

## 解の公式 Part2 (r3, r5, r6 を r1 で表す) with Mathematica14.0

### §0 準備

notebook 全体の評価には20秒ほど掛かります. ご注意ください.

```
In[49]:= ClearAll["`*"]
```

F35↓ (評価してください)

```
In[51]:= findF12G12[f_] := Module[{f35, factors, pos1, pos2, f12, d, R1, R2, f12factors, u, v, fp, fm, g1, g2, g3},
  Clear[a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7];
  f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} → Reverse@CoefficientList[f, x],
    factors = FactorList[f35];
  pos1 = Position[Exponent[factors[[All, 1]], x], 14][[1, 1]];
  f12 = factors[[pos1]][[1]];
  d = Sqrt@Discriminant[f12, x];
  f12factors = FactorList[f12, Extension → d];
  pos2 = Flatten@Position[Exponent[f12factors[[All, 1]], x], 7];
  {$f1, $f2} = (Expand[#/Coefficient[#, x, 7]] &) /@f12factors[[pos2]][[All, 1]];
  u = -(t1+t2)/14 + (t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
  v = -(t1+t2)/14 - (t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
  fp = ($f1/.{x→u}) + ($f2/.{x→v});
  fm = Sqrt[-7] (( $f1/.{x→u}) - ($f2/.{x→v}));
  g1 = GroebnerBasis[{f/.{x→(t1+t2)/7}, fp, fm}, {t1}, {t2}][[1]];
  $g1 = If[Coefficient[g1, t1, 7] != 0, Expand[#/Coefficient[#, t1, 7]] & [g1] /. {t1→x},
  R1 = Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7}, fp/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
  R2 = Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7}, fm/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
  PolynomialGCD[R1, R2, Extension→Automatic];
  gcd1 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension→Automatic];
  Expand[gcd1/Coefficient[gcd1, t1, 7]] /. {t1→x};
  g2 = GroebnerBasis[{f/.{x→(t1+t2)/7}, fp, fm}, {t2}, {t1}][[1]];
  $g2 = If[Coefficient[g2, t2, 7] != 0, Expand[#/Coefficient[#, t2, 7]] & [g2] /. {t2→x},
  R1 = Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7}, fp/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
  R2 = Resultant[f/.{x→(t1+t2)/7}, fm/.{u→-(t1+t2)/14-Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v→-(t1+t2)/14+Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
  PolynomialGCD[R1, R2, Extension→Automatic];
  Expand[gcd2/Coefficient[gcd2, t2, 7]] /. {t2→x};
  If[$g1 == x^7, {$f1, $f2, $g1, $g2} = {$f2, $f1, $g2, $g1}];
  Return[{$f1, $f2, $g1, $g2}]]

(*findF3は$f1,$f2が必要なので, findF12G12が既に実行されている事が必要*)
findF3[f_] := Module[{R1, R2, gcd3},
  R1 = Resultant[f, $f1/.{x→(t-x)/2}, x];
  R2 = Resultant[f, $f2/.{x→(-t-x)/2}, x];
  gcd3 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension→Automatic];
  $f3 = (Expand[#/Coefficient[#, t, 7]] & [gcd3]) /. {t→x}
```

## §1. 定義の確認

$r_0 \sim r_6$  は  $f$  の解  $x_0 \sim x_6$  から作られるLagrange分解式です.

```

r0=x0+x1+x2+x3+x4+x5+x6;
r1=x0+ζ x1+ ζ^2 x2+ζ^3 x3+ζ^4 x4+ζ^5 x5+ζ^6 x6;
r2=x0+ζ^2 x1+ ζ^4 x2+ζ^6 x3+ζ x4+ζ^3 x5+ζ^5 x6;
r3=x0+ζ^3 x1+ ζ^6 x2+ζ^2 x3+ζ^5 x4+ζ x5+ζ^4 x6;
r4=x0+ζ^4 x1+ ζ x2+ζ^5 x3+ζ^2 x4+ζ^6 x5+ζ^3 x6;
r5=x0+ζ^5 x1+ ζ^3 x2+ζ x3+ζ^6 x4+ζ^4 x5+ζ^2 x6;
r6=x0+ζ^6 x1+ ζ^5 x2+ζ^4 x3+ζ^3 x4+ζ^2 x5+ζ x6;

```

F1, F2, F3, G1, G2 は下の様に定義されます.  $\zeta$  は1の虚数7乗根の一つです.

```

In[53]:= F1 = (x - (x0 + x1 + x3)) (x - (x1 + x2 + x4)) (x - (x2 + x3 + x5)) (x - (x3 + x4 + x6))
          (x - (x0 + x4 + x5)) (x - (x1 + x5 + x6)) (x - (x0 + x2 + x6)) // Collect[#, x] &;
F2 = (x - (x0 + x2 + x3)) (x - (x1 + x3 + x4)) (x - (x2 + x4 + x5)) (x - (x3 + x5 + x6))
          (x - (x0 + x4 + x6)) (x - (x1 + x5 + x0)) (x - (x1 + x2 + x6)) // Collect[#, x] &;
F3 = (x - (x0 + x1 + x3) + (x2 + x4 + x5)) (x - (x1 + x2 + x4) + (x3 + x5 + x6))
          (x - (x2 + x3 + x5) + (x0 + x4 + x6)) (x - (x3 + x4 + x6) + (x1 + x5 + x0))
          (x - (x0 + x4 + x5) + (x1 + x2 + x6)) (x - (x1 + x5 + x6) + (x0 + x2 + x3))
          (x - (x0 + x2 + x6) + (x1 + x3 + x4)) // Collect[#, x] &;

G1 = PolynomialMod[(x - (r1 + r2 + r4)) (x - (ζ r1 + ζ^2 r2 + ζ^4 r4))
          (x - (ζ^2 r1 + ζ^4 r2 + ζ r4)) (x - (ζ^3 r1 + ζ^6 r2 + ζ^5 r4))
          (x - (ζ^4 r1 + ζ r2 + ζ^2 r4)) (x - (ζ^5 r1 + ζ^3 r2 + ζ^6 r4))
          (x - (ζ^6 r1 + ζ^5 r2 + ζ^3 r4)), Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, x] &;
G2 = PolynomialMod[(x - (r3 + r5 + r6)) (x - (ζ^4 r3 + ζ^2 r5 + ζ r6))
          (x - (ζ r3 + ζ^4 r5 + ζ^2 r6)) (x - (ζ^5 r3 + ζ^6 r5 + ζ^3 r6))
          (x - (ζ^2 r3 + ζ r5 + ζ^4 r6)) (x - (ζ^6 r3 + ζ^3 r5 + ζ^5 r6))
          (x - (ζ^3 r3 + ζ^5 r5 + ζ^6 r6)), Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, x] &;

```

## §2. 公式(#)

$a_i, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-, e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) をそれぞれ  $f, G_1, G_2, F^+ = F_1 + F_2, F^- = \sqrt{-7} (F_1 - F_2), \sqrt{-7} F_3$  の  $(7-i)$  次の係数とすると、  
下の様に  $r_3, r_5, r_6$  も  $r_1$  の式で表すことができます。

$$\begin{cases} r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_4 r_3 = -7 a_2 & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_4^2 r_6 + r_1^2 r_5 + r_2^2 r_3 = -\frac{1}{14} b_3 + \frac{21}{4} d_3^+ - \frac{7}{4} d_2^- - 14 a_3 & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_4 r_2^2 r_6 + r_1 r_4^2 r_5 + r_2 r_1^2 r_3 = \frac{1}{21} c_4 - \frac{1}{42} b_4 + \frac{49}{12} d_4^+ + \frac{49}{12} d_4^- - \frac{98}{3} a_4 & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1^4 r_3 + r_2^4 r_6 + r_4^4 r_5 = 7 e_5 + \frac{1}{7} c_5 - \frac{3}{14} b_5 - \frac{343 d_5^+}{4} - \frac{343 d_5^-}{4} + b_3 a_2 - 343 a_5 & (19) \end{cases}$$

... (#)

原論文では上の式を グレブナー基底を用いて導いていま

す。また原論文では 第4行の  $c_5$  の係数は  $(-1/7)$  ですが、

私の計算では  $(1/7)$  となりました。ここでは私の計算結果の方を載せました。

以下  $F^+, F^-, d_i^+, d_i^-$  はそれぞれ  $F_p, F_m, dp_i, dm_i$  と表記します。

まず定義に従って  $dp_i, dm_i, e_i, b_i, c_i$  を求めます。

```
In[58]:= Fp = F1 + F2 // Collect[#, x] &; (*Fp=F+*)
Fm = Sqrt[-7] (F1 - F2) // Collect[#, x] &; (*Fm=F-*)
{dp3, dp4, dp5, dp6, dp7} = CoefficientList[Fp, x, 5] // Reverse;
{dm3, dm4, dm5, dm6, dm7} = CoefficientList[Fm, x, 5] // Reverse;
{e3, e4, e5, e6, e7} = Sqrt[-7] CoefficientList[F3, x, 5] // Reverse;
{b3, b4, b5, b6, b7} = CoefficientList[G1, x, 5] // Reverse;
{c3, c4, c5, c6, c7} = CoefficientList[G2, x, 5] // Reverse;

In[65]:= vars = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6};
lagrange = {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {1, ξ, ξ^2, ξ^3, ξ^4, ξ^5, ξ^6}, {1, ξ^2, ξ^4, ξ^6, ξ, ξ^3, ξ^5},
  {1, ξ^3, ξ^6, ξ^2, ξ^5, ξ, ξ^4}, {1, ξ^4, ξ, ξ^5, ξ^2, ξ^6, ξ^3},
  {1, ξ^5, ξ^3, ξ, ξ^6, ξ^4, ξ^2}, {1, ξ^6, ξ^5, ξ^4, ξ^3, ξ^2, ξ}};
rules = AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} → lagrange.vars];
```

