解の公式その1 (r_1, r_2, r_4 を求める) with Mathematica14.0

§0 準備

```
In[◦]:= ClearAll["`*"]
```

F35↓（評価してください）

```
findF12G12[f_] := Module[{f35, factors, pos1, pos2, f12, d,R1,R2, f12factors,u,v,fp,fm,g1,g2,g
Clear[a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7];
  f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} → Reverse@CoefficientList[f, x,
  factors = FactorList[f35];
  pos1 = Position[Exponent[factors⟦All, 1⟧, x], 14]⟦1, 1⟧;
  f12 = factors⟦pos1⟧⟦1⟧;
  d = Sqrt@Discriminant[f12, x];
  f12factors= FactorList[f12, Extension → d];
  pos2 = Flatten@Position[Exponent[f12factors⟦All, 1⟧, x], 7];
  {$f1,$f2}=(Expand[#/Coefficient[#, x, 7]] &) /@f12factors⟦pos2⟧⟦All, 1⟧;
  u=-(t1+t2)/14+(t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
  v=-(t1+t2)/14-(t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
fp=($f1/.{x→u})+($f2/.{x→v});
fm=Sqrt[-7](($f1/.{x→u})-($f2/.{x→v}));
g1=GroebnerBasis[{f/.{x→(t1+t2)/7},fp,fm},{t1},{t2}]⟦1⟧;
$g1=If[Coefficient[g1,t1,7]=!=0,Expand[#/Coefficient[#,t1,7]]&[g1]/.{t1→x},
R1=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fp/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 R2=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fm/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
gcd1=PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
Expand[gcd1/Coefficient[gcd1,t1,7]]/.{t1→x}];
g2=GroebnerBasis[{f/.{x→(t1+t2)/7},fp,fm},{t2},{t1}]⟦1⟧;
$g2=If[Coefficient[g2,t2,7]=!=0,Expand[#/Coefficient[#,t2,7]]&[g2]/.{t2→x},
R1=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fp/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 R2=Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7},fm/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7](t1-t2)/14,v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7]
 gcd2=PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
Expand[gcd2/Coefficient[gcd2,t2,7]]/.{t2→x}];
If[$g1===x^7,{$f1,$f2,$g1,$g2}={$f2,$f1,$g2,$g1}];
Return[{$f1,$f2,$g1,$g2}]]

(*findF3は$f1,$f2が必要なので, findF12G12が既に実行されている事が必要*)
findF3[f_]:=Module[{R1,R2,gcd3},
R1=Resultant[f,$f1/.{x→(t-x)/2},x];
 R2=Resultant[f,$f2/.{x→(-t-x)/2},x];
 gcd3=PolynomialGCD[R1,R2,Extension→Automatic];
 $f3=(Expand[#/Coefficient[#,t,7]]&[gcd3])/.{t→x}]
```

§1. r_1, r_2, r_4 の関係式

定義より

```
In[∘]:= G1 = (x - (r1 + r2 + r4)) (x - (ξ r1 + ξ ^2 r2 + ξ ^4 r4)) (x - (ξ^2 r1 + ξ ^4 r2 + ξ r4))
    (x - (ξ^3 r1 + ξ ^6 r2 + ξ ^5 r4)) (x - (ξ^4 r1 + ξ r2 + ξ ^2 r4))
    (x - (ξ^5 r1 + ξ ^3 r2 + ξ ^6 r4)) (x - (ξ^6 r1 + ξ ^5 r2 + ξ ^3 r4));
```

これを「$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^6 = 0$」を使って変形すると,

```
In[∘]:= G1 = PolynomialMod[G1, Cyclotomic[7, ξ]] // Collect[#, x] & // Simplify
```

Out[∘]=

$$-r1^7 - r2^7 - 7\,r1^2\,r2^4\,r4 - 7\,r1^4\,r2\,r4^2 - 7\,r1\,r2^2\,r4^4 - r4^7 - 7\left(r1^5\,r2 + r2^5\,r4 + r1^2\,r2^2\,r4^2 + r1\,r4^5\right)x - 14\left(r1^3\,r2^2 + r2^3\,r4^2 + r1^2\,r4^3\right)x^2 - 7\left(r1\,r2^3 + r1^3\,r4 + r2\,r4^3\right)x^3 - 14\,r1\,r2\,r4\,x^4 + x^7$$

