】 §2-2 の【コメント】の例で言うと (カ) ~ (工) より「 S_1 が求まれば a_1 」,
 「 S_1, S_2, a_1 から a_2 」, 「 S_1, S_2, S_3, a_1, a_2 から a_3 」が求まります.
 この様にして $n = 3$ の時は S_1, S_2, S_3 から a_1, a_2, a_3 が求まります.

§3 Mathematica による $S_i, S_{i,j}, S_{i,j,k}, T[m]$ の計算

§3-1 S_i の計算

以上の式とMathematica を使って「 $S_i \rightarrow S_{i,j} \rightarrow S_{i,j,k} \rightarrow T[m] \rightarrow A_i \rightarrow F_{35}$ 」の順に求めています。まず $S_i = S[i]$ はニュートン恒等式より、次の様に計算されます。 F_{35} を計算するためなので S_i ($1 \leq i \leq 35$) を求めます。この計算は数分（私の環境で約8分）かかるので結果のみを closed cell に入れてあります。

```
as = {a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7};
S[1] = -a1;
S[i_] := S[i] = If[i <= 7, Simplify[-Sum[as[[k]] S[i - k], {k, 1, i - 1}] - i as[[i]], Simplify[-Sum[as[[k]] S[i - k], {k, 1, 7}]]], Simplify[-Sum[as[[k]] S[i - k], {k, 1, 7}]]]
Stable = Table[S[k], {k, 1, 35}]
```

（結果は↓の中 . 評価してください）

```
In[*]:= S[i_] := Stable[[i]]
```

§3-2 $S_{i,j}, S_{i,j,k}, T[m]$ の計算

$S_{i,j}, S_{i,j,k}, T[m]$ ($1 \leq i, j, m \leq 35$) については、漸化式ではなく、 S_i ($1 \leq i \leq 35$) の値から直接計算できます。

```
In[*]:= S[{i_, j_}] := If[i != j, S[i] * S[j] - S[i + j], (S[i]^2 - S[2 i]) / 2] // Simplify
S[{i_, j_, k_}] := Which[i == j == k, (S[i] * S[{i, i}] - S[{2 i, i}]) / 3, i == j && j != k, S[k] * S[{i, i}] - S[{i + k, i}], i != j && j == k, S[i] * S[{k, k}] - S[{i + k, k}], (i - j) (j - k) (i - k) != 0, S[i] * S[{j, k}] - S[{i + j, k}] - S[{i + k, j}]] // Simplify
```

$T[m]$ の定義のために「 $S2[{i, j}] = \binom{i+j}{i} S[i, j]$,

$S3[{i, j, k}] = \binom{i+j+k}{i, j, k} S[i, j, k]$ 」と定義します。

```
In[*]:= S2[x_List] := Multinomial[x[[1]], x[[2]]] * S[x]
S3[x_List] := Multinomial[x[[1]], x[[2]], x[[3]]] * S[x]
```

これらを使って $T[m]$ を定義します。

```
In[*]:= T[m_] := 15 S[m] + 5 Total[S2/@IntegerPartitions[m, {2}]] + Total[S3/@IntegerPartitions[m, {3}]] // Simplify
```

少し例を見ておきます。

```
In[*]:= T[1]
```

```
Out[*]:=
```

- 15 a1

```
In[*]:= T[2]
Out[*]=

$$5 (3 a1^2 - 4 a2)$$

```

```
In[*]:= T[3]
Out[*]=

$$-15 a1^3 + 30 a1 a2 - 6 a3$$

```

これらは、§1の\$T[m]の結果を、基本対称式を使って変形した結果と一致します。

```
In[*]:= SymmetricReduction[#, vars, {-a1, a2, -a3, a4, -a5, a6, -a7}][[1]] & /@
{$T[1], $T[2], $T[3]}
Out[*]=

$$\{-15 a1, 15 a1^2 - 20 a2, -15 a1^3 + 30 a1 a2 - 6 a3\}$$

```

§3-3 A_i ($1 \leq i \leq 35$) の計算と F_{35} の式

$T[k]$ ($1 \leq k \leq 35$) の値から A_i ($1 \leq i \leq 35$) の値を求めるには、次の漸化式を使います。

```
In[*]:= A[0] = 1;
A[k_] := A[k] = -1 / k SymmetricReduction[Sum[T[i] * A[k - i], {i, 1, k}],
vars, {-a1, a2, -a3, a4, -a5, a6, -a7}][[1]] // Simplify
```

最初に求めた A_1, A_2, A_3 の結果と比較すると、確かに一致しています。

```
In[*]:= A[1]
Out[*]=

$$15 a1$$

```

```
In[*]:= A[2]
Out[*]=

$$5 (21 a1^2 + 2 a2)$$

```

```
In[*]:= A[3]
Out[*]=

$$455 a1^3 + 140 a1 a2 + 2 a3$$

```

以上から F_{35} は次の様に求まります。しかし計算には非常に時間が掛かるので 入力は text形式とし、結果は下のclosed cell に入れてあります。

```
As=Table[A[k], {k, 1, 35}]
F35 = x^35 + Sum[As[[k]] x^(35 - k), {k, 1, 35}];
```

