

7 次方程式の解を求めるプログラム with Mathematica14.0

以下のプログラムは「Gal = F_{42} , D_7 」にしか対応していません。

理由は今まで調べたところ「Gal = F_{42} , D_7 」の方程式しか見つからなかったからです。しかし、

F_{21} , C_7 にも対応したプログラムにするには「findF12G12」を少し変えるだけです。

プログラムの解説は「Examples.nb」等のファイルをご覧ください。

```
In[*]:= ClearAll["`*"] (*F35は↓のClosed cell の中です。評価してください.*)
```

```
In[*]:= (* f1, f2, g1, g2 を求めるプログラムと f3 を求めるプログラム. Galois 群も $gal に入っています. *)
findF12G12[f_] := Module[{f35, factors, pos1, pos2, f12, d, R1, R2, f12factors, u, v, fp, fm, g1, g2, $gal},
  Clear[a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7];
  f35 = F35 /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7} → Reverse@CoefficientList[f, x],
    factors = FactorList[f35];
  numbers = Table[Length@Position[Exponent[factors[[All, 1]], x], 7k], {k, 1, 5}];
  $gal = Switch[numbers, {0, 0, 0, 0, 1}, "Gal=S7/A7", {1, 0, 0, 1, 0}, "Gal=F168", {0, 1, 1, 0, 0}, "Gal=F42",
    {2, 0, 1, 0, 0}, "Gal=F21", {3, 1, 0, 0, 0}, "Gal=D7", {5, 0, 0, 0, 0}, "Gal=C7", _, "既約ではありません"]; (*Galois 群は
    (*gal=F42, D7 のときのみ, 直下を実行. それ以外は Abort[] する. *)
  If[numbers == {0, 1, 1, 0, 0} || numbers == {3, 1, 0, 0, 0},
    pos1 = Position[Exponent[factors[[All, 1]], x], 14][[1, 1]];
    f12 = factors[[pos1]][[1]];
    d = Sqrt@Discriminant[f12, x];
    f12factors = FactorList[f12, Extension → d];
    pos2 = Flatten@Position[Exponent[f12factors[[All, 1]], x], 7];
    {$f1, $f2} = (Expand[#/Coefficient[#, x, 7]] &) /@f12factors[[pos2]][[All, 1]];
    u = -(t1+t2)/14 + (t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
    v = -(t1+t2)/14 - (t1-t2)/(2Sqrt[-7]);
    fp = ($f1 /. {x → u}) + ($f2 /. {x → v});
    fm = Sqrt[-7] (( $f1 /. {x → u}) - ($f2 /. {x → v}));
    g1 = GroebnerBasis[{f /. {x → (t1+t2)/7}, fp, fm}, {t1}, {t2}][[1]];
    $g1 = If[Coefficient[g1, t1, 7] != 0, Expand[#/Coefficient[#, t1, 7]] & [g1] /. {t1 → x},
    R1 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fp /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
    R2 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fm /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
    PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
    gcd1 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
    Expand[gcd1/Coefficient[gcd1, t1, 7]] /. {t1 → x};
    g2 = GroebnerBasis[{f /. {x → (t1+t2)/7}, fp, fm}, {t2}, {t1}][[1]];
    $g2 = If[Coefficient[g2, t2, 7] != 0, Expand[#/Coefficient[#, t2, 7]] & [g2] /. {t2 → x},
    R1 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fp /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
    R2 = Resultant[f /. {x → (t1+t2)/7}, fm /. {u → -(t1+t2)/14 - Sqrt[-7] (t1-t2)/14, v → -(t1+t2)/14 + Sqrt[-7] (t1-t2)/14},
    PolynomialGCD[R1, R2, Extension → Automatic];
    Expand[gcd2/Coefficient[gcd2, t2, 7]] /. {t2 → x};
    If[$g1 == x^7, {$f1, $f2, $g1, $g2} = {$f2, $f1, $g2, $g1}];
    Return[{$f1, $f2, $g1, $g2}],
    Print[$gal]; Abort[]]
```

```
In[*]:= (*f3を求めるプログラム. $f1,$f2が必要なので, findF12G12が既に実行されている事が必要*)
findF3[f_] := Module[{R1, R2, gcd3},
R1 = Resultant[f, $f1 /. {x -> (t - x) / 2}, x];
R2 = Resultant[f, $f2 /. {x -> (-t - x) / 2}, x];
gcd3 = PolynomialGCD[R1, R2, Extension -> Automatic];
$f3 = (Expand[# / Coefficient[#, t, 7]] &[gcd3]) /. {t -> x}]
```