これで  $a_i, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-, e_i$  が  $x_0 \sim x_6$  と  $\sqrt{-7}$  で表されました。

$dp_i, dm_i, e_i$  は既に  $x_0 \sim x_6$  の式です。  $b_i,$

$c_i$  も  $x_0 \sim x_6$  の式に直し「 $\xi = \cos[2\pi/7] + i \sin[2\pi/7]$ 」とします。

この時よく知られているように「 $\xi + \xi^2 + \xi^4 = (-1 + \sqrt{-7})/2$ 」

が成り立つのでそれを使って簡単にします。

以下の計算はやや時間がかかるので、

最低必要な変数のみ計算し、結果のみ下のclosed cell に入れています。

```
{b3, b4, b5, b6, b7} = Collect[PolynomialMod[{b3, b4, b5, b6, b7} /. rules, Cyclotomic[7,]], /. {^4 -> -- ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])}] // Simplify;
{c3, c4, c5} = Collect[PolynomialMod[{c3, c4, c5} /. rules, Cyclotomic[7,]], /. {^4 -> -- ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])}] // Simplify;
```

{b3, b4, b5, b6, b7}, {c3, c4, c5} は(↓)です。評価してください。

これで  $a_i, b_i, c_i, d_i^+, d_i^-, e_i$  が  $x_0 \sim x_6$  と  $\sqrt{-7}$  で表されました。例えば  $b_3$  は次のようになります。

In[70]:= b3

Out[70]=

$$\begin{aligned}
 & 7 \left( -2 x_0^3 - 2 x_1^3 - 2 x_2^3 + x_2^2 x_3 - \sqrt{-7} x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + \sqrt{-7} x_2 x_3^2 - 2 x_3^3 + x_2^2 x_4 - \sqrt{-7} x_2^2 x_4 + \right. \\
 & 2 x_2 x_3 x_4 + x_3^2 x_4 - \sqrt{-7} x_3^2 x_4 + x_2 x_4^2 + \sqrt{-7} x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2 + \sqrt{-7} x_3 x_4^2 - 2 x_4^3 + x_2^2 x_5 + \\
 & \sqrt{-7} x_2^2 x_5 - 5 x_2 x_3 x_5 + \sqrt{-7} x_2 x_3 x_5 + x_3^2 x_5 - \sqrt{-7} x_3^2 x_5 - 5 x_2 x_4 x_5 - \sqrt{-7} x_2 x_4 x_5 + \\
 & 2 x_3 x_4 x_5 + x_4^2 x_5 - \sqrt{-7} x_4^2 x_5 + x_2 x_5^2 - \sqrt{-7} x_2 x_5^2 + x_3 x_5^2 + \sqrt{-7} x_3 x_5^2 + x_4 x_5^2 + \sqrt{-7} x_4 x_5^2 - \\
 & 2 x_5^3 + x_2^2 x_6 - \sqrt{-7} x_2^2 x_6 + 2 x_2 x_3 x_6 + x_3^2 x_6 + \sqrt{-7} x_3^2 x_6 + 2 x_2 x_4 x_6 - 5 x_3 x_4 x_6 + \\
 & \sqrt{-7} x_3 x_4 x_6 + x_4^2 x_6 - \sqrt{-7} x_4^2 x_6 + 2 x_2 x_5 x_6 - 5 x_3 x_5 x_6 - \sqrt{-7} x_3 x_5 x_6 + 2 x_4 x_5 x_6 + \\
 & x_5^2 x_6 - \sqrt{-7} x_5^2 x_6 + x_2 x_6^2 + \sqrt{-7} x_2 x_6^2 + x_3 x_6^2 - \sqrt{-7} x_3 x_6^2 + x_4 x_6^2 + \sqrt{-7} x_4 x_6^2 + x_5 x_6^2 + \\
 & \sqrt{-7} x_5 x_6^2 - 2 x_6^3 + x_1^2 \left( x_2 - \sqrt{-7} x_2 + x_3 - \sqrt{-7} x_3 + x_4 + \sqrt{-7} x_4 + x_5 - \sqrt{-7} x_5 + x_6 + \sqrt{-7} x_6 \right) + \\
 & x_0^2 \left( x_1 - \sqrt{-7} x_1 + x_2 - \sqrt{-7} x_2 + x_3 + \sqrt{-7} x_3 + x_4 - \sqrt{-7} x_4 + x_5 + \sqrt{-7} x_5 + x_6 + \sqrt{-7} x_6 \right) + \\
 & x_1 \left( \left( 1 + \sqrt{-7} \right) x_2^2 + \left( 1 + \sqrt{-7} \right) x_3^2 + \left( -5 - \sqrt{-7} \right) x_3 x_4 + x_4^2 - \sqrt{-7} x_4^2 + \right. \\
 & 2 x_4 x_5 + x_5^2 + \sqrt{-7} x_5^2 + 2 x_4 x_6 - 5 x_5 x_6 + \sqrt{-7} x_5 x_6 + x_6^2 - \sqrt{-7} x_6^2 + \\
 & 2 x_3 \left( x_5 + x_6 \right) + x_2 \left( 2 x_3 - 5 x_4 + \sqrt{-7} x_4 + 2 x_5 - 5 x_6 - \sqrt{-7} x_6 \right) \left. \right) + \\
 & x_0 \left( \left( 1 + \sqrt{-7} \right) x_1^2 + \left( 1 + \sqrt{-7} \right) x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{-7} x_3^2 + 2 x_3 x_4 + x_4^2 + \sqrt{-7} x_4^2 + \right. \\
 & 2 x_3 x_5 - 5 x_4 x_5 + \sqrt{-7} x_4 x_5 + x_5^2 - \sqrt{-7} x_5^2 + 2 x_3 x_6 - 5 x_4 x_6 - \sqrt{-7} x_4 x_6 + \\
 & 2 x_5 x_6 + x_6^2 - \sqrt{-7} x_6^2 + x_1 \left( 2 x_2 - 5 x_3 + \sqrt{-7} x_3 + 2 x_4 - 5 x_5 - \sqrt{-7} x_5 + 2 x_6 \right) + \\
 & \left. x_2 \left( -5 x_3 - \sqrt{-7} x_3 + 2 x_4 + 2 x_5 - 5 x_6 + \sqrt{-7} x_6 \right) \right) \left. \right)
 \end{aligned}$$

### §3. 公式(#)の証明その1 (基本対称式のグレブナー基底)

$x_0 \sim x_6$  の  $k$  次基本対称式を  $s_k$  とし,  $\{s_1, s_2 - a_2, s_3 + a_3, s_4 - a_4, s_5 + a_5\}$

というイデアルのグレブナー基底 base を作ります (所謂「名前付け」です).

なお「 $s_1 = 0$ 」と仮定しているので  $s_1$  には名前は付けません.

```
In[71]:= {s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7} = Table[SymmetricPolynomial[k, vars], {k, 1, 7}];
base = GroebnerBasis[{s1, s2 - a2, s3 + a3, s4 - a4, s5 + a5, s6 - a6, s7 + a7 },
Reverse[vars], MonomialOrder -> Lexicographic]
```