(F_{35} は↓にあります。非常に長いです。評価してください)

```
In[118]:=
F35 // Short
Out[118]//Short=

$$-a5^7 - 2 a2^2 a5^5 a6 + 8 a4 a5^5 a6 - a2^4 a5^3 a6^2 +$$


$$\ll 99 \gg + (1365 a1^4 + 910 a1^2 a2 + 45 a2^2 + 32 a1 a3 - 8 a4) x^{31} +$$


$$(455 a1^3 + 140 a1 a2 + 2 a3) x^{32} + 5 (21 a1^2 + 2 a2) x^{33} + 15 a1 x^{34} + x^{35}$$

```

§3 - 4 例

■ Gal = F₁₄ =

D₇ の方程式「 $x^7 + 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 3 = 0$ 」に対して f₃₅ を求めて因数分解してみます.

```
In[*]:= f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} -> {0, 0, 4, 1, -2, 2, 3}]
```

```
Out[*]=
```

```
31 104 - 456 192 x + 2 460 672 x^2 - 6 314 400 x^3 + 8 701 608 x^4 - 5 329 568 x^5 -
1 558 016 x^6 + 4 343 495 x^7 + 1 410 916 x^8 - 7 779 816 x^9 + 4 672 350 x^10 + 3 918 452 x^11 -
3 562 668 x^12 - 1 014 192 x^13 + 1 955 754 x^14 + 493 776 x^15 - 269 874 x^16 + 571 536 x^17 +
812 340 x^18 + 333 945 x^19 + 195 750 x^20 + 110 184 x^21 + 50 280 x^22 - 14 064 x^23 +
78 x^24 - 1692 x^25 + 684 x^26 - 258 x^27 + 834 x^28 + 32 x^29 + 20 x^30 - 8 x^31 + 8 x^32 + x^35
```

```
In[*]:= Factor[f35]
```

```
Out[*]=
```

```
(27 - 54 x + 18 x^2 + 29 x^3 + 2 x^4 - 10 x^5 + x^7)
(-1 + 8 x - 16 x^2 + 15 x^3 - 6 x^4 + 2 x^5 + x^7) (-9 + 42 x + 2 x^2 + 25 x^3 + 2 x^4 + 8 x^5 + x^7)
(128 + 160 x^3 + 56 x^4 + 352 x^6 + 469 x^7 + 176 x^8 + 7 x^10 + 10 x^11 + x^14)
```

■ Gal = F₄₂ の方程式「 $x^7 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0$ 」

に対して f₃₅ を求めて因数分解してみます.

```
In[*]:= f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} -> {0, -2, 1, 4, -1, -4, 3}]
```

```
Out[*]=
```

```
15 111 - 276 132 x + 1 426 637 x^2 - 3 680 789 x^3 + 4 781 023 x^4 - 863 982 x^5 - 6 771 888 x^6 +
9 142 466 x^7 - 937 547 x^8 - 8 716 581 x^9 + 7 475 377 x^10 + 2 428 894 x^11 - 7 106 606 x^12 +
2 272 884 x^13 + 3 476 289 x^14 - 2 909 525 x^15 - 415 490 x^16 + 1 819 025 x^17 - 422 522 x^18 -
537 798 x^19 + 420 339 x^20 + 120 094 x^21 - 137 300 x^22 + 13 676 x^23 + 44 668 x^24 -
8463 x^25 - 9548 x^26 + 2175 x^27 + 978 x^28 - 643 x^29 - 26 x^30 + 148 x^31 + 2 x^32 - 20 x^33 + x^35
```

```
In[*]:= Factor[f35]
```

```
Out[*]=
```

```
(207 - 102 x - 67 x^2 + 887 x^3 + 473 x^4 -
472 x^5 + 15 x^6 + 415 x^7 + 65 x^8 - 58 x^9 + 19 x^10 + 6 x^11 - 8 x^12 + x^14)
(73 - 1298 x + 6276 x^2 - 15 422 x^3 + 22 924 x^4 - 21 630 x^5 + 12 825 x^6 - 5247 x^7 + 4299 x^8 - 5985 x^9 +
5329 x^10 - 2439 x^11 + 430 x^12 + 113 x^13 + 321 x^14 - 192 x^15 + 72 x^16 + 33 x^17 - 4 x^18 - 12 x^19 + x^21)
```

f₃₅ を, 更に $Q(\sqrt{D})$ 上で因数分解して得られる式が f₁,

f₂ ですが, これについては「F123.nb」をご覧ください.