ln[]:= (* r₁⁷, r₂⁷, r₄⁷ を解とする3次方程式, b₁をc_iに変えるとr₃⁷, r₅⁷, r₆⁷ を解とする3次方程式*)

$$R[\{b3_ , b4_ , b5_ , b6_ , b7_ \}]:=x^3 + \left(\frac{b3 \ b4}{14} + b7\right) x^2 + \left(-\frac{b3^2 \ b4^2}{9604} - \frac{b3^3 \ b5}{38416} - \frac{b4 \ b5^2}{1372} + \frac{b3 \ b5 \ b6}{1372}\right) x + \left(\frac{b3}{14}\right)^7;$$

```
ln[*]:= (* r1からr2を求める式*)  
findr2[r1_,{b3_,b4_,b5_,b6_,b7_}]:=-2 (r1)^2*  
      
$$\left( \frac{r1^7 (5488 b3 b4^2 - 1372 b3^2 b5 + 19208 b5 b6) + b7}{r1^7 (-196 b3^4 - 10976 b4^3 + 2744 b3 b5)} \right)$$

```

```
In[ ]:= (*monic な3次方程式の解を「分母に累乗根が入らない形 (係数が有理数の時は有理数)」で出力*)
solveCube[f_]:=Module[{delta,g,u,v,p,q,power},
delta=Coefficient[f,x,2]/3;
g=Expand[f/.{x->x-delta}];
{q,p}=CoefficientList[g,x,2];
{u,v}={(-q/2+Sqrt[q^2/4+p^3/27])^(1/3),(-q/2-Sqrt[q^2/4+p^3/27])^(1/3)};
$w=Cos[2/3Pi]+I Sin[2/3Pi];
power=Quiet[PositionSmallest[Abs[N[-p/3,30]-N[u v $w^{0,1,2},30]]][[1]]-1];
v=v*$w^power;
{u+v,u $w+v $w^2,u $w^2+v $w}-delta]
```

```

In[*]:= (*b3≠0または[b3=0かつb4≠0]のとき, r1~r6を求める*)
b3NE0[{a2_,a3_,a4_,a5_,a6_,a7_},{b3_,b4_,b5_,b6_,b7_},{c3_,c4_,c5_,c6_,c7_},{dp2_,dp3_,dp4_,
Module[{sol1,sol2,power1,power2,$g,$mat1,$mat2,$mat3,r1,r2,r3,r4,r5,r6,$r1,$r2,$r3,$r4,$r5,$r6
(*Part1 r1~r6の近似値を求める.Precision=20*)
sol1=solveCube[R[{b3,b4,b5,b6,b7}]]];
r1=sol1[[1]]^(1/7);
$r1=N[r1,20];
$r2=findr2[$r1,{b3,b4,b5,b6,b7}];
$r4=-b3/(14 $r1 $r2);
det1=-1/7 b6-1/49 b3^2;
{k1,k2,k3,k4}={-7a2,-1/14 b3+21/4 dp3-7/4 dm3-14a3,1/21 c4-1/42 b4+49/12 (dp4+dm4)-98/3 a4,7 e5+1/7 c5-3/14 b5-343/
mat={{$r1,$r2,$r4},{ $r4^2, $r1^2, $r2^2 },{$r4 $r2^2, $r1 $r4^2, $r2 $r1^2},{ $r2^4,$r4^4,$r1^
If[( *det1≠0のとき*) det1≠0,
$mat1=$mat2=$mat3=mat[[{1,2,3}]];
$mat1[[A11,1]]=$mat2[[A11,2]]=$mat3[[A11,3]]={k1,k2,k3};
{$r6,$r5,$r3}={Det[$mat1],Det[$mat2],Det[$mat3]}/det1,
(*det1=0のとき. このときdet3≠0*)
det3=1/49 b4^2-3/196 b3 b5;
k4=k4/.{e5→Coefficient[findF3[x^7+{a2,a3,a4,a5,a6,a7}.x^{5,4,3,2,1,0}],x,2]};
$mat1=$mat2=$mat3=mat[[{1,3,4}]];
$mat1[[A11,1]]=$mat2[[A11,2]]=$mat3[[A11,3]]={k1,k3,k4};
{$r6,$r5,$r3}={Det[$mat1],Det[$mat2],Det[$mat3]}/det3};(*end of If*)
(*Part2 厳密解で表す*)
posR2=PositionSmallest[Abs[N[$r2^7-sol1[[{2,3}]],20]]][[1]]+1;
posR4=PositionSmallest[Abs[N[$r4^7-sol1[[{2,3}]],20]]][[1]]+1;
{R2,R4}=sol1[[{posR2,posR4}]];
{r2,r4}={R2,R4}^(1/7);
$g=N[Cos[2Pi/7]+I Sin[2Pi/7],20];
power1={PositionSmallest[Abs[N[r2,20] $g^{0,1,2,3,4,5,6}-$r2]][[1]],PositionSmallest[Abs[N[r4,
Clear[g];
{r2,r4}={r2,r4}$g^power1;
sol2=solveCube[R[{c3,c4,c5,c6,c7}]]];
posR3=PositionSmallest[Abs[$r3^7-sol2]][[1]];
posR5=PositionSmallest[Abs[$r5^7-sol2]][[1]];
posR6=PositionSmallest[Abs[$r6^7-sol2]][[1]];
{R3,R5,R6}=sol2[[{posR3,posR5,posR6}]];
{r3,r5,r6}={R3,R5,R6}^(1/7);
power2={PositionSmallest[Abs[N[r3,20] $g^{0,1,2,3,4,5,6}-$r3]][[1]],PositionSmallest[Abs[N[r5,
{r3,r5,r6}={r3,r5,r6}$g^power2;
Return[{r1,r2,r3,r4,r5,r6}]
]