Out[72]=

```
{a7 + a6 x0 + a5 x0^2 + a4 x0^3 + a3 x0^4 + a2 x0^5 + x0^7,
a6 + a5 x0 + a4 x0^2 + a3 x0^3 + a2 x0^4 + x0^6 + a5 x1 + a4 x0 x1 + a3 x0^2 x1 + a2 x0^3 x1 + x0^5 x1 + a4 x1^2 +
a3 x0 x1^2 + a2 x0^2 x1^2 + x0^4 x1^2 + a3 x1^3 + a2 x0 x1^3 + x0^3 x1^3 + a2 x1^4 + x0^2 x1^4 + x0 x1^5 + x1^6,
a5 + a4 x0 + a3 x0^2 + a2 x0^3 + x0^5 + a4 x1 + a3 x0 x1 + a2 x0^2 x1 + x0^4 x1 + a3 x1^2 + a2 x0 x1^2 + x0^3 x1^2 +
a2 x1^3 + x0^2 x1^3 + x0 x1^4 + x1^5 + a4 x2 + a3 x0 x2 + a2 x0^2 x2 + x0^4 x2 + a3 x1 x2 + a2 x0 x1 x2 +
x0^3 x1 x2 + a2 x1^2 x2 + x0^2 x1^2 x2 + x0 x1^3 x2 + x1^4 x2 + a3 x2^2 + a2 x0 x2^2 + x0^3 x2^2 + a2 x1 x2^2 +
x0^2 x1 x2^2 + x0 x1^2 x2^2 + x1^3 x2^2 + a2 x2^3 + x0^2 x2^3 + x0 x1 x2^3 + x1^2 x2^3 + x0 x2^4 + x1 x2^4 + x2^5,
a4 + a3 x0 + a2 x0^2 + x0^4 + a3 x1 + a2 x0 x1 + x0^3 x1 + a2 x1^2 + x0^2 x1^2 + x0 x1^3 + x1^4 + a3 x2 +
a2 x0 x2 + x0^3 x2 + a2 x1 x2 + x0^2 x1 x2 + x0 x1^2 x2 + x1^3 x2 + a2 x2^2 + x0^2 x2^2 + x0 x1 x2^2 +
x1^2 x2^2 + x0 x2^3 + x1 x2^3 + x2^4 + a3 x3 + a2 x0 x3 + x0^3 x3 + a2 x1 x3 + x0^2 x1 x3 + x0 x1^2 x3 +
x1^3 x3 + a2 x2 x3 + x0^2 x2 x3 + x0 x1 x2 x3 + x1^2 x2 x3 + x0 x2^2 x3 + x1 x2^2 x3 + x2^3 x3 + a2 x3^2 +
x0^2 x3^2 + x0 x1 x3^2 + x1^2 x3^2 + x0 x2 x3^2 + x1 x2 x3^2 + x2^2 x3^2 + x0 x3^3 + x1 x3^3 + x2 x3^3 + x3^4,
a3 + a2 x0 + x0^3 + a2 x1 + x0^2 x1 + x0 x1^2 + x1^3 + a2 x2 + x0^2 x2 + x0 x1 x2 + x1^2 x2 +
x0 x2^2 + x1 x2^2 + x2^3 + a2 x3 + x0^2 x3 + x0 x1 x3 + x1^2 x3 + x0 x2 x3 + x1 x2 x3 + x2^2 x3 +
x0 x3^2 + x1 x3^2 + x2 x3^2 + x3^3 + a2 x4 + x0^2 x4 + x0 x1 x4 + x1^2 x4 + x0 x2 x4 + x1 x2 x4 +
x2^2 x4 + x0 x3 x4 + x1 x3 x4 + x2 x3 x4 + x3^2 x4 + x0 x4^2 + x1 x4^2 + x2 x4^2 + x3 x4^2 + x4^3,
a2 + x0^2 + x0 x1 + x1^2 + x0 x2 + x1 x2 + x2^2 + x0 x3 + x1 x3 + x2 x3 + x3^2 + x0 x4 + x1 x4 + x2 x4 +
x3 x4 + x4^2 + x0 x5 + x1 x5 + x2 x5 + x3 x5 + x4 x5 + x5^2, x0 + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6}
```

【コメント】「base」は基本対称式  $s_k$  に  $a_k$  という名前を付けただけです. ( $k=2, \dots, 5$ ) 例えば次と同じ使い方です.

「問」 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$  を  $x_1 + x_2 + x_3$ ,  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$ ,  $x_1 x_2 x_3$  を用いて表せ

「解答」`grb = GroebnerBasis[`

```
{x1 + x2 + x3 - p, x1 x2 + x2 x3 + x3 x1 - q, x1 x2 x3 - r}, {x3, x2, x1, p, q, r}]
{-r + q x1 - p x1^2 + x1^3, q - p x1 + x1^2 - p x2 + x1 x2 + x2^2, -p + x1 + x2 + x3}
```

`PolynomialReduce[x1^3 + x2^3 + x3^3, grb, {x3, x2, x1, p, q, r}]`

```
{ {3, 2 p - 2 x1 + x2 + x3, p^2 - q - p x1 - p x2 + x1 x2 + p x3 - x1 x3 - x2 x3 + x3^2},
```

```
p^3 - 3 p q + 3 r}
```

第2要素は「 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 =$

$(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + 3 x_1 x_2 x_3$ 」を表します.

## §4 公式 (≡) の証明 その2

§4-1  $\text{rmix}_2 =$

$r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_4 r_3$  の簡約 (以下,  $\text{rmix}$  の添え数字は次数です)

これは  $r_k$  を  $x_0 \sim x_6$  の式に直し,  $\text{base}$  による「簡約」だけで求まります. なお Mathematica では「簡約」は「PolynomialReduce」を使います.

```
In[*]:= PolynomialReduce[poly, {poly1, poly2, ...}, {x1, x2, ...}]
polyi によって poly を簡約したリストを返す. 求まるリストは {{a1, a2, ...}, b} の形であり,
b は最小で, poly は a1 poly1 + a2 poly2 + ... + b に等しい.
```

```
In[*]:= [例] f = x^3 + y^3;
p = {x^2 - y^2 - 1, x + 2 y - 7};
PolynomialReduce[f, p, {x, y}]
{{x, 1 + y^2}, 7 - 2 y + 7 y^2 - y^3}
```

まずは  $\text{rmix}_2$  を  $x_0 \sim x_6$  の式で表して「 $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^6 = 0$ 」と「 $\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = (-1 + \sqrt{-7})/2$ 」を使って簡単にします.

```
In[73]:= {r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} = lagrange.vars;
```

```
In[74]:= rmix2 = PolynomialMod[(r1 r6 + r2 r5 + r4 r3), Cyclotomic[7, 5]]
```

```
Out[74]= 3 x0^2 - x0 x1 + 3 x1^2 - x0 x2 - x1 x2 + 3 x2^2 - x0 x3 - x1 x3 -
x2 x3 + 3 x3^2 - x0 x4 - x1 x4 - x2 x4 - x3 x4 + 3 x4^2 - x0 x5 - x1 x5 - x2 x5 -
x3 x5 - x4 x5 + 3 x5^2 - x0 x6 - x1 x6 - x2 x6 - x3 x6 - x4 x6 - x5 x6 + 3 x6^2
```

次に  $\text{base}$  を使って,  $\text{rmix}_2$  を簡約します.

```
In[75]:= PolynomialReduce[rmix2, base, vars]
```

```
Out[75]= {{0, 0, 0, 0, 0, 3, -4 x1 - 4 x2 - 4 x3 - 4 x4 - 4 x5 - x6},
-3 a2 + 4 x1^2 + 4 x1 x2 + 4 x2^2 + 4 x1 x3 + 4 x2 x3 + 4 x3^2 + 4 x1 x4 + 4 x2 x4 + 4 x3 x4 + 4 x4^2 +
4 x1 x5 + 4 x2 x5 + 4 x3 x5 + 4 x4 x5 + 4 x5^2 + 4 x1 x6 + 4 x2 x6 + 4 x3 x6 + 4 x4 x6 + 4 x5 x6 + 4 x6^2}
```

これは「 $\text{rmix}_2 = (0, 0, 0, 7, -4 x_0 - \dots + 3 x_6) \cdot \text{base} + (-7 a_2)$ 」を表しますが,  $a_2, a_3, \dots$  は単なる名前なので,  $\text{base}$  は零ベクトルです. 故に「 $\text{rmix}_2 = (\text{簡約した余り}) = -7 a_2$ 」となります.

