ガロア群が G_{72} (またはその部分群) の方程式の厳密解 with *Mathematica* 14

例：$f(x) = x^6 + 3\,x^3 + 9\,x^2 + 9\,\mathrm{x} + 9$

2025 年5月31日 by mixedmoss

In[∘]:= 注【計算量が多いので，ノートブックの評価には30秒ほどかかります】

In[307]:=

```
ClearAll["Global`*"]
```

---

§1. ガロア群 G_{72} について

既約で可解な6次方程式のガロア群Galは大きく分けて，

3 つのグループに分かれます．(添え数字は位数を表します．)

$$\begin{cases} G_{72}\text{ グループ： } G_{72},\ G_{36},\ \Gamma_{36},\ G_{18}\ \left(G_{72}\text{ の部分群だが }G_{48}\text{ の部分群でない}\right) \\ G_{48}\text{ グループ： } G_{48},\ G_{24},\ \Gamma_{24},\ H_{24},\ \Gamma_{12}\ \left(G_{48}\text{ の部分群 だが}G_{72}\text{ の部分群でない}\right) \\ G_{12}\text{ グループ： } G_{12},\ C_6,\ H_6\ \left(G_{72}\text{ と}G_{48}\text{ の共通の部分群で}G_{12}\text{ の部分群となる}\right) \end{cases}$$

G_{72} の分解列は，例えば $G_{72} \triangleright G_{36} \triangleright G_{18} \triangleright H_6 \simeq S_3 \triangleright C_3 \triangleright \{\mathrm{id}\}$

G_{72} は定まった名前はないようですが，例えば

$$G_{72} = <\sigma,\ \tau>,\ \ \sigma = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6),\ \tau = (1,\ 3)$$

です．ガロア群が G_{72} グループとなる方程式の例としては

「$f(x) = (g(x))^2 + a\,(g(x)) + b$ (a, bは有理数，gは3次式)」があります．例えば

「$f(x) = \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)^2 + 4\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) + 1 = x^6 + 2\,x^5 + 3\,x^4 + 8\,x^3 + 7\,x^2 + 6\,x + 6$」

のガロア群は G_{72} です．この例は，

「2 次方程式 → 3 次方程式」の順で比較的簡単に解くことができます．

これと同様に「2 次方程式 → 3 次方程式」の順で，

Gal = G_{72} やグループG_{72}，G_{12} の方程式は解くことが可能です．

因みに Gal = G_{72} の方程式は 可解で既約な5次方程式のほぼ半分を占めており，

その内わずか 7 %ほどが上の様な形に直ります．

(但し fがmonicかつ整数係数でその絶対値が10以下の場合)

ここでは上のような簡単な形にならないGal =

G_{72} の方程式の例として「$f(x) = x^6 + 3\,x^3 + 9\,x^2 + 9\,x + 9$」を取り上げます． なお，

ガロア群について詳しくは sexticEquationsGaloisGroup.nb をご覧ください．

§2 . ガロア分解式 (Galois Resolvent)

5次方程式に関するDummit氏の論文(1991年)の, $f_{20}(x)=(x-\theta_1)(x-\theta_2)(x-\theta_3)(x-\theta_4)(x-\theta_5)(x-\theta_6)$ がその例です．ただこの論文では Galois Resolventは $f_{20}(x)$ の一つだけで，またGalois Resolvent という言葉は使われていません．6次方程式に関するHagedorn氏の論文(2000年)では，Galois Resolvent という言葉が与えられて，かつ10個ほど使われています．一方「Minnesota Journal of Undergraduate Mathematics vol1 #1(2015年)」では absolute Resolvent という名前になっているので，結局，定まった名前はないようです．ガロア理論の入門書(数学書)には載っていないですが，歴史は古く，Emmy Noether 氏が1915年の論文で触れたようです．Noether 氏がどのようなことを書いたのかは全く知りませんが，コンピューターを使って解を計算したり ガロア群を求めるにはとても有効みたいです．私は今まで5次方程式や7次方程式を解くときは，原始元vによるfの解の表現を使っていたのですが，Gal= G_{72} の時は SageMathを使っても正しい式が見つからなかったので，今回は Galois Resolventを使うことにしました.