```

```

In[*]:= (* [b3=0かつb4=0,b7≠0] のとき, r1~r6を求める*)
b3b4EQ0[{a2_,a3_,a4_,a5_,a6_,a7_},{b3_,b4_,b5_,b6_,b7_},{c3_,c4_,c5_,c6_,c7_},{dp2_,dp3_,dp4_}];
Module[{r1,r2,r3,r4,r5,r6,det2,e5,k1,k2,k4,$mat1,$mat2,$mat4},
(*いきなり, 厳密解*)
r2=r4=0;
r1=-b7^(1/7);
det2=-b7- $\frac{4}{49}$  b3 b4;
e5=Coefficient[findF3[x^7+{a2,a3,a4,a5,a6,a7}.x^{5,4,3,2,1,0}],x,2];
{k1,k2,k4}={-7a2,- $\frac{1}{14}$  b3+ $\frac{21}{4}$  dp3- $\frac{7}{4}$  dm3-14a3,7 e5+ $\frac{1}{7}$  c5- $\frac{3}{14}$  b5- $\frac{343}{4}$  (dp5+dm5)+b3 a2-343 a5} // Simplify;
$mat1=$mat2=$mat3={{r1,r2,r4},{r4^2, r1^2, r2^2},{r2^4,r4^4,r1^4}};
$mat1[[All,1]]=$mat2[[All,2]]=$mat3[[All,3]]={k1,k2,k4};
{r6,r5,r3}={Det[$mat1],Det[$mat2],Det[$mat3]}/det2;
Return[{r1,r2,r3,r4,r5,r6}]
]