### §4 - 2 $\text{rmix}_3 = r_4^2 r_6 + r_1^2 r_5 + r_2^2 r_3$ の簡約

まず  $\text{rmix}_3$  を  $x_0 \sim x_6$  の式で表して「 $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^6 = 0$ 」と「 $\zeta + \zeta^2 + \zeta^4 = (-1 + \sqrt{-7})/2$ 」を使って簡単にします。

```
In[76]:= rmix3 =
(PolynomialMod[r4^2 r6 + r1^2 r5 + r2^2 r3, Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /.
{ζ^4 → -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify

Out[76]=
1
-- (6 x0^3 + 6 x1^3 + 6 x2^3 - 3 x2^2 x3 + i sqrt(7) x2^2 x3 - 3 x2 x3^2 - i sqrt(7) x2 x3^2 + 6 x3^3 - 3 x2^2 x4 + i sqrt(7) x2^2 x4 +
8 x2 x3 x4 - 3 x3^2 x4 + i sqrt(7) x3^2 x4 - 3 x2 x4^2 - i sqrt(7) x2 x4^2 - 3 x3 x4^2 - i sqrt(7) x3 x4^2 + 6 x4^3 -
3 x2^2 x5 - i sqrt(7) x2^2 x5 - 6 x2 x3 x5 + 6 i sqrt(7) x2 x3 x5 - 3 x3^2 x5 + i sqrt(7) x3^2 x5 - 6 x2 x4 x5 -
6 i sqrt(7) x2 x4 x5 + 8 x3 x4 x5 - 3 x4^2 x5 + i sqrt(7) x4^2 x5 - 3 x2 x5^2 + i sqrt(7) x2 x5^2 - 3 x3 x5^2 -
i sqrt(7) x3 x5^2 - 3 x4 x5^2 - i sqrt(7) x4 x5^2 + 6 x5^3 - 3 x2^2 x6 + i sqrt(7) x2^2 x6 + 8 x2 x3 x6 - 3 x3^2 x6 -
i sqrt(7) x3^2 x6 + 8 x2 x4 x6 - 6 x3 x4 x6 + 6 i sqrt(7) x3 x4 x6 - 3 x4^2 x6 + i sqrt(7) x4^2 x6 + 8 x2 x5 x6 -
6 x3 x5 x6 - 6 i sqrt(7) x3 x5 x6 + 8 x4 x5 x6 - 3 x5^2 x6 + i sqrt(7) x5^2 x6 - 3 x2 x6^2 - i sqrt(7) x2 x6^2 -
3 x3 x6^2 + i sqrt(7) x3 x6^2 - 3 x4 x6^2 - i sqrt(7) x4 x6^2 - 3 x5 x6^2 - i sqrt(7) x5 x6^2 + 6 x6^3 + i x0^2
((3 i + sqrt(7)) x1 + (3 i + sqrt(7)) x2 + 3 i x3 - sqrt(7) x3 + 3 i x4 + sqrt(7) x4 + 3 i x5 - sqrt(7) x5 + 3 i x6 - sqrt(7) x6) +
i x1^2 ((3 i + sqrt(7)) x2 + (3 i + sqrt(7)) x3 + 3 i x4 - sqrt(7) x4 + 3 i x5 + sqrt(7) x5 + 3 i x6 - sqrt(7) x6) +
x1 ((-3 - i sqrt(7)) x2^2 + (-3 - i sqrt(7)) x3^2 + (-6 - 6 i sqrt(7)) x3 x4 - 3 x4^2 + i sqrt(7) x4^2 +
8 x4 x5 - 3 x5^2 - i sqrt(7) x5^2 + 8 x4 x6 - 6 x5 x6 + 6 i sqrt(7) x5 x6 - 3 x6^2 + i sqrt(7) x6^2 +
8 x3 (x5 + x6) + x2 (8 x3 - 6 x4 + 6 i sqrt(7) x4 + 8 x5 - 6 x6 - 6 i sqrt(7) x6)) +
x0 ((-3 - i sqrt(7)) x1^2 + (-3 - i sqrt(7)) x2^2 - 3 x3^2 + i sqrt(7) x3^2 + 8 x3 x4 - 3 x4^2 - i sqrt(7) x4^2 +
8 x3 x5 - 6 x4 x5 + 6 i sqrt(7) x4 x5 - 3 x5^2 + i sqrt(7) x5^2 + 8 x3 x6 - 6 x4 x6 - 6 i sqrt(7) x4 x6 +
8 x5 x6 - 3 x6^2 + i sqrt(7) x6^2 + x1 (8 x2 - 6 x3 + 6 i sqrt(7) x3 + 8 x4 - 6 x5 - 6 i sqrt(7) x5 + 8 x6) +
x2 (-6 x3 - 6 i sqrt(7) x3 + 8 x4 + 8 x5 - 6 x6 + 6 i sqrt(7) x6)))
```

これは base で簡約しても簡単になりません。原論文では次の様になっています。(G = base)

For the first invariant F1, we compute its normal NF (F1) form by G. If it belongs to a basis of the free module of invariants (i.e. its leading term depends only on the  $x_i$ ), we introduce a new indeterminate f1 and the polynomial  $P1 := NF(F1) - f1$ . From now on, the normal form procedure is modified and consists in reducing first by G, then by P1, . . . , a polynomial being reducible by some  $P_i$  only if its leading term is the product of the leading term of  $P_i$  by a monomial which is independent of the  $x_i$ .

これに従うと、次の様になると思います。(残念ながら原論文では式の形では述べられていません。上の説明文のみなので確信はありません。) 先ず  $\text{rmix}_3$ ,  $b_3$ ,  $c_3$ ,  $\text{dp}_3$ ,  $\text{dm}_3$  を base で簡約した余りを求め、それぞれ先頭を大文字にした名を与えます。

```
In[77]:= {Rmix3, B3, C3, Dp3, Dm3} =
```

```
PolynomialReduce[#, base, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5}] [[2]] & /@
{rmix3, b3, c3, dp3, dm3}
```

```
Out[77]=
```