これと $x^7 + b_1 x^6 + b_2 x^5 + b_3 x^4 + b_4 x^3 + b_5 x^2 + b_6 x + b_7$ と比べて少し変形すると「$b_1 = b_2 = 0$」かつ以下の式が成り立ちます.

$$(\sharp)\quad \begin{cases} r_1 r_2 r_4 = -b_3 / 14 & (6) \\ r_1 r_2^3 + r_2 r_4^3 + r_4 r_1^3 = -b_4 / 7 & (7) \\ r_1^3 r_2^2 + r_2^3 r_4^2 + r_4^3 r_1^2 = -b_5 / 14 & (8) \\ r_1^5 r_2 + r_2^5 r_4 + r_4^5 r_1 = -b_6 / 7 - b_3^2 \big/ 197 & (9) \\ r_1^7 + r_2^7 + r_4^7 = -b_7 - b_3 b_4 / 14 & (10) \end{cases}$$

§2. r_1,r_2,r_4 を求める公式(b_3≠0 のとき)

「b_3≠0 のとき」としてありますが，下の公式の(13)(14)以外は「b_3=0 のとき」も成り立ちます．さて(#)の生成するイデアルのグレブナー基底を作り r_2, r_4 を r_1 の式で表します．原論文ではMapleを使っていて(かつMapleのグレブナー基底はMathematicaのより高機能の様なので) それを厳密に再現することはできませんでした．例えば，原論文では，「b_3=0」の時は (tb_3-1)を(#)に加えたイデアルのt を消去したグレブナー基底を作り(1.5秒)，それから更に r_4 を消去しているようですが，私は初めから r_4 を消去しました．その計算は2分ほど掛かるので，下のコマンドはテキスト形式で，結果はclosed cell に入れてあります．

gb = GroebnerBasis[{ r1 r2 r4 + b3/14, r1 r2^3 + r2 r4^3 + r4 r1^3 + b4/7, r1^3 r2^2 + r2^3 r4^2 + r4^3 r1^2 + b5/14, r1^5 r2 + r2^5 r4 + r4^5 r1 + b6/7 + b3^2/196, r1^7 + r2^7 + r4^7 + b7 + b3 b4/14}, {r2, r1, b7, b6, b5, b4, b3}, { r4}];(gbの結果は↓です．評価してください.)

gbは 209 個の式から成り立ちますが，最初の3式は $b_1 \sim b_7$ の関係式です．

In[◦]:= gb[[1 ;; 3]]

Out[◦]=

$$\{b3^5 - 16\,b3\,b4^3 + 20\,b3^2\,b4\,b5 + 28\,b5^3 - 4\,b3^3\,b6 - 112\,b4\,b5\,b6 + 112\,b3\,b6^2,\ b3^2\,b4 + b5^2 - 4\,b4\,b6 + 14\,b3\,b7,\ -b3^4 + 16\,b4^3 + 8\,b3\,b4\,b5 + 4\,b3^2\,b6 - 112\,b6^2 + 392\,b5\,b7\}$$

$b_1 \sim b_7$ 以外の変数を考えると，第4式は r_1 のみの式です．

In[◦]:= gb[[4]] // Collect[#, {r1^7, r1^14}] &

Out[◦]=

$$b3^7 + (-10\,976\,b3^2\,b4^2 - 2744\,b3^3\,b5 - 76\,832\,b4\,b5^2 + 76\,832\,b3\,b5\,b6)\,r1^7 + (7\,529\,536\,b3\,b4 + 105\,413\,504\,b7)\,r1^{14} + 105\,413\,504\,r1^{21}$$

これから $r_1{}^7$ についての3次方程式が得られます．
また 第57式は r_1 とr_2 の式 かつ r_2 については1次ですから r_2 が r_1 の式で表せます．

In[◦]:= gb[[57]] // Collect[#, {r1, r2}] &

Out[◦]=

$$(-2\,b3^6 + 56\,b3^2\,b4^3 - 56\,b3^3\,b4\,b5 + 392\,b4^2\,b5^2 - 196\,b3\,b5^3 - 14\,b3^4\,b6 - 392\,b3\,b4\,b5\,b6)\,r1^2 + (-10\,976\,b3\,b4^2 + 2744\,b3^2\,b5 - 38\,416\,b5\,b6)\,r1^9 + (-b3^5\,b4 + 28\,b3^2\,b4^2\,b5 - 14\,b3^3\,b5^2 - 28\,b3^3\,b4\,b6)\,r2 + (196\,b3^4 + 10\,976\,b4^3 - 2744\,b3\,b4\,b5 + 76\,832\,b6^2)\,r1^7\,r2$$