```

```

In[*]:= (*main program*)
solveSeptic[f0_]:=Module[{delta,f,f1,f2,g1,g2,Fp,Fm,rs,a2,a3,a4,a5,a6,a7,b3,b4,b5,b6,b7,c3,c4,
delta=Coefficient[f0,x,6]/7;
f=Expand[f0/.{x→x-delta}];
{f1,f2,g1,g2}=findF12G12[f];
{a2,a3,a4,a5,a6,a7}=CoefficientList[f,x,6] // Reverse;
{b3,b4,b5,b6,b7}=CoefficientList[g1,x,5] // Reverse;
{c3,c4,c5,c6,c7}=CoefficientList[g2,x,5] // Reverse;
Fp=f1+f2 // Collect[#,x]&;
Fm=Sqrt[-7] (f1-f2) // Collect[#,x]&;
{dp2,dp3,dp4,dp5,dp6,dp7}=CoefficientList[Fp,x,6] // Reverse;
{dm2,dm3,dm4,dm5,dm6,dm7}=CoefficientList[Fm,x,6] // Reverse;
rs=Which[b3≠0|| (b3==0&& b4≠0),b3NE0[{a2,a3,a4,a5,a6,a7},{b3,b4,b5,b6,b7},{c3,c4,c5,c6,c7},{dp2,dp3,dp4,dp5,dp6,dp7}],
(b3==0&& b4==0),b3b4EQ0[{a2,a3,a4,a5,a6,a7},{b3,b4,b5,b6,b7},{c3,c4,c5,c6,c7},{dp2,dp3,dp4,dp5,dp6,dp7}];
Clear[ξ,ω];
X=1/7{1,1,1,1,1,1},ξ^{6,5,4,3,2,1},ξ^{5,3,1,6,4,2},ξ^{4,1,5,2,6,3},ξ^{3,6,2,5,1,4},ξ^{2,4,6,3,5,1}};
X={x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6}=X/.{ξ^p_→ξ^Mod[p,7],- $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ →ω};
Column[{ $gal<>" , x0=\n",TraditionalForm[x0]}]
]

```

§1 使用例

`solveSeptic[f(x)]` (f はmonicで既約な7次式)と打てば、「 $f=0$ 」の厳密解 (累乗根を使った解) が求まります。ただし「 $\zeta=\cos(2\pi/7)+i\sin(2\pi/7), \omega=\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)$ 」です。また出力が非常に長くなる事が多いので、DefaultではGalois群と x_0 (実数の事が多い)だけを出力してます。解は変数 $x_0, x_1, \dots, x_6$ に、また解の集合は X に入っているので、 x_0 以外の解も簡単に見ることができます。($x_0, x_1, \dots, x_6, X$ はGlobalです。)

1. $f = x^7 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + 3$

`In[*]:= f = x^7 - 2 x^5 + x^4 + 4 x^3 - x^2 - 4 x + 3;`

[illegible]

一番上に Galois 群が書いてあります。Gal = F_{42} です。実行時間は私の環境で 0.67 秒でした。
 解 (= x_0) は複雑に見えますが、それは過程が分かる様に何もいじってないからです。
 また ω や ζ のままにしているのも同じ理由です。（簡略化すると元に戻せない。）
 簡略化には、Simplify が使えます。

In[*]:= Simplify[x0]

Out[*]=

$$\frac{1}{6^{1/7} \cdot 7^{5/7}} \left(\left((-7105 + 1911 \sqrt{13} + 2^{2/3} \right. \right. \\ \left. \left. \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} - 3 \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + 2^{2/3} \right. \right. \\ \left. \left. \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3 \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} + \right. \\ \left. (-7105 + 1911 \sqrt{13} + 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 3 \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \omega + \right. \\ \left. 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3 \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right. \\ \left. \omega^2 \right)^{1/7} + \zeta^3 \left((-7105 - 1911 \sqrt{13} + 2^{2/3} \right. \\ \left. \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} - 3 \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} + \right. \\ \left. 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 3 \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right)^{1/7} + (-7105 + 1911 \sqrt{13} + 2^{2/3} \\ \left. \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} + 3 \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \omega + \right. \\ \left. 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 + 12198286674 \sqrt{13} - 3 \sqrt{39(42645283298884717 - 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right. \\ \left. \omega^2 \right)^{1/7} + (-7105 - 1911 \sqrt{13} + 2^{2/3} \\ \left. \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} + 3 \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \omega + \right. \\ \left. 2^{2/3} \left(7 \left(-43982153605 - 12198286674 \sqrt{13} - 3 \sqrt{39(42645283298884717 + 11827673483952564 \sqrt{13})} \right) \right)^{1/3} \right. \\ \left. \omega^2 \right)^{1/7} \Big) \Big)$$

近似値を求めて NSolve で求める数値解と比較します。ただし、 x_k は上の様に非常に複雑なので、有効数字の桁数を増やさないと x_k の近似値が正確に求まらないことがあります。