$$\left\{ -\frac{1}{2} i \right. \\
\begin{aligned}
& (-35 i a_3 + \sqrt{7} a_3 + 2 \sqrt{7} a_2 x_0 - 14 i a_2 x_1 - 6 \sqrt{7} a_2 x_1 - 14 i x_0^2 x_1 - 10 \sqrt{7} x_0^2 x_1 - 14 i x_0 x_1^2 - 8 \sqrt{7} x_0 x_1^2 - 14 i x_1^3 - \\
& 8 \sqrt{7} x_1^3 + 14 i x_0^2 x_2 + 4 \sqrt{7} x_0^2 x_2 + 14 i x_0 x_1 x_2 - 8 \sqrt{7} x_0 x_1 x_2 - 16 \sqrt{7} x_1^2 x_2 + 14 i x_0 x_2^2 + 10 \sqrt{7} x_0 x_2^2 - \\
& 10 \sqrt{7} x_1 x_2^2 + 2 \sqrt{7} x_2^3 - 14 i a_2 x_3 + 6 \sqrt{7} a_2 x_3 - 14 i x_0^2 x_3 + 4 \sqrt{7} x_0^2 x_3 - 42 i x_0 x_1 x_3 - 12 \sqrt{7} x_0 x_1 x_3 - \\
& 28 i x_1^2 x_3 - 6 \sqrt{7} x_1^2 x_3 - 14 i x_0 x_2 x_3 + 16 \sqrt{7} x_0 x_2 x_3 - 14 i x_1 x_2 x_3 - 10 \sqrt{7} x_1 x_2 x_3 - 14 i x_2^2 x_3 + \\
& 6 \sqrt{7} x_2^2 x_3 - 14 i x_0 x_3^2 + 2 \sqrt{7} x_0 x_3^2 - 28 i x_1 x_3^2 - 4 \sqrt{7} x_1 x_3^2 - 14 i x_2 x_3^2 + 4 \sqrt{7} x_2 x_3^2 - 14 i x_3^3 + \\
& 4 \sqrt{7} x_3^3 - 2 \sqrt{7} a_2 x_4 + 14 i x_0^2 x_4 - 10 \sqrt{7} x_0^2 x_4 - 16 \sqrt{7} x_0 x_1 x_4 - 14 i x_1^2 x_4 - 10 \sqrt{7} x_1^2 x_4 + 28 i x_0 x_2 x_4 - \\
& 14 i x_1 x_2 x_4 - 20 \sqrt{7} x_1 x_2 x_4 + 14 i x_0 x_3 x_4 + 2 \sqrt{7} x_0 x_3 x_4 - 28 i x_1 x_3 x_4 + 6 \sqrt{7} x_1 x_3 x_4 + 10 \sqrt{7} x_2 x_3 x_4 + \\
& 6 \sqrt{7} x_3^2 x_4 + 14 i x_0 x_4^2 - 4 \sqrt{7} x_0 x_4^2 - 14 i x_1 x_4^2 - 8 \sqrt{7} x_1 x_4^2 + 2 \sqrt{7} x_2 x_4^2 + 12 \sqrt{7} x_3 x_4^2 - 2 \sqrt{7} a_2 x_5 - \\
& 2 \sqrt{7} x_0^2 x_5 - 14 i x_0 x_1 x_5 + 2 \sqrt{7} x_0 x_1 x_5 - 6 \sqrt{7} x_1^2 x_5 + 14 i x_0 x_2 x_5 + 6 \sqrt{7} x_0 x_2 x_5 + 14 i x_1 x_2 x_5 - \\
& 8 \sqrt{7} x_1 x_2 x_5 + 2 \sqrt{7} x_2^2 x_5 - 4 \sqrt{7} x_0 x_3 x_5 - 6 \sqrt{7} x_1 x_3 x_5 - 14 i x_2 x_3 x_5 - 8 \sqrt{7} x_2 x_3 x_5 - 6 \sqrt{7} x_3^2 x_5 - \\
& 14 \sqrt{7} x_0 x_4 x_5 - 4 \sqrt{7} x_1 x_4 x_5 - 14 i x_2 x_4 x_5 + 6 \sqrt{7} x_2 x_4 x_5 + 14 i x_3 x_4 x_5 + 2 \sqrt{7} x_3 x_4 x_5 - 2 \sqrt{7} x_4^2 x_5), \\
& (49 + 7 i \sqrt{7}) a_3 + 14 i \sqrt{7} a_2 x_0 + (-49 + 7 i \sqrt{7}) a_2 x_1 + (-49 - 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_1 + \\
& (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_0 x_1^2 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_1^3 + (49 - 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_2 + \\
& (49 - 7 i \sqrt{7}) x_0 x_1 x_2 - 14 i \sqrt{7} x_1^2 x_2 + (49 + 21 i \sqrt{7}) x_0 x_2^2 + \\
& 28 i \sqrt{7} x_1 x_2^2 + 14 i \sqrt{7} x_2^3 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) a_2 x_3 + (-49 - 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_3 + \\
& (-147 - 35 i \sqrt{7}) x_0 x_1 x_3 + (-98 - 42 i \sqrt{7}) x_1^2 x_3 + (-49 - 35 i \sqrt{7}) x_0 x_2 x_3 + \\
& (-49 - 21 i \sqrt{7}) x_1 x_2 x_3 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_2^2 x_3 + (-49 - 35 i \sqrt{7}) x_0 x_3^2 + \\
& (-98 - 28 i \sqrt{7}) x_1 x_3^2 + (-49 - 21 i \sqrt{7}) x_2 x_3^2 + (-49 - 21 i \sqrt{7}) x_3^3 - 14 i \sqrt{7} a_2 x_4 + \\
& (49 - 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_4 - 14 i \sqrt{7} x_0 x_1 x_4 + (-49 - 21 i \sqrt{7}) x_1^2 x_4 + 98 x_0 x_2 x_4 + \\
& (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_1 x_2 x_4 + (49 - 35 i \sqrt{7}) x_0 x_3 x_4 + (-98 - 56 i \sqrt{7}) x_1 x_3 x_4 - \\
& 28 i \sqrt{7} x_2 x_3 x_4 - 56 i \sqrt{7} x_3^2 x_4 + (49 + 21 i \sqrt{7}) x_0 x_4^2 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_1 x_4^2 + \\
& 14 i \sqrt{7} x_2 x_4^2 - 14 i \sqrt{7} x_3 x_4^2 - 14 i \sqrt{7} a_2 x_5 - 14 i \sqrt{7} x_0^2 x_5 + (-49 - 35 i \sqrt{7}) x_0 x_1 x_5 - \\
& 42 i \sqrt{7} x_1^2 x_5 + (49 - 7 i \sqrt{7}) x_0 x_2 x_5 + (49 - 7 i \sqrt{7}) x_1 x_2 x_5 + 14 i \sqrt{7} x_2^2 x_5 - \\
& 28 i \sqrt{7} x_0 x_3 x_5 - 42 i \sqrt{7} x_1 x_3 x_5 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_2 x_3 x_5 - 42 i \sqrt{7} x_3^2 x_5 - \\
& 28 i \sqrt{7} x_1 x_4 x_5 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_2 x_4 x_5 + (49 - 35 i \sqrt{7}) x_3 x_4 x_5 - 14 i \sqrt{7} x_4^2 x_5, \\
& (49 - 7 i \sqrt{7}) a_3 - 14 i \sqrt{7} a_2 x_0 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) a_2 x_1 + (-49 + 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_1 + (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_0 x_1^2 + \\
& (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_1^3 + (49 + 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_2 + (49 + 7 i \sqrt{7}) x_0 x_1 x_2 + 14 i \sqrt{7} x_1^2 x_2 + \\
& (49 - 21 i \sqrt{7}) x_0 x_2^2 - 28 i \sqrt{7} x_1 x_2^2 - 14 i \sqrt{7} x_2^3 + (-49 + 7 i \sqrt{7}) a_2 x_3 + (-49 + 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_3 + \\
& (-147 + 35 i \sqrt{7}) x_0 x_1 x_3 + (-98 + 42 i \sqrt{7}) x_1^2 x_3 + (-49 + 35 i \sqrt{7}) x_0 x_2 x_3 + (-49 + 21 i \sqrt{7}) x_1 x_2 x_3 + \\
& (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_2^2 x_3 + (-49 + 35 i \sqrt{7}) x_0 x_3^2 + (-98 + 28 i \sqrt{7}) x_1 x_3^2 + (-49 + 21 i \sqrt{7}) x_2 x_3^2 + \\
& (-49 + 21 i \sqrt{7}) x_3^3 + 14 i \sqrt{7} a_2 x_4 + (49 + 21 i \sqrt{7}) x_0^2 x_4 + 14 i \sqrt{7} x_0 x_1 x_4 + (-49 + 21 i \sqrt{7}) x_1^2 x_4 + \\
& 98 x_0 x_2 x_4 + (-49 - 7 i \sqrt{7}) x_1 x_2 x_4 + (49 + 35 i \sqrt{7}) x_0 x_3 x_4 + (-98 + 56 i \sqrt{7}) x_1 x_3 x_4 + 28 i \sqrt{7} x_2 x_3 x_4 + \\
& 56 i \sqrt{7} x_3^2 x_4 + (49 - 21 i \sqrt{7}) x_0 x_4^2 + (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_1 x_4^2 - 14 i \sqrt{7} x_2 x_4^2 + 14 i \sqrt{7} x_3 x_4^2 + \\
& 14 i \sqrt{7} a_2 x_5 + 14 i \sqrt{7} x_0^2 x_5 + (-49 + 35 i \sqrt{7}) x_0 x_1 x_5 + 42 i \sqrt{7} x_1^2 x_5 + (49 + 7 i \sqrt{7}) x_0 x_2 x_5 + \\
& (49 + 7 i \sqrt{7}) x_1 x_2 x_5 - 14 i \sqrt{7} x_2^2 x_5 + 28 i \sqrt{7} x_0 x_3 x_5 + 42 i \sqrt{7} x_1 x_3 x_5 + (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_2 x_3 x_5 + \\
& 42 i \sqrt{7} x_3^2 x_5 + 28 i \sqrt{7} x_1 x_4 x_5 + (-49 + 7 i \sqrt{7}) x_2 x_4 x_5 + (49 + 35 i \sqrt{7}) x_3 x_4 x_5 + 14 i \sqrt{7} x_4^2 x_5, \\
& -2 a_2 x_1 - 2 x_0^2 x_1 - 2 x_0 x_1^2 - 2 x_1^3 + 2 x_0^2 x_2 + 2 x_0 x_1 x_2 + 2 x_0 x_2^2 - 2 a_2 x_3 - 2 x_0^2 x_3 - 6 x_0 x_1 x_3 - 4 x_1^2 x_3 - \\
& 2 x_0 x_2 x_3 - 2 x_1 x_2 x_3 - 2 x_2^2 x_3 - 2 x_0 x_3^2 - 4 x_1 x_3^2 - 2 x_2 x_3^2 - 2 x_3^3 + 2 x_0^2 x_4 - 2 x_1^2 x_4 + 4 x_0 x_2 x_4 - 2 x_1 x_2 x_4 + \\
& 2 x_0 x_3 x_4 - 4 x_1 x_3 x_4 + 2 x_0 x_4^2 - 2 x_1 x_4^2 - 2 x_0 x_1 x_5 + 2 x_0 x_2 x_5 + 2 x_1 x_2 x_5 - 2 x_2 x_3 x_5 - 2 x_2 x_4 x_5 + 2 x_3 x_4 x_5, \\
& -2 i \sqrt{7} a_2 x_1 - 2 i \sqrt{7} x_0^2 x_1 - 2 i \sqrt{7} x_0 x_1^2 - 2 i \sqrt{7} x_1^3 + 2 i \sqrt{7} x_0^2 x_2 - 2 i \sqrt{7} x_0 x_1 x_2 - \\
& 4 i \sqrt{7} x_1^2 x_2 + 2 i \sqrt{7} x_0 x_2^2 - 4 i \sqrt{7} x_1 x_2^2 + 2 i \sqrt{7} a_2 x_3 + 2 i \sqrt{7} x_0^2 x_3 - 2 i \sqrt{7} x_0 x_1 x_3 + \\
& 6 i \sqrt{7} x_0 x_2 x_3 - 2 i \sqrt{7} x_1 x_2 x_3 + 2 i \sqrt{7} x_2^2 x_3 + 2 i \sqrt{7} x_0 x_3^2 + 2 i \sqrt{7} x_2 x_3^2 + 2 i \sqrt{7} x_3^3 - \\
& 2 i \sqrt{7} x_0^2 x_4 - 4 i \sqrt{7} x_0 x_1 x_4 - 2 i \sqrt{7} x_1^2 x_4 - 6 i \sqrt{7} x_1 x_2 x_4 + 2 i \sqrt{7} x_0 x_3 x_4 + 4 i \sqrt{7} x_1 x_3 x_4 + \\
& 4 i \sqrt{7} x_2 x_3 x_4 + 4 i \sqrt{7} x_3^2 x_4 - 2 i \sqrt{7} x_0 x_4^2 - 2 i \sqrt{7} x_1 x_4^2 + 4 i \sqrt{7} x_2 x_4^2 + 2 i \sqrt{7} x_3 x_4^2 + \\
& 2 i \sqrt{7} x_0 x_2 x_5 - 2 i \sqrt{7} x_1 x_2 x_5 - 2 i \sqrt{7} x_2 x_3 x_5 - 4 i \sqrt{7} x_0 x_4 x_5 + 2 i \sqrt{7} x_2 x_4 x_5 + 2 i \sqrt{7} x_3 x_4 x_5 \}
\end{aligned}$$