In[◦]:= r2 /. Solve[% == 0, r2][[1]] (*r_2をr_1で表した式*)

Out[◦]=

$$-\left(\left(2\,(b3^6\,r1^2 - 28\,b3^2\,b4^3\,r1^2 + 28\,b3^3\,b4\,b5\,r1^2 - 196\,b4^2\,b5^2\,r1^2 + 98\,b3\,b5^3\,r1^2 + 7\,b3^4\,b6\,r1^2 + 196\,b3\,b4\,b5\,b6\,r1^2 + 5488\,b3\,b4^2\,r1^9 - 1372\,b3^2\,b5\,r1^9 + 19\,208\,b5\,b6\,r1^9)\right) \Big/ \left(b3^5\,b4 - 28\,b3^2\,b4^2\,b5 + 14\,b3^3\,b5^2 + 28\,b3^3\,b4\,b6 - 196\,b3^4\,r1^7 - 10\,976\,b4^3\,r1^7 + 2744\,b3\,b4\,b5\,r1^7 - 76\,832\,b6^2\,r1^7\right)\right)$$

故に，$R_1 = r_1{}^7$ とおくと，R_1 は次の3次方程式の解で，R_1 の7乗根である r_1 を決めると，
r_2，r_4 も決まります．また $r_2{}^7$，$r_4{}^7$ も同じ3次方程式の解です．

「$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$ でない時」に r_1, r_2, r_4 を求める公式

$$
\begin{cases}
R_1 = r_1^{\,7} & (11) \\
R_1^{\,3} + \left(\frac{b_3\, b_4}{14} + b_7\right) R_1^{\,2} + \left(-\frac{b_3^{\,2}\, b_4^{\,2}}{9604} - \frac{b_3^{\,3}\, b_5}{38\,416} - \frac{b_4\, b_5^{\,2}}{1372} + \frac{b_3\, b_5\, b_6}{1372}\right) R_1 + \left(\frac{b_3}{14}\right)^7 = 0 & (12) \\
r_2 = -2\, r_1^{\,2} \cdot \frac{R_1 \left(5488\, b_3\, b_4^{\,2} - 1372\, b_3^{\,2}\, b_5 + 19\,208\, b_5\, b_6\right) + A}{R_1 \left(-196\, b_3^{\,4} - 10\,976\, b_4^{\,3} + 2744\, b_3\, b_4\, b_5 - 76\,832\, b_6^{\,2}\right) + B} & (13) \\
r_4 = \frac{-b_3}{14\, r_1\, r_2} & (14) \\
A = b_3^{\,6} - 28\, b_3^{\,2}\, b_4^{\,3} + 28\, b_3^{\,3}\, b_4\, b_5 - 196\, b_4^{\,2}\, b_5^{\,2} + 98\, b_3\, b_5^{\,3} + 7\, b_3^{\,4}\, b_6 + 196\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6 & \square \\
B = b_3^{\,5}\, b_4 - 28\, b_3^{\,2}\, b_4^{\,2}\, b_5 + 14\, b_3^{\,3}\, b_5^{\,2} + 28\, b_3^{\,3}\, b_4\, b_6 & \square
\end{cases}
$$

適用条件で 「$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$ でない時」とありますがこれは後述します.
なおこの適用条件を満たす時（12）が重解を持たないことが言えるので (後述),
「（13）の分母と分子が共に0」となる時は,（12）の解を適切に取ることが出来ます.

§3. r_1,r_2,r_4 を求める公式(b_3=0 のとき)

「$b_3=0$」のときも（12）は成り立ちますが，「$b_3=b_4=0$」のときは （13），（14）は不成立です．（6）より $r_1 r_2 r_4=0$．ここで $r_4=0$ としても一般性を失いません．
このとき（7），（8），（9），（10）より

$$\begin{cases} r_1 r_2^3 = -b_4/7 & (7)' \\ r_1^3 r_2^2 = -b_5/14 & (8)' \\ r_1^5 r_2 = -b_6/7 & (9)' \\ r_1^7 + r_2^7 = -b_7 & (10)' \end{cases}$$