「 $X = \{x_0, \dots, x_6\}$ 」の値をまとめて比較します。

比較する際は「 $\zeta = \cos(2\pi/7) + i \sin(2\pi/7)$, $\omega = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)$ 」を代入してください。

```

In[*]:= X /. {ξ → Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7], ω → -1 / 2 + 1 / 2 Sqrt[-3]} // N[#, 20] & // Chop //
Sort
x /. NSolve[f == 0, x, 20]

Out[*]:=
{-1.38879703091041433235, -1.03949787591759483646 + 0.82652009673523383574 i,
-1.03949787591759483646 - 0.82652009673523383574 i,
0.73655819556043395965 + 0.40826156222046095970 i,
0.73655819556043395965 - 0.40826156222046095970 i,
0.99733819581236804298 + 0.85575867471477191387 i,
0.99733819581236804298 - 0.85575867471477191387 i}

Out[*]:=
{-1.3887970309104143323, -1.03949787591759483646 - 0.82652009673523383574 i,
-1.03949787591759483646 + 0.82652009673523383574 i,
0.73655819556043395965 - 0.40826156222046095970 i,
0.73655819556043395965 + 0.40826156222046095970 i,
0.99733819581236804298 - 0.85575867471477191387 i,
0.99733819581236804298 + 0.85575867471477191387 i}

```

御覧の様に「精度=20桁」の場合はほぼ完全に一致しますが、単純にN[x]を使うと全く一致しません!
 (私はこれで丸一日嵌りました。)なお原論文の著者は「精度 = 30桁」でやっていたようですが、私の経験
 では「精度 = 20桁」で十分でした。

```

In[*]:= X /. {ξ → Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7], ω → -1 / 2 + 1 / 2 Sqrt[-3]} // N // Chop // Sort
x /. NSolve[f == 0, x]

Out[*]:=
{-0.951933 - 0.0434167 i, -0.871368 + 1.07445 i, -0.481839 + 1.38324 i,
0.32832 - 0.506201 i, 0.400709 - 0.049473 i, 0.661592 - 1.88662 i, 0.914518 + 0.0280242 i}

Out[*]:=
{-1.3888, -1.0395 - 0.82652 i, -1.0395 + 0.82652 i, 0.736558 - 0.408262 i,
0.736558 + 0.408262 i, 0.997338 - 0.855759 i, 0.997338 + 0.855759 i}

```

2. $x^7 - 3$

もっとも簡単な既約7次方程式の一つです。

```

In[*]:= f = x^7 - 3;
solveSeptic[f]

Out[*]:=
Gal=F42, x0=
- $\sqrt[7]{-3}$ 

```

解全体も表示します。近似値と数値解の比較は不要ですね。x0 の表示が上と異なるのは、上は
 TraditionalForm を効かしているからです。

```

In[*]:= X

Out[*]:=
{-(-3)1/7, -(-3)1/7 ξ6, -(-3)1/7 ξ5, -(-3)1/7 ξ4, -(-3)1/7 ξ3, -(-3)1/7 ξ2, -(-3)1/7 ξ}

In[*]:=

```


$$3. \quad x^7 - 7x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 7x + 3$$

Gal = D₇ の例も見てください。ラッキ-7 のような関数です。

```
In[ ]:= f = x^7 - 7 x^5 + 7 x^4 + 7 x^3 + 7 x^2 + 7 x + 3;
solveSeptic[f]
```

```
Out[ ]:=
```