まずB3のLT(Leading Term)は  $x_i$  の式なので, B3は独立変数です. よって Dp3を(B3-m1)で簡約します.  
(m1はB3の名前で 不定変数(indeterminate))

```
In[78]:= DDp3 =
  PolynomialReduce[Dp3, B3 - m1, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]]
```

```
Out[78]=
- 2 a2 x1 - 2 x0^2 x1 - 2 x0 x1^2 - 2 x1^3 + 2 x0^2 x2 + 2 x0 x1 x2 + 2 x0 x2^2 - 2 a2 x3 - 2 x0^2 x3 -
6 x0 x1 x3 - 4 x1^2 x3 - 2 x0 x2 x3 - 2 x1 x2 x3 - 2 x2^2 x3 - 2 x0 x3^2 - 4 x1 x3^2 - 2 x2 x3^2 -
2 x3^3 + 2 x0^2 x4 - 2 x1^2 x4 + 4 x0 x2 x4 - 2 x1 x2 x4 + 2 x0 x3 x4 - 4 x1 x3 x4 + 2 x0 x4^2 -
2 x1 x4^2 - 2 x0 x1 x5 + 2 x0 x2 x5 + 2 x1 x2 x5 - 2 x2 x3 x5 - 2 x2 x4 x5 + 2 x3 x4 x5
```

DDp3のLTは  $x_i$  の式なので、独立変数です。よって Dm3を{B3 - m1, DDp3 - m2}で簡約します。(m2はDp3の名前で不定変数)。

```
In[79]:= DDm3 = PolynomialReduce[Dm3, {B3 - m1, DDp3 - m2},
  {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]]
```

```
Out[79]=
i sqrt(7) m2 - 4 i sqrt(7) x0 x1 x2 - 4 i sqrt(7) x1^2 x2 - 4 i sqrt(7) x1 x2^2 + 4 i sqrt(7) a2 x3 + 4 i sqrt(7) x0^2 x3 +
4 i sqrt(7) x0 x1 x3 + 4 i sqrt(7) x1^2 x3 + 8 i sqrt(7) x0 x2 x3 + 4 i sqrt(7) x2^2 x3 + 4 i sqrt(7) x0 x3^2 +
4 i sqrt(7) x1 x3^2 + 4 i sqrt(7) x2 x3^2 + 4 i sqrt(7) x3^3 - 4 i sqrt(7) x0^2 x4 - 4 i sqrt(7) x0 x1 x4 - 4 i sqrt(7) x0 x2 x4 -
4 i sqrt(7) x1 x2 x4 + 8 i sqrt(7) x1 x3 x4 + 4 i sqrt(7) x2 x3 x4 + 4 i sqrt(7) x3^2 x4 - 4 i sqrt(7) x0 x4^2 +
4 i sqrt(7) x3 x4^2 + 4 i sqrt(7) x0 x1 x5 - 4 i sqrt(7) x1 x2 x5 - 4 i sqrt(7) x0 x4 x5 + 4 i sqrt(7) x2 x4 x5
```

DDm3のLTは  $x_i$  の式なので、独立変数です。よって最後に Rmix3 を {B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3 - m3}で簡約します。(m3はDm3の名前で不定変数)。

```
In[80]:= RRmix3 = PolynomialReduce[Rmix3, {B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3 - m3},
  {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]] // Expand
```

```
Out[80]=
- 14 a3 - m1/14 + 21 m2/4 - 7 m3/4
```

m1, m2, m3はそれぞれ B3, DDp3,

DDm3 の「名前」なので {B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3 - m3} は零ベクトルです。

よって Rmix3 を簡約した余りのみ考えて、「rmix3 =  $-14 a3 - \frac{b3}{14} + \frac{21 dp3}{4} - \frac{7 dm3}{4}$ 」となります。

以上の操作を自動化したプログラムが次の「relation」です。

relation[{v1, v2, v3, ..., vn}] で  $v_n$  を  $v_1 \sim v_{n-1}$  の式で表します。

ただし  $v_i$  の名前は  $m_i$  で、

また  $v_1 \sim v_{n-1}$  は独立で  $v_n$  が  $v_1 \sim v_{n-1}$  の生成するイデアルに入っている事が必要です。

```
In[81]:= relation[polys_List]:=Module[{vars,list,nbase,new,k},
vars={x6,x5,x4,x3,x2,x1,x0,A2,A3,A4,A5,A6,A7};
list=Simplify[PolynomialReduce[#,base,vars] [[2]]&/@polys];
k=1;
nbase={list[[1]]-m1};
Do[k++;new=Simplify[PolynomialReduce[list[[k]],nbase,vars] [[2]]];AppendTo[nbase,new-ToExpression[
Expand@Simplify[PolynomialReduce[Last[list],nbase,vars] [[2]]]]]
```

rmix3 を独立変数の集合 {dm3, dp3, b3} で表すときは、例えば 次の様に入力します。結果は上の RRmix3 と一致します。

```
In[82]:= relation[{dm3, dp3, b3, rmix3}]
```

```
Out[82]=
```

$$-14 a3 - \frac{7 m1}{4} + \frac{21 m2}{4} - \frac{m3}{14}$$

【コメント1】ここで 例えば B3とDp3の間にC3 も考えると次の様になります.

CC3 =

```
PolynomialReduce[C3, B3 - m1, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]]
```

$$\begin{aligned} &98 a3 - m1 - 98 a2 x1 - 98 x0^2 x1 - 98 x0 x1^2 - 98 x1^3 + 98 x0^2 x2 + 98 x0 x1 x2 + \\ &98 x0 x2^2 - 98 a2 x3 - 98 x0^2 x3 - 294 x0 x1 x3 - 196 x1^2 x3 - 98 x0 x2 x3 - 98 x1 x2 x3 - \\ &98 x2^2 x3 - 98 x0 x3^2 - 196 x1 x3^2 - 98 x2 x3^2 - 98 x3^3 + 98 x0^2 x4 - 98 x1^2 x4 + \\ &196 x0 x2 x4 - 98 x1 x2 x4 + 98 x0 x3 x4 - 196 x1 x3 x4 + 98 x0 x4^2 - 98 x1 x4^2 - \\ &98 x0 x1 x5 + 98 x0 x2 x5 + 98 x1 x2 x5 - 98 x2 x3 x5 - 98 x2 x4 x5 + 98 x3 x4 x5 \end{aligned}$$

```
DDp3 = PolynomialReduce[Dp3, {B3 - m1, CC3 - m2}, {x6, x5, x4, x3, x2, x1, x0, a2, a3, a4, a5, a6, a7}] [[2]]
```

$$\rightarrow -2 a3 + \frac{m1+m2}{49}$$

DDp3 のLTは  $x_i$  の式でないから, Dp3は独立変数ではありません.

上の式は「 $dp3 = -2 a3 + 1 / 49 (b3 + c3)$ 」を表します.

【コメント2】グレブナー基底を使った計算では, 時々ミスをするので, 直接計算して確かめました.

```
rmix3 - (14 s3 - b3 / 14 + 21 / 4 dp3 - 7 / 4 dm3) // Factor
```

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2} (x0 + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6) \\ &(5 x0^2 + 24 x0 x1 + 5 x1^2 + 24 x0 x2 + 24 x1 x2 + 5 x2^2 + 24 x0 x3 + 24 x1 x3 + 24 x2 x3 + 5 x3^2 + \\ &24 x0 x4 + 24 x1 x4 + 24 x2 x4 + 24 x3 x4 + 5 x4^2 + 24 x0 x5 + 24 x1 x5 + 24 x2 x5 + 24 x3 x5 + \\ &24 x4 x5 + 5 x5^2 + 24 x0 x6 + 24 x1 x6 + 24 x2 x6 + 24 x3 x6 + 24 x4 x6 + 24 x5 x6 + 5 x6^2) \end{aligned}$$

「 $x0 + x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 = 0$ 」と仮定しているので,

確かに「 $rmix3 = -14 a3 - b3 / 14 + 21 / 4 dp3 - 7 / 4 dm3$ 」です. ( $a3 = -s3$ です.)