§3 - 1 $b_3=b_4$=0 のとき

「$r_1=0$ または $r_2=0$」となるので「$b_3=b_4=b_5=b_6=0$」となります．
ここで「$r_2=0$」としても構いません．（10）' より $r_1^7=-b_7$．故に $r_1=\sqrt[7]{-b_7}$

「$b_7=0$ のときは $r_1=0$ 」となり「$r_2\sim r_6$ を r_1 で表す」という目的に使えません．しかし，
この時はτによって変換すると「$f_1\leftrightarrow f_2$， $g_1\leftrightarrow g_2$」となるから，この新しい g_1 で考えると
(fが既約であることから)「$b_3=b_4=b_5=b_6=b_7=0$」となることはないです．

§3 - 2 b_3=0, b_4≠0 のとき

「（8）'×（9）'/（7）'」より「$r_1^7=\dfrac{-b_5 b_6}{14 b_4}$」，

故に（A）「$r_1=\sqrt[7]{\dfrac{-b_5 b_6}{14 b_4}}$」．　また（9）' より （B）「$r_2=\dfrac{2 r_1^2 b_4}{b_5}$」

また，$b_3=0$ のとき（12）は「$R_1=0$」または （C）「$R_1^2+b_7 R_1+\left(-\dfrac{b_4 b_5^2}{1372}\right)$」．ここで
「（7）'（9）'=（（8）'）^{2}」より「$b_5^2=b_4 b_6$」．これを使うと
「r_1^7 と r_2^7 は（C）の2解である事」と「（13）と（B）が一致する事」が言えます．

故に，この場合は「$b_3\neq0$」の場合の公式（12），（13），（14）が成り立つことが分かります．
即ち「$b_3\neq0$」の場合に統合できます． （原論文では統合はせず，3 つに分けています）

§4 例を２つ

(12) の方程式を Rと置きます.

In[ ]:=
$$R = x^3 + \left(\frac{b_3\, b_4}{14} + b_7\right) x^2 + \left(-\frac{b_3{}^2\, b_4{}^2}{9604} - \frac{b_3{}^3\, b_5}{38416} - \frac{b_4\, b_5{}^2}{1372} + \frac{b_3\, b_5\, b_6}{1372}\right) x + \left(\frac{b_3}{14}\right)^7;$$

1. $f = x^7 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + 3$ $(\mathrm{Gal} = F_{42})$

まず, g1と {b3, b4, b5, b6, b7} を求めます

In[ ]:=
```
f = x^7 - 2 x^5 + x^4 + 4 x^3 - x^2 - 4 x + 3 ;
findF12G12[f];
g1 = %[[3]]
{b3, b4, b5, b6, b7} = CoefficientList[g1, x, 5] // Reverse
```

Out[ ]=
$$\frac{381759}{2} - \frac{108045\sqrt{13}}{2} - \frac{220549\, x}{2} + \frac{64827\sqrt{13}\, x}{2} + 20580\, x^2 - 6174\sqrt{13}\, x^2 - \frac{2401\, x^3}{2} + \frac{1029\sqrt{13}\, x^3}{2} + 196\, x^4 + x^7$$

Out[ ]=
$$\left\{196,\ -\frac{2401}{2} + \frac{1029\sqrt{13}}{2},\ 20580 - 6174\sqrt{13},\ -\frac{220549}{2} + \frac{64827\sqrt{13}}{2},\ \frac{381759}{2} - \frac{108045\sqrt{13}}{2}\right\}$$

次に Rとその解solを求めます

In[ ]:=
```
R /. AssociationThread[{b₃, b₄, b₅, b₆, b₇} → {b3, b4, b5, b6, b7}] // Simplify
sol = x /. NSolve[% == 0, x]
```

Out[ ]=
$$105413504 - \frac{117649}{2}\left(-22501 + 6261\sqrt{13}\right) x - \frac{2401}{2}\left(-145 + 39\sqrt{13}\right) x^2 + x^3$$

Out[ ]=
{-5986.19, 25.2072, 698.588}

r_2 を求め易くするため（13）を関数にします.

```
findr2[r1_] :=
 Simplify[-2 (r1)^2 * ((r1^7 (5488 b3 b4^2 - 1372 b3^2 b5 + 19208 b5 b6) + b3^6 - 28 b3^2 b4^3 +
        28 b3^3 b4 b5 - 196 b4^2 b5^2 + 98 b3 b5^3 + 7 b3^4 b6 + 196 b3 b4 b5 b6) /
      (r1^7 (-196 b3^4 - 10976 b4^3 + 2744 b3 b4 b5 - 76832 b6^2) + b3^5 b4 -
        28 b3^2 b4^2 b5 + 14 b3^3 b5^2 + 28 b3^3 b4 b6))]
```

「r_1 = sol[[1]]^(1/7)」の場合に r_2 と $r_2{}^7$ を求めます.