まず「$G_{72}=\langle\sigma,\tau\rangle$, σ=(1,2,3,4,5,6),τ=(1,3) 」によって不変な式を1つ見つけます．例えば θ=(x1 + x3 + x5)(x2 + x4 + x6) がそれに当たります．次に $[S_6: G_{72}]$=6!/72=10 なので ,S_6は G_{72}の10個の剰余類に 分けられます．その代表元の集合をΣ10 とし，θをΣ10 の全ての要素で置換して作った積 p(x)= Π(x-$\theta_{\Sigma 10}$) は ,x1~x6の対称式となり，p(x)は有理数係数の多項式となります．そしてp(x) の10個の解のうちちょうど一個が θとなる訳ですが, θは G_{72}によって不変なので，有理数です．即ち p(x)は有理数解θを少なくとも1つ持ちます．可解な5次方程式の時は，有理数θはただ1つだったのですが, 6次方程式では異なります．さてまずは Σ10 ({x1,x3,x5,x2,x4,x6}の置換として表現)を作ります.

In[308]:=

```
Clear[x1, x2, x3, x4, x5, x6]
```

In[309]:=

```
Σ10 = (set = Subsets[{x1, x3, x5, x2, x4, x6}, {3}][[1 ;; 10]];
  Table[Flatten[{set[[k]], Complement[{x1, x2, x3, x4, x5, x6}, set[[k]]]}], {k, 1, 10}])
```

Out[309]=

```
{{x1, x3, x5, x2, x4, x6}, {x1, x3, x2, x4, x5, x6},
 {x1, x3, x4, x2, x5, x6}, {x1, x3, x6, x2, x4, x5},
 {x1, x5, x2, x3, x4, x6}, {x1, x5, x4, x2, x3, x6}, {x1, x5, x6, x2, x3, x4},
 {x1, x2, x4, x3, x5, x6}, {x1, x2, x6, x3, x4, x5}, {x1, x4, x6, x2, x3, x5}}
```

次に「f (x) = $x^6 - a_1 x^5 + a_2 x^4 - a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x + a_6$」と置きます.
即ち「f (x) の n次対称式が a_n (n = 1, 2, .. 6)」です.
そして $\theta = \theta_a$ = (x1 + x3 + x5) (x2 + x4 + x6) と取ります．このとき

In[310]:=

```
p = Product[
  (x - (x1 + x3 + x5) (x2 + x4 + x6)) /. AssociationThread[Σ10[[1]] → Σ10[[k]]], {k, 1, 10}]
```

Out[310]=

```
(x - (x3 + x4 + x5) (x1 + x2 + x6)) (x - (x2 + x4 + x5) (x1 + x3 + x6))
 (x - (x1 + x4 + x5) (x2 + x3 + x6)) (x - (x2 + x3 + x5) (x1 + x4 + x6))
 (x - (x1 + x3 + x5) (x2 + x4 + x6)) (x - (x1 + x2 + x5) (x3 + x4 + x6))
 (x - (x2 + x3 + x4) (x1 + x5 + x6)) (x - (x1 + x3 + x4) (x2 + x5 + x6))
 (x - (x1 + x2 + x4) (x3 + x5 + x6)) (x - (x1 + x2 + x3) (x4 + x5 + x6))
```

これを展開すると x1 ~ x6 の対称式となるので，SymmetricReduction を使って,
$a_1 \sim a_6$ の式に直して p10a と名付けます. (計算には20秒ほど掛かります)

In[∘]:=

SymmetricReduction[f, {x_1, …, x_n}, {s_1, …, s_n}]
p における初等対称式を s_1, …, s_nで置き換えたペア{p, q}を与える.