【コメント3】「グレブナー基底の威力」と「使いこなしの難しさ」の両方を感じました. 実は私は長い間 著者の真意がわからず, 結果の式だけを見て「rmix3を  $a3, b3, dp3, dm3$  で表すのだから,  $a3, b3, dp3, dm3$  のグレブナー基底Gを作って, rmix3をGで簡約すれば良いのでは?」と思っていました. しかしグレブナー基底が何日経っても計算できません. そこで著者のやり方をできる限り真似しようと考え, そのやり方を詳しく見てみると, 例えば3次の同次式の不変式の関係を求めるのに, 全次数の基本対称式のグレブナー基底からスタートしています. 更に「 $H=\{B3 - m1, DDp3 - m2, DDm3 - m3\}$ などはグレブナー基底ではないので, Hで簡約しても一意に決まらないはず. よってHのグレブナー基底を求めてから簡約しないといけない」と思っていましたが, どうやら簡約した結果が  $x_i$  を含まないときは, 順序を変えても, 一意に決まるみたいです. 例えば 次の結果も Rrmix3 と一致します.しかし実行時間は異なります. 例えば下の

計算は0.7秒です。{dm3, dp3, b3, rmix3}では0.2秒でした。

$$\text{relation}[\{b3, dp3, dm3, rmix3\}] \rightarrow -14 a^3 - \frac{7 m_1}{4} + \frac{21 m_2}{4} - \frac{m_3}{14}$$

グレブナー基底は本当に奥が深いです。

### §4-3 $\text{rmix}_4 = r_4 r_2^2 r_6 + r_1 r_4^2 r_5 + r_2 r_1^2 r_3$ の簡約

$b_4, c_4, dp_4, dm_4$  が独立であることを認めると、簡単に簡約できます。

```
In[83]:= rmix4 = (PolynomialMod[r4 r2^2 r6 + r1 r4^2 r5 + r2 r1^2 r3, Cyclotomic[7, ξ]]) /.
  {ξ^4 → -ξ - ξ^2 + 1 / 2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify;
relation[{b4, c4, dm4, dp4, rmix4}]
```

Out[84]=

$$-\frac{98 a_4}{3} - \frac{m_1}{42} + \frac{m_2}{21} + \frac{49 m_3}{12} + \frac{49 m_4}{12}$$

これは「 $\text{rmix}_4 = -\frac{98 a_4}{3} - \frac{b_4}{42} + \frac{c_4}{21} + \frac{49 d_4^+}{12} + \frac{49 d_4^-}{12}$ 」を意味します。

### §4-4 $\text{rmix}_5 = r_1^4 r_3 + r_2^4 r_6 + r_4^4 r_5$ の簡約

これも  $b_5, c_5, b_3, s_2, e_5, dp_5, dm_5$  が独立であることを認めると、簡単に簡約できます。(以下の計算は20秒ほど掛かります。)

```
In[85]:= rmix5 = (PolynomialMod[r1^4 r3 + r2^4 r6 + r4^4 r5, Cyclotomic[7, ξ]]) /.
  {ξ^4 → -ξ - ξ^2 + 1 / 2 (-1 + Sqrt[-7])} // Simplify;
```

```
In[86]:= relation[{b5, c5, b3 s2, e5, dp5, dm5, rmix5}]
```

Out[86]=

$$-343 a_5 - \frac{3 m_1}{14} + \frac{m_2}{7} + m_3 + 7 m_4 - \frac{343 m_5}{4} - \frac{343 m_6}{4}$$

これは「 $\text{rmix}_5 = -343 a_5 - \frac{3 b_5}{14} + \frac{c_5}{7} + b_3 a_2 + 7 e_5 - \frac{343 d_5^+}{4} - \frac{343 d_5^-}{4}$ 」を表します。

私の計算ではこの様に  $c_5$  の係数は  $1/7$  となりましたが、

原論文では  $(-1/7)$  となっていました。以上から次の関係式が確かめられました。

$$\begin{cases} r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_4 r_3 = -7 a_2 & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_4^2 r_6 + r_1^2 r_5 + r_2^2 r_3 = -\frac{1}{14} b_3 + \frac{21}{4} d_3^+ - \frac{7}{4} d_3^- - 14 a_3 & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_4 r_2^2 r_6 + r_1 r_4^2 r_5 + r_2 r_1^2 r_3 = \frac{1}{21} c_4 - \frac{1}{42} b_4 + \frac{49}{12} d_4^+ + \frac{49}{12} d_4^- - \frac{98}{3} a_4 & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1^4 r_3 + r_2^4 r_6 + r_4^4 r_5 = 7 e_5 + \frac{1}{7} c_5 - \frac{3}{14} b_5 - \frac{343 d_5^+}{4} - \frac{343 d_5^-}{4} + b_3 a_2 - 343 a_5 & (19) \end{cases}$$

上式の右边を  $k_1 \sim k_4$  と置くと、 $r_1, r_2, r_4$  が決まっているときは、

次の  $r_3, r_5, r_6$  に関する連立一次方程式となります。

左辺の行列のrankが3以上ならば、 $r_3, r_5, r_6$  が  $r_1$  の式で表せます。

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_4 \\ r_4^2 & r_1^2 & r_2^2 \\ r_2^2 r_4 & r_1 r_4^2 & r_1^2 r_2 \\ r_2^4 & r_4^4 & r_1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_6 \\ r_5 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

## §5 mat の行列式

(16), (17), (18) 式の左辺が作る行列matの行列式を  $\det(16, 17, 18)$  などと書くと、以下の様になります。(原論文では $\det3$ の  $b_4^2$ の係数は  $(-\frac{1}{49})$  となっていました。ここは私の計算結果を載せました.)

$$\begin{cases} \det1 = \det(16, 17, 18) = -\frac{1}{7} b_6 - \frac{1}{49} b_3^2 & (20) \\ \det2 = \det(16, 17, 19) = -b_7 - \frac{4}{49} b_3 b_4 & (21) \\ \det3 = \det(16, 18, 19) = \frac{1}{49} b_4^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5 & (22) \end{cases}$$

まず左辺を  $r_k$  の式で表します.

```
In[87]:= Clear[r1, r2, r3, r4, r5, r6, k1, k2, k3, k4]
mat = {{r1, r2, r4}, {r4^2, r1^2, r2^2},
       {r4 r2^2, r1 r4^2, r2 r1^2}, {r2^4, r4^4, r1^4}};
det1 = Det[mat[[{1, 2, 3}]]]
det2 = Det[mat[[{1, 2, 4}]]]
det3 = Det[mat[[{1, 3, 4}]]]

Out[89]=
r1^5 r2 + r2^5 r4 - 3 r1^2 r2^2 r4^2 + r1 r4^5

Out[90]=
r1^7 + r2^7 - r1^2 r2^4 r4 - r1^4 r2 r4^2 - r1 r2^2 r4^4 + r4^7

Out[91]=
r1^2 r2^6 - r1^4 r2^3 r4 + r1^6 r4^2 - r1 r2^4 r4^3 - r1^3 r2 r4^4 + r2^2 r4^6
```

原論文では【命題14】と同様の方法 ( $r_k$  と  $b_i$  混合のグレブナー基底) で求めています, 私はそもそも【命題14】でもその方法が再現できなかったの, ここでは両辺を  $x_0 \sim x_6$  の式に直し, §3の「relation」で証明します.

1. 実行時間が1分ほどかかるので, text形式で, 結果のみ表示します.

```
det1 = det1 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars];
det1 = (PolynomialMod[det1, Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])} //
Simplify; (*x0~x6の式に直す*)
relation[{b6, b3^2, det1}]

In[*]:= -m1/7 - m2/49
```

これは「 $\det1 = -\frac{b_6}{7} - \frac{b_3^2}{49}$ 」を表します.

2. 実行時間が5分ほどかかるので, text形式で, 結果のみ表示します.

```
det2 = det2 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars]
det2 = (PolynomialMod[Simplify[det2], Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])};
relation[{b7, b4 b3, det2}]
```

$$-m_1 - \frac{4 m_2}{49}$$

これは「 $\det_2 = -b_7 - \frac{4}{49} b_3 b_4$ 」を表します。

3. 実行時間が10分ほどかかるので, text形式で, 結果のみ表示します。

```
det3 = det3 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars];
det3 = (PolynomialMod[Simplify[det3], Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])};
relation[{b4^2, b5 b3, det3}]
```

$$\text{In}[*]:= \frac{m_1}{49} - \frac{3 m_2}{196}$$

これは「 $\frac{1}{49} b_4^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5$ 」を表します。

【コメント】原論文では「 $\det_3 = -\frac{1}{49} b_4^2 - \frac{3}{196} b_3 b_5$ 」となっていましたが、これはミスプリだと思います。

例えば「vars={x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6} → {1, -1, 1, -1, 1, -1, 0}」を代入して確かめました。

```
In[*]:= det3 = det3 /. AssociationThread[{r0, r1, r2, r3, r4, r5, r6} -> lagrange . vars];
det3 = (PolynomialMod[Simplify[det3], Cyclotomic[7, ζ]] // Collect[#, ζ] &) /. {ζ^4 -> -ζ - ζ^2 + 1/2 (-1 + Sqrt[-7])};
det3 + 1/49 b4^2 + 3/196 b3 b5 /. AssociationThread[vars -> {1, -1, 1, -1, 1, -1, 0}] // Simplify
det3 - 1/49 b4^2 + 3/196 b3 b5 /. AssociationThread[vars -> {1, -1, 1, -1, 1, -1, 0}] // Simplify
```

Out[\*]=

22050

Out[\*]=

0

## §6 (#)から $r_3, r_5, r_6$ を $r_1$ の式で表す

「FormulaPart1.nb」より「 $b_3 = \dots = b_6 = 0, b_7 \neq 0$ 」,  
「 $b_3 = 0, b_4 b_5 b_6 b_7 \neq 0$ 」, 「 $b_3 \neq 0$ 」の3通りを考えると良いです.

$$\left[ \begin{array}{ll} b_3 = \dots = b_6 = 0, b_7 \neq 0 \text{ のとき} & \det 2 = \det (16, 17, 19) \neq 0 \\ b_3 = 0, b_4 b_5 b_6 b_7 \neq 0 \text{ のとき} & \det 1 = \det (16, 17, 18) \neq 0 \\ b_3 \neq 0 \text{ のとき} & \det 1 = \det (16, 17, 18) \neq 0 \quad \text{または} \\ & \det 3 = \det (16, 18, 19) \neq 0 \end{array} \right.$$

上の2つは明らか. 一番下の式はちょっと面倒.