Gal=D₇, x0=

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} \left(\zeta^3 \sqrt[7]{\sqrt[3]{-\frac{2676946468535003}{54} - \frac{8816899947037i}{6\sqrt{3}}} \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{2676946468535003}{54} + \frac{8816899947037i}{6\sqrt{3}}} \omega - \frac{117649}{3}} + \right. \\ & \zeta^3 \sqrt[7]{\sqrt[3]{-\frac{2676946468535003}{54} + \frac{8816899947037i}{6\sqrt{3}}} \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{2676946468535003}{54} - \frac{8816899947037i}{6\sqrt{3}}} \omega - \frac{117649}{3}} + \\ & \zeta^3 \left(\sqrt[7]{\sqrt[3]{-\frac{277363748334256598329}{54} - \frac{20728531775483987i}{6\sqrt{3}}} \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{277363748334256598329}{54} + \frac{20728531775483987i}{6\sqrt{3}}} \omega - \right. \\ & \quad \left. \frac{5176556}{3} \right)^{\wedge} (1/7) + \zeta^3 \left(\sqrt[7]{\sqrt[3]{-\frac{277363748334256598329}{54} + \frac{20728531775483987i}{6\sqrt{3}}} \omega^2 + \right. \\ & \quad \left. \sqrt[3]{-\frac{277363748334256598329}{54} - \frac{20728531775483987i}{6\sqrt{3}}} \omega - \frac{5176556}{3} \right)^{\wedge} (1/7) + \\ & \sqrt[7]{-\frac{117649}{3} + \sqrt[3]{-\frac{2676946468535003}{54} - \frac{8816899947037i}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{2676946468535003}{54} + \frac{8816899947037i}{6\sqrt{3}}}} \zeta^3 + \\ & \left. \sqrt[7]{-\frac{5176556}{3} + \sqrt[3]{-\frac{277363748334256598329}{54} - \frac{20728531775483987i}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{277363748334256598329}{54} + \frac{20728531775483987i}{6\sqrt{3}}}} \right) \end{aligned}$$

Simplify して、さらにこちらも TraditionalForm で表示します。どちらがお好みでしょうか？

```
In[ ]:= Simplify[x0] // TraditionalForm
```

```
Out[ ]//TraditionalForm=
```

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[7]{6} \, 7^{3/7}} \left(\zeta^3 \left(\sqrt[7]{14^{2/3} \sqrt[3]{-3947-39i\sqrt{3}}} \omega^2 + 14^{2/3} \sqrt[3]{-3947+39i\sqrt{3}} \omega - 98 + \sqrt[7]{14^{2/3} \sqrt[3]{-3947+39i\sqrt{3}}} \omega^2 + 14^{2/3} \sqrt[3]{-3947-39i\sqrt{3}} \omega - 98 + \right. \right. \\ & \sqrt[7]{14^{2/3} \sqrt[3]{-408956521-91689i\sqrt{3}}} \omega^2 + 14^{2/3} \sqrt[3]{-408956521+91689i\sqrt{3}} \omega - 4312 + \\ & \sqrt[7]{14^{2/3} \sqrt[3]{-408956521+91689i\sqrt{3}}} \omega^2 + 14^{2/3} \sqrt[3]{-408956521-91689i\sqrt{3}} \omega - 4312 + \\ & \left. \sqrt[7]{-98+14^{2/3} \sqrt[3]{-3947-39i\sqrt{3}}} + 14^{2/3} \sqrt[3]{-3947+39i\sqrt{3}} \right) + \\ & \left. \sqrt[7]{-4312+14^{2/3} \sqrt[3]{-408956521-91689i\sqrt{3}}} + 14^{2/3} \sqrt[3]{-408956521+91689i\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

私は「Simplifyしていない方」が好みです。「厳密解を求めている気配」がもっと濃厚にするからです。次に例によって近似解と数値解を比較します。御覧の様に一致します。

```
In[*]:= X /. {ξ → Cos[2 Pi / 7] + I Sin[2 Pi / 7], ω → -1 / 2 + 1 / 2 Sqrt[-3]} // N[#, 20] & // Chop //
Sort
x /. NSolve[f == 0, x, 20]
```

```
Out[*]:=
{-2.9594099619299353176, -0.53940751283856183399 + 0.25283072740116912485 i,
-0.53940751283856183399 - 0.25283072740116912485 i,
0.06260752205015066830 + 0.78073405035127309330 i,
0.06260752205015066830 - 0.78073405035127309330 i,
1.9565049717533788245 + 0.9101519095780632954 i,
1.9565049717533788245 - 0.9101519095780632954 i}
```

```
Out[*]:=
{-2.9594099619299353176, -0.53940751283856183399 - 0.25283072740116912485 i,
-0.53940751283856183399 + 0.25283072740116912485 i,
0.06260752205015066830 - 0.78073405035127309330 i,
0.06260752205015066830 + 0.78073405035127309330 i,
1.9565049717533788245 - 0.9101519095780632954 i,
1.9565049717533788245 + 0.9101519095780632954 i}
```

4. $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 2$

最後に既約でない例をお見せします。

実は定数項が一つ増えた「 $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 3$ 」は $\text{Gal} = F_{42}$ で既約ですが、
これらの関数は既約ではありません。従って途中で Abort しています。なお、