In[∘]:=
```
r1 = sol⟦1⟧^(1/7)
r2 = findr2[r1]
r2^7
```

Out[∘]=

3.12106 + 1.50303 ⅈ

Out[∘]=

0.988661 + 1.23974 ⅈ

Out[∘]=

$25.2072 - 3.55271 \times 10^{-15}$ ⅈ

確かに「 $r_2{}^7$ も R = 0 の解の一つ（ = sol⟦2⟧）」となっています.

次に「r_1 = sol⟦2⟧^(1 / 7)」の場合に r_2 と $r_2{}^7$ を求めます.

In[∘]:=
```
r1 = sol⟦2⟧^(1/7)
r2 = findr2[r1]
r2^7
```

Out[∘]=

1.58569

Out[∘]=

2.54869

Out[∘]=

698.588

「$r_2{}^7$ = sol⟦3⟧」となっています. 最後に「r_1 = sol⟦3⟧^(1 / 7)」の場合に r_2 と $r_2{}^7$ を求めます.

In[∘]:=
```
r1 = sol⟦3⟧^(1/7)
r2 = findr2[r1]
r2^7
```

Out[∘]=

2.54869

Out[∘]=

-3.46412

Out[∘]=

-5986.19

「$r_2{}^7$ = sol⟦1⟧」となっています.

2. $f = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 3$ (Gal = F_{42})

まず, g1と {b3, b4, b5, b6, b7} を求めます

In[∘]:=
```
f = f = x^7 - 7 x^5 + 14 x^3 - 7 x + 3;
findF12G12[f];
g1 = %[[3]]
{b3, b4, b5, b6, b7} = CoefficientList[g1, x, 5] // Reverse
```

Out[∘]=

$$\frac{2470629}{2} + \frac{823543\sqrt{5}}{2} + x^7$$

Out[∘]=

$$\left\{0, 0, 0, 0, \frac{2470629}{2} + \frac{823543\sqrt{5}}{2}\right\}$$

次に Rとその解solを求めます

In[∘]:=
```
R /. AssociationThread[{b₃, b₄, b₅, b₆, b₇} → {b3, b4, b5, b6, b7}] // Simplify
sol = x /. NSolve[% == 0, x]
```

Out[∘]=

$$\frac{823543}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) x^2 + x^3$$

Out[∘]=

$$\left\{-2.15606 \times 10^6, 0., 0.\right\}$$

「r_1 = sol[[1]]^(1/7) ζ^k ($0 \le k \le 6$)」です.
また (13), (14) の式は使えませんが「$r_2 = r_4 = 0$」です.

In[∘]:=
```
ζ = Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7];
```

In[∘]:=
```
r1 = sol[[1]]^(1/7) × Table[ζ^k, {k, 0, 6}]
```

Out[∘]=

$$\{7.23633 + 3.48483\,i, 1.78723 + 7.83035\,i, -5.0077 + 6.27945\,i,$$
$$-8.03172 - 4.44089 \times 10^{-16}\,i, -5.0077 - 6.27945\,i, 1.78723 - 7.83035\,i, 7.23633 - 3.48483\,i\}$$

これらの r_1 の値のうち, どの値を選んでも,
最終の結果 (x_k の集合) は同じになります. 「FormulaPart2.nb」を御覧ください.

§5. 式(12)の判別式

式 (12) の判別式をDとすると , D は 次のd の平方と一致する事,　更に「b_3=b_4=b_5=b_6=0」の時に限り「d=0」となることが証明できます.

【命題14】

$$d = \frac{b_5^2\ b_4^2\ b_3}{7^3 \times 14^2} - \frac{b_5^3\ b_3^2}{14^5} - \frac{b_6\ b_5\ b_4\ b_3^2}{7^4 \times 14} + \frac{b_3^7}{14^7} - \frac{b_4^4\ b_5}{7^4 \times 14} - \frac{b_6\ b_5^3}{7 \times 14^3} - \frac{b_3^3\ b_4^3}{7^4 \times 14^2} + \frac{3\ b_5\ b_4\ b_3^4}{7 \times 14^5} - \frac{b_6\ b_3^5}{14^4 \times 7^2} + \frac{b}{}$$

更に「$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$」のときに限り「$d = 0$」となる

§5 - 1【命題14】の前半の証明

原論文では グレブナー基底を使って次の様に証明しています.