In[311]:=

```
makeP10[p_] := SymmetricReduction[
    Expand[Product[(x - p) /. AssociationThread[Σ10⟦1⟧ → Σ10⟦k⟧], {k, 1, 10}]],
    {x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}]⟦1⟧ // Collect[#, x] &;
```

In[312]:=

```
p10a = makeP10[(x1 + x3 + x5) (x2 + x4 + x6)]
```

Out[312]=

$a1^4 a2^3 a3^2 a4 - 3 a1^3 a2^2 a3^3 a4 + 3 a1^2 a2 a3^4 a4 - a1 a3^5 a4 - 2 a1^5 a2^2 a3 a4^2 + 4 a1^4 a2 a3^2 a4^2 +$
$a1^2 a2^2 a3^2 a4^2 - 2 a1^3 a3^3 a4^2 - 2 a1 a2 a3^3 a4^2 + a3^4 a4^2 + a1^6 a2 a4^3 - a1^5 a3 a4^3 -$
$2 a1^3 a2 a3 a4^3 + 2 a1^2 a3^2 a4^3 + a1^4 a4^4 - a1^4 a2^4 a3 a5 + 3 a1^3 a2^3 a3^2 a5 - 3 a1^2 a2^2 a3^3 a5 +$
$a1 a2 a3^4 a5 + a1^5 a2^3 a4 a5 + a1^6 a2 a3 a4 a5 - a1^4 a2^2 a3 a4 a5 - a1^2 a2^3 a3 a4 a5 -$
$a1^5 a3^2 a4 a5 + a1^3 a2 a3^2 a4 a5 + 3 a1 a2^2 a3^2 a4 a5 - a1^2 a3^3 a4 a5 - 2 a2 a3^3 a4 a5 -$
$a1^7 a4^2 a5 - a1^5 a2 a4^2 a5 + a1^3 a2^2 a4^2 a5 - a1^4 a3 a4^2 a5 - 2 a1^2 a2 a3 a4^2 a5 - a1^6 a2^2 a5^2 +$
$a1^4 a2^3 a5^2 + a1^5 a2 a3 a5^2 - 5 a1^3 a2^2 a3 a5^2 - a1 a2^3 a3 a5^2 + 5 a1^2 a2 a3^2 a5^2 + a2^2 a3^2 a5^2 -$
$a1 a3^3 a5^2 + 2 a1^6 a4 a5^2 - a1^4 a2 a4 a5^2 + 2 a1^2 a2^2 a4 a5^2 + 5 a1^3 a3 a4 a5^2 - 2 a1 a2 a3 a4 a5^2 +$
$2 a3^2 a4 a5^2 - 2 a1^2 a4^2 a5^2 - a1^5 a5^3 + a1^3 a2 a5^3 + a1 a2^2 a5^3 - 3 a1^2 a3 a5^3 - 2 a2 a3 a5^3 +$
$a5^4 + a1^4 a2^5 a6 - a1^5 a2^3 a3 a6 - 3 a1^3 a2^4 a3 a6 + 3 a1^4 a2^2 a3^2 a6 + 3 a1^2 a2^3 a3^2 a6 -$
$3 a1^3 a2 a3^3 a6 - a1 a2^2 a3^3 a6 + a1^2 a3^4 a6 + 3 a1^6 a2^2 a4 a6 - 6 a1^4 a2^3 a4 a6 + a1^2 a2^4 a4 a6 +$
$a1^7 a3 a4 a6 - 10 a1^5 a2 a3 a4 a6 + 15 a1^3 a2^2 a3 a4 a6 - 2 a1 a2^3 a3 a4 a6 + 10 a1^4 a3^2 a4 a6 -$
$14 a1^2 a2 a3^2 a4 a6 + 2 a2^2 a3^2 a4 a6 + 8 a1 a3^3 a4 a6 + 10 a1^4 a2 a4^2 a6 - 6 a1^2 a2^2 a4^2 a6 -$
$16 a1^3 a3 a4^2 a6 + 8 a1 a2 a3 a4^2 a6 - 8 a3^2 a4^2 a6 + 8 a1^2 a4^3 a6 - 2 a1^7 a2 a5 a6 + 5 a1^5 a2^2 a5 a6 +$