現在「solveSeptic」は $\text{Gal} = F_{42}$, D_7 にしか対応していません。

しかし Galois 群は求められるので、将来 $\text{Gal} = C_6$, F_{21} の関数を入力した場合は、
それぞれの Galois 群が表示された後 Abort するはずですが。

```
In[*]:= f = x^7 - 7 x^5 + 14 x^3 - 7 x + 2
solveSeptic[f]
```

```
Out[*]:=
2 - 7 x + 14 x^3 - 7 x^5 + x^7
```

既約ではありません

```
Out[*]:=
$Aborted
```

```
In[*]:= Factor[f]
```

```
Out[*]:=
(2 + x) (1 - 2 x - x^2 + x^3)^2
```

§2 既約で可解な7次方程式の個数

私がSageMathで延べ2週間かけて発見した 可解で既約な方程式「 $x^7+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ ($-15 \leq a,b,c,d,e \leq 15, 1 \leq f \leq 15$)」の係数 $\{a,b,c,d,e,f\}$ と $\text{order}(\text{Gal})$ のセットは以下のリストになります。 約4.3億のうち、可解で既約な関数はたった79個しかありません。 驚きです。 なお既約で可解な7次方程式の例は <https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/septic/solvableSepticEquations.txt> にも置いてあります。 こちらは新しい関数が見つかり次第 update するつもりですから、興味がお有りの方は時々覗いてみてください。

```
In[*]:= solvables = {{-7, 0, 14, 0, -7, 3}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 4}, 42},
  {-7, 0, 14, 0, -7, 5}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 6}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 7}, 42},
  {-7, 0, 14, 0, -7, 8}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 9}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 10}, 42},
  {-7, 0, 14, 0, -7, 11}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 12}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 13}, 42},
  {-7, 0, 14, 0, -7, 14}, 42}, {-7, 0, 14, 0, -7, 15}, 42}, {-7, 7, 7, -14, 0, 9}, 14},
  {-7, 7, 7, 7, 7, 3}, 14}, {-7, 9, -1, -9, 7, 7}, 14}, {-5, -4, 8, 3, 11, 7}, 14},
  {-4, 6, 15, 3, 3, 1}, 14}, {-3, 2, 7, 6, -3, 1}, 14}, {-3, 2, 6, -6, -1, 12}, 42},
  {-2, -3, 1, 5, 4, 1}, 14}, {-2, -3, 8, 2, -12, 7}, 14}, {-2, -3, 14, -4, 6, 1}, 14},
  {-2, -1, -2, 0, 6, 5}, 14}, {-2, 1, 4, -1, -4, 3}, 42}, {-1, 0, 3, -4, -9, 11}, 14},
  {-1, 3, -3, -2, 14, 7}, 14}, {-1, 5, 3, -5, 3, 7}, 14}, {0, -8, 10, 8, 12, 2}, 42},
  {0, 0, -7, 14, -7, 8}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 2}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 3}, 42},
  {0, 0, 0, 0, 0, 4}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 5}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 6}, 42},
  {0, 0, 0, 0, 0, 7}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 8}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 9}, 42},
  {0, 0, 0, 0, 0, 10}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 11}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 12}, 42},
  {0, 0, 0, 0, 0, 13}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 14}, 42}, {0, 0, 0, 0, 0, 15}, 42},
  {0, 0, 7, -7, 7, 1}, 14}, {0, 4, 1, -2, 2, 3}, 14}, {0, 6, -3, 6, 1, 12}, 42},
  {0, 7, -14, 0, 0, 7}, 14}, {0, 7, 7, 7, 14, 9}, 14}, {0, 7, 14, 14, 7, 2}, 42},
  {1, -4, -1, 0, 5, 1}, 14}, {1, 9, 2, -1, 11, 4}, 42}, {2, 0, 3, 5, -7, 5}, 14},
  {2, 4, -5, 7, -3, 1}, 14}, {2, 6, 6, -2, 1, 2}, 14}, {3, 1, 2, 7, -2, 4}, 14},
  {4, -11, 13, -3, -14, 13}, 14}, {4, -2, 2, 0, -3, 2}, 14},
  {4, 4, 1, 12, -2, 1}, 14}, {5, 3, 3, 10, 2, 1}, 14}, {6, 6, 1, 7, -5, 1}, 14},
  {7, 0, 7, 0, 7, 3}, 14}, {7, 0, 14, -14, -7, 6}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 1}, 42},
  {7, 0, 14, 0, 7, 2}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 3}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 4}, 42},
  {7, 0, 14, 0, 7, 5}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 6}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 7}, 42},
  {7, 0, 14, 0, 7, 8}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 9}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 10}, 42},
  {7, 0, 14, 0, 7, 11}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 12}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 13}, 42},
  {7, 0, 14, 0, 7, 14}, 42}, {7, 0, 14, 0, 7, 15}, 42}, {9, -3, 1, 9, 4, 1}, 14}};
Length[%]
```