First compute the Grobner basis G1 of　Equations 6 to 10 for an elimination ordering eliminating the r_i (1 / 3 second in MAPLE for the ordering lexdeg ([r1, r2, r4], [b3, b4, b5, b6, b7], method = fgb) and the Grobner basis G2 of the elements of G1 which depend only on b3, b4, b5, b6, b7, for the lexicographical ordering such that b7 > b6 > b5 > b4 > b3. Then Polynomial (15) is obtained by taking the normal form by G2 of the normal form by G1 of $(r1^7 - r_2^7)(r_2^7 - r_4^7)(r_4^7 - r_1^7)$.

しかし, 残念ながらこの通りにはできず, r_4 を消去して導きました. 先ず r_1^7, r_2^7, r_4^7 は (12) の解なので「$d = (r_1^7 - r_2^7)(r_2^7 - r_4^7)(r_4^7 - r_1^7)$」とおくと, $D = \$d^2$ です. 式 (10) を使って $d から r_4 を消去します.

In[∘]:=
```
Clear[r1, r2, r4, b3, b4, b5, b6, b7]
```

In[∘]:=
```
$d = (r1^7 - r2^7) (r2^7 - r4^7) (r4^7 - r1^7) /.
    {r4^7 → -b7 - b3 b4 / 14 - r1^7 - r2^7} // Expand // Simplify
```

Out[∘]=

$$-\frac{1}{196}\left(r1^7 - r2^7\right)\left(b3^2\ b4^2 + 14\ b3\ b4\left(2\ b7 + 3\left(r1^7 + r2^7\right)\right) + 196\left(b7^2 + 2\ r1^{14} + 5\ r1^7\ r2^7 + 2\ r2^{14} + 3\ b7\left(r1^7 + r2^7\right)\right)\right)$$

この $d を gb を使って簡約します. Mathematicaでは「簡約」は「 PolynomialReduce」です.

In[∘]:=

PolynomialReduce[*poly*, {$poly_1$, $poly_2$, …}, {x_1, x_2, …}]
$poly_i$ によって *poly* を簡約したリストを返す. 求まるリストは {{a_1, a_2, …}, b} の形であり, b は最小で, *poly* は $a_1\ poly_1 + a_2\ poly_2 + \ldots + b$ に等しい.

In[∘]:=
```
[例] f = x^3 + y^3;
p = {x^2 - y^2 - 1, x + 2 y - 7};
PolynomialReduce[f, p, {x, y}]
```

$\{\{x, 1+y^2\}, 7-2y+7y^2-y^3\}$

In[∘]:=
```
$d = PolynomialReduce[$d, gb, {r2, r1, b7, b6, b5, b4, b3}][[2]] // Expand
```
Out[∘]=

$$\frac{b3^7}{105413504}-\frac{b3^3\,b4^3}{470596}+\frac{3\,b3^4\,b4\,b5}{3764768}-\frac{b4^4\,b5}{33614}+\frac{b3\,b4^2\,b5^2}{67228}-\frac{b3^2\,b5^3}{537824}-\frac{b3^5\,b6}{1882384}+\frac{b3\,b4^3\,b6}{33614}-\frac{b3^2\,b4\,b5\,b6}{33614}-\frac{b5^3\,b6}{19208}$$

確かに $D = d^2$ となっています.

§5 - 2　$R_1 (= r_1{}^7)$の体

1. (12) の3次方程式R が既約のとき

一般に　係数の体がKで, 既約な3次方程式fの判別式Dが「$D = d^2$ $(d \in K)$」となっているとき,
fの解は $K(\sqrt{-3})$ に入ります. g_1 の係数は $Q(\sqrt{-7D})$ に入るので,
R_1 は $Q(\sqrt{-3}, \sqrt{-7D})$ に入ります.