$R_1 = r_1^7$  がみたす3次方程式を $R(x)$  とおくと, 「Formula1.nb 式 (12)」より,  $R$ は下の式

In[92]:= ClearAll[b3, b4, b5, b6, b7, R]

In[93]:= R[{b3\_, b4\_, b5\_, b6\_, b7\_}] =  

$$x^3 + \left(\frac{b3 b4}{14} + b7\right) x^2 + \left(-\frac{b3^2 b4^2}{9604} - \frac{b3^3 b5}{38416} - \frac{b4 b5^2}{1372} + \frac{b3 b5 b6}{1372}\right) x + \left(\frac{b3}{14}\right)^7;$$

このとき下の補題が成り立ちます.

【補題16】「 $b_3 \neq 0$ 」かつ  $\det 1 = \det 3 = 0$  のとき,  $R$  は3重解を持つ

原論文では以下の様に述べています. (記号は少し変更しています)

Let us consider the Grobner basis of the relations between the  $b_i$ , named Gb2 in the proof of Proposition 14. The hypotheses is that we have three more relations  $7 b_6 + b_3^2 = 0$ ,  $4 b_4^2 + 3 b_3 b_5 = 0$  and  $b_3 v - 1 = 0$ , the latter, which introduces a new variable, implying that  $b_3 \neq 0$ . Adding to Gb2 the left hand sides of these relation, let Gb3 be the Grobner basis the lexicographical ordering  $v > b_7 > b_6 > b_5 > b_4 > b_3$ . The first element of Gb3 is the square of  $112 b_4^3 + 27 b_3^4$ . Let Gb4 be the Grobner basis for the same ordering of the ideal which is obtained by adding this polynomial to Gb3. This Grobner basis consists in 8 binomials. Now, let us consider Equation 12, which has  $r_1^7, r_2^7$  and  $r_4^7$  as roots. It has the shape  $R_1^3 + A R_1^2 + B R_1 + C$  where A, B, C are polynomials in the  $b_i$ . Its three roots are equal if and only if  $3B - A^2$  and  $27C - A^3$  are both null. As the normal forms by Gb4 of these two polynomials is null the lemma is proved.

まず「Formula1.nb」よりGb2は次の様に, また原論文ではGb3は次の様になります.

```
In[94]:= Gb2 = {b3^5 - 16 b3 b4^3 + 20 b3^2 b4 b5 + 28 b5^3 - 4 b3^3 b6 - 112 b4 b5 b6 + 112 b3 b6^2,
             b3^2 b4 + b5^2 - 4 b4 b6 + 14 b3 b7,
             - b3^4 + 16 b4^3 + 8 b3 b4 b5 + 4 b3^2 b6 - 112 b6^2 + 392 b5 b7};
Gb3 =
GroebnerBasis[Join[Gb2, {7 b6 + b3^2, 4 b4^2 + 3 b3 b5, b3 v - 1}], {v, b7, b6, b5, b4, b3}]
```

```
Out[95]= {-729 b3^8 + 12 096 b3^4 b4^3 + 12 544 b4^6, 4 b4^2 + 3 b3 b5, 243 b3^7 - 4032 b3^3 b4^3 + 3136 b4^4 b5,
          -81 b3^6 + 1344 b3^2 b4^3 + 784 b4^2 b5^2, 27 b3^5 - 448 b3 b4^3 + 196 b5^3, b3^2 + 7 b6,
          11 b3^2 b4 + 7 b5^2 + 98 b3 b7, 81 b3^5 - 112 b3 b4^3 + 10 976 b4^2 b7, -81 b3^4 + 112 b4^3 + 8232 b5 b7,
          -65 b3^2 b4^2 - 35 b4 b5^2 + 4802 b7^2, -1 + b3 v, 3 b5 + 4 b4^2 v, 11 b3 b4 + 98 b7 + 7 b5^2 v}
```

しかし御覧のように,

「 $(112 b_4^3 + 27 b_3^4)^2 = 729 b_3^8 + 6048 b_3^4 b_4^3 + 12 544 b_4^6$ 」が現れません。一方、  
 先のミスプリを訂正して「 $4 b_4^2 + 3 b_3 b_5 \rightarrow 4 b_4^2 - 3 b_3 b_5$ 」とすると、ちゃんと現れます。

```
In[96]:= Gb3 =
GroebnerBasis[Join[Gb2, {7 b6 + b3^2, 4 b4^2 - 3 b3 b5, b3 v - 1}], {v, b7, b6, b5, b4, b3}]
```

```
Out[96]= {729 b3^8 + 6048 b3^4 b4^3 + 12 544 b4^6, -4 b4^2 + 3 b3 b5, 243 b3^7 + 2016 b3^3 b4^3 + 3136 b4^4 b5,
          81 b3^6 + 672 b3^2 b4^3 + 784 b4^2 b5^2, 27 b3^5 + 224 b3 b4^3 + 196 b5^3, b3^2 + 7 b6,
          11 b3^2 b4 + 7 b5^2 + 98 b3 b7, -81 b3^5 + 560 b3 b4^3 + 10 976 b4^2 b7, -81 b3^4 + 560 b4^3 + 8232 b5 b7,
          -4 b3^2 b4^2 - 4 b4 b5^2 + 343 b7^2, -1 + b3 v, -3 b5 + 4 b4^2 v, 11 b3 b4 + 98 b7 + 7 b5^2 v}
```

この後、原論文に従ってGb4を求めます。

```
In[97]:= Gb4 = GroebnerBasis[Append[Gb3, 112 b4^3 + 27 b3^4], {v, b7, b6, b5, b4, b3}]
```

```
Out[97]= {27 b3^4 + 112 b4^3, -4 b4^2 + 3 b3 b5, 9 b3^3 + 28 b4 b5,
          3 b3^2 b4 + 7 b5^2, b3^2 + 7 b6, 4 b3 b4 + 49 b7, -1 + b3 v, -3 b5 + 4 b4^2 v}
```

次に「 $\text{poly1} = 3 B - A^2$ ,  $\text{poly2} = 27 C - A^3$ 」を求めて、Gb4で簡約します

```
In[98]:= Clear[b3, b4, b5, b6, b7]
{$A, $B, $C} = CoefficientList[R[{b3, b4, b5, b6, b7}], x, 3] // Reverse;
poly1 = 3 $B - $A^2 // Simplify
poly2 = 27 $C - $A^3 // Simplify
```

```
Out[100]= 
$$\frac{-208 b_3^2 b_4^2 - 3 b_3^3 b_5 - 84 b_4 b_5^2 + 84 b_3 b_5 b_6 - 5488 b_3 b_4 b_7 - 38 416 b_7^2}{38 416}$$

```

```
Out[101]= 
$$\frac{27 b_3^7}{105 413 504} - \left( \frac{b_3 b_4}{14} + b_7 \right)^3$$

```

```
In[102]:=
PolynomialReduce[poly1, Gb4, {b7, b6, b5, b4, b3}] [[2]]
PolynomialReduce[poly2, Gb4, {b7, b6, b5, b4, b3}] [[2]]
```

```
Out[102]=
0
```

```
Out[103]=
0
```

故に、「 $b_3 \neq 0$ 」かつ「 $\det 1 = \det 3 = 0$ 」のとき、  
 $R$  は3重解を持ちます。しかし「 $b_3 \neq 0$  の時、 $R$  が重解を持てば  $f$  が可約となる」  
 ので（原論文参照）「 $b_3 \neq 0$  のとき  $\det 1 \neq 0$  または  $\det 3 \neq 0$ 」となります。

以上より、常に  $r_3, r_5, r_6$  は  $r_1$  の式で表されます。

## §7 7乗根の選び方

$r_1^7 = R_1$  の7乗根をとるとき 7通りの取り方がありますが、  
 どのようなにとっても「 $f = 0$ 」の解集合は変わりません。  
 例えば「 $r_1 \rightarrow r_1 \zeta$  ( $\zeta$ は1の原始7乗根)」とすると、  
 「Formula1.nb」の (13) (14) より「 $r_2 \rightarrow r_2 \zeta^2, r_4 \rightarrow r_4 \zeta^4$ 」。さらに (16) ~ (19) より、  
 $r_3, r_5, r_6$  が解の時「 $r_3 \rightarrow r_3 \zeta^3, r_5 \rightarrow r_5 \zeta^5, r_6 \rightarrow r_6 \zeta^6$ 」も解となります。  
 ところがLagrangeの逆変換より、この  $r_k$  の変換によっては  $x_0 \sim x_6$  の値は変わりません。  
 従って7乗根をどの様に選んでも解は変わりません。