Out[*]=

79

§3 原論文で述べられているアルゴリズム

原論文では以下の様に簡潔なアルゴリズムが載っています。(Maple以外のソフトでもプログラムできる様に、アルゴリズムだけを載せているのだと思います。クリアではないですが、スクショのスクショなので、申し訳ございません。原論文の方が若干見やすいと思います。なお原論文ではなぜか複雑な数式は全てスクショとなっています。読みやすいとは言えないです。私は所々拡大鏡を使いました。)

Starting from an irreducible septic,
 Apply the Tschirnhaus transformation $x \rightarrow x - T$ to get a depressed septic.
 Compute the polynomial of degree 35 of the sums of three roots (Section 3.2).
 Factorize it to test solvability and compute septics f_1 and f_2 (Section 5.2).
 Compute the invariant septics g_1 and g_2 (Section 5.3).
 If $g_1 = t^7$ then exchange f_1, g_1 with f_2, g_2 .
 $b_i := \text{coeff}(g_1, t, 7 - i)$ for $i = 3, \dots, 7$.
 If $b_3 = b_4 = 0$ then
 $u_1 := -\sqrt[7]{b_7}$, $u_2 := 0$, $u_4 = 0$.
 Compute the polynomial f_3 (Section 5.3)
 Compute u_3, u_5, u_6 by Cramer's rules from Equations 16, 17, 19,
 If $b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$ then
 $u_1 := \sqrt[7]{\frac{-b_5 b_6}{14 b_4}}$, $u_2 := \frac{2 u_1^2 b_4}{b_6}$, $u_4 := 0$
 Compute u_3, u_5, u_6 by Cramer's rules from Equations 16, 17, 18,
 In[*]:= If $b_3 \neq 0$ then
 Use Equations 11 to 14 to define u_1, u_2, u_4 , choosing the root
 in Equation 12 in order to avoid division by zero in Equation 13
 If $7 b_6 + 49 b_3^2 \neq 0$
 then compute u_3, u_5, u_6 by Cramer's rules from Equations 16, 17, 18,
 else
 Compute the polynomial f_3 (Section 5.3)
 Compute u_3, u_5, u_6 by Cramer's rules from Equations 16, 18, 19.
 $\omega :=$ the expression by radicals of a primitive 7th root of unit.
 The roots are

$$-T + \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6}{7},$$

$$-T + \frac{\omega u_1 + \omega^2 u_2 + \omega^3 u_3 + \omega^4 u_4 + \omega^5 u_5 + \omega^6 u_6}{7}, \quad -T + \frac{\omega^2 u_1 + \omega^4 u_2 + \omega^6 u_3 + \omega u_4 + \omega^3 u_5 + \omega^5 u_6}{7},$$

$$-T + \frac{\omega^3 u_1 + \omega^5 u_2 + \omega^2 u_3 + \omega^5 u_4 + \omega u_5 + \omega^4 u_6}{7}, \quad -T + \frac{\omega^4 u_1 + \omega u_2 + \omega^5 u_3 + \omega^2 u_4 + \omega^6 u_5 + \omega^3 u_6}{7},$$

$$-T + \frac{\omega^5 u_1 + \omega^3 u_2 + \omega u_3 + \omega^6 u_4 + \omega^4 u_5 + \omega^2 u_6}{7}, \quad -T + \frac{\omega^6 u_1 + \omega^5 u_2 + \omega^4 u_3 + \omega^3 u_4 + \omega^2 u_5 + \omega u_6}{7}.$$