2. (12) の3次方程式R が (2次式)と(1次式)の積のとき

1 次式を「$h1 = x + p$」, 2 次式を「$h2 = x^2 + q x + r$」と置くと,
「(h1 × h2の判別式 D) = (h2の判別式) (h1とh2の終結式)^2」が成り立ちます. (下を参照)

In[∘]:=
```
h1 = x + p;
h2 = x^2 + q x + r;
Discriminant[h1 h2, x]
Resultant[h1, h2, x]
```
Out[∘]=

$$(q^2 - 4 r)\,(p^2 - p q + r)^2$$

Out[∘]=

$$p^2 - p q + r$$

よって「$D = d^2$」のとき, 「h2の判別式 $= e^2$, $e \in Q(\sqrt{-7D})$」となります.
従って h2 の解は $Q(\sqrt{-7D})$ に入り, Rの解は全て $Q(\sqrt{-7D})$ に入ります

これはR が 3 個の1次式の積の時も成り立つので, 結局次のようになります.

【系15】3 次方程式 (12) の解は　$Q(\sqrt{-3}, \sqrt{-7D})$ または $Q(\sqrt{-7D})$ に入る

§5- 3【命題14】の後半の証明

「$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$」でないが「$d = 0$」となったと仮定します. このとき r_1, r_2, r_4 のうち高々1個だけ0となるので「$r_1, r_2 \neq 0$」としても構いません.
このとき「$d = 0$」より「$r_1{}^7 = r_2{}^7$」だから「$r_2 = r_1\,\xi$ (ξは1の原始7乗根のひとつ)」です.
(6) へ代入して「$r_4 = -\dfrac{b_3}{14\,r_1{}^2\,\xi}$」. さらにこれらを (7),
(8) へ代入し, 右辺が0となるように移項したとき,
左辺の式をそれぞれh1, h2 とおくと, 共に r_1 の9次式となります.

In[∘]:=
```
ClearAll[r1, r2, r4, b3, b4, b5, b6, b7, ξ]
```

In[∘]:=

$$\text{h1} = \left(\text{r1 r2^3 + r2 r4^3 + r4 r1^3 /. }\left\{\text{r2} \to \text{r1}\,\xi,\ \text{r4} \to -\frac{\text{b3}}{14\,\text{r1}^2\,\xi}\right\}\right) + \text{b4 / 7}$$

Out[∘]=

$$\frac{\text{b4}}{7} - \frac{\text{b3}^3}{2744\,\text{r1}^5\,\xi^2} - \frac{\text{b3 r1}}{14\,\xi} + \text{r1}^4\,\xi^3$$

In[∘]:=

$$\$\text{h1} = \text{h1} * 2744\,\text{r1}^5\,\xi^2\ \text{// Expand}$$

Out[∘]=

$$-\text{b3}^3 - 196\,\text{b3 r1}^6\,\xi + 392\,\text{b4 r1}^5\,\xi^2 + 2744\,\text{r1}^9\,\xi^5$$

In[∘]:=

$$\text{h2} = \left(\text{r1 ^3 r2^2 + r2^3 r4^2 + r4^3 r1^2 /. }\left\{\text{r2} \to \text{r1}\,\xi,\ \text{r4} \to -\frac{\text{b3}}{14\,\text{r1}^2\,\xi}\right\}\right) + \text{b5 / 14}$$

Out[∘]=

$$\frac{\text{b5}}{14} - \frac{\text{b3}^3}{2744\,\text{r1}^4\,\xi^3} + \frac{\text{b3}^2\,\xi}{196\,\text{r1}} + \text{r1}^5\,\xi^2$$

In[∘]:=

$$\$\text{h2} = \text{h2} * 2744\,\text{r1}^4\,\xi^3\ \text{// Expand}$$

Out[∘]=

$$-\text{b3}^3 + 196\,\text{b5 r1}^4\,\xi^3 + 14\,\text{b3}^2\,\text{r1}^3\,\xi^4 + 2744\,\text{r1}^9\,\xi^5$$

In[∘]:=
```
$h1 - $h2
```

Out[∘]=

$$-196\,\text{b3 r1}^6\,\xi + 392\,\text{b4 r1}^5\,\xi^2 - 196\,\text{b5 r1}^4\,\xi^3 - 14\,\text{b3}^2\,\text{r1}^3\,\xi^4$$

更に$r_1{}^3$ で (\$h1 − \$h2) を割ると r_1 の3次式となるので,
r_1 は $Q\left(\sqrt{-7D},\ \xi\right)$ 係数の3次方程式の解となります. これは【系15】と矛盾するから,
「$d = 0$」となるのは「$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$」のときに限ります.