$2 a1^3 a2^3 a5 a6 + a1 a2^4 a5 a6 + a1^6 a3 a5 a6 - 10 a1^4 a2 a3 a5 a6 - a1^2 a2^2 a3 a5 a6 -$
$2 a2^3 a3 a5 a6 + 2 a1^3 a3^2 a5 a6 - 4 a1 a2 a3^2 a5 a6 - 4 a1^5 a4 a5 a6 - 4 a1^3 a2 a4 a5 a6 -$
$4 a1 a2^2 a4 a5 a6 + 4 a1^2 a3 a4 a5 a6 + 8 a2 a3 a4 a5 a6 + 4 a1^4 a5^2 a6 + 2 a1^2 a2 a5^2 a6 +$
$2 a2^2 a5^2 a6 + 4 a1 a3 a5^2 a6 - 8 a4 a5^2 a6 - a1^8 a6^2 + 6 a1^6 a2 a6^2 - 4 a1^4 a2^2 a6^2 - 2 a1^2 a2^3 a6^2 +$
$a2^4 a6^2 - 8 a1^5 a3 a6^2 + 12 a1^3 a2 a3 a6^2 + 4 a1 a2^2 a3 a6^2 - 8 a1^2 a3^2 a6^2 + 8 a1^4 a4 a6^2 +$
$8 a1^2 a2 a4 a6^2 - 8 a2^2 a4 a6^2 - 16 a1 a3 a4 a6^2 + 16 a4^2 a6^2 - 8 a1^3 a5 a6^2 + 16 a1^2 a6^3 +$
$\big(- a1^3 a2^3 a3^3 + 3 a1^2 a2^2 a3^4 - 3 a1 a2 a3^5 + a3^6 - 2 a1^3 a2^4 a3 a4 - a1^4 a2^2 a3^2 a4 + 2 a1^2 a2^3 a3^2 a4 +$
$2 a1^3 a2 a3^3 a4 + 2 a1 a2^2 a3^3 a4 - a1^2 a3^4 a4 - 2 a2 a3^4 a4 + 2 a1^4 a2^3 a4^2 + 3 a1^5 a2 a3 a4^2 +$
$10 a1^3 a2^2 a3 a4^2 - 2 a1 a2^3 a3 a4^2 - 3 a1^4 a3^2 a4^2 - 22 a1^2 a2 a3^2 a4^2 + 2 a2^2 a3^2 a4^2 +$
$10 a1 a3^3 a4^2 - a1^6 a4^3 - 10 a1^4 a2 a4^3 + 2 a1^2 a2^2 a4^3 + 10 a1^3 a3 a4^3 + 8 a1 a2 a3 a4^3 - 8 a3^2 a4^3 -$
$8 a1^2 a4^4 + a1^3 a2^5 a5 + 6 a1^4 a2^3 a3 a5 + a1^2 a2^4 a3 a5 - a1^5 a2 a3^2 a5 - 15 a1^3 a2^2 a3^2 a5 -$
$6 a1 a2^3 a3^2 a5 + a1^4 a3^3 a5 + 10 a1^2 a2 a3^3 a5 + 4 a2^2 a3^3 a5 - a1 a3^4 a5 - 6 a1^5 a2^2 a4 a5 -$
$8 a1^3 a2^3 a4 a5 + a1 a2^4 a4 a5 - 2 a1^4 a2 a3 a4 a5 + 10 a1^2 a2^2 a3 a4 a5 - 2 a2^3 a3 a4 a5 +$
$7 a1^3 a3^2 a4 a5 - 10 a1 a2 a3^2 a4 a5 + 6 a3^3 a4 a5 + 13 a1^5 a4^2 a5 + 6 a1^3 a2 a4^2 a5 -$
$4 a1 a2^2 a4^2 a5 + 10 a1^2 a3 a4^2 a5 + 8 a2 a3 a4^2 a5 + 4 a1^6 a2 a5^2 + 4 a1^4 a2^2 a5^2 - 2 a1^2 a2^3 a5^2 +$
$a2^4 a5^2 - 4 a1^5 a3 a5^2 + 11 a1^3 a2 a3 a5^2 + 20 a1 a2^2 a3 a5^2 - 14 a1^2 a3^2 a5^2 - 16 a2 a3^2 a5^2 -$
$19 a1^4 a4 a5^2 - 6 a1^2 a2 a4 a5^2 - 6 a2^2 a4 a5^2 - 18 a1 a3 a4 a5^2 + 8 a4^2 a5^2 + 7 a1^3 a5^3 -$
$6 a1 a2 a5^3 + 14 a3 a5^3 - 7 a1^4 a2^4 a6 - 4 a1^2 a2^5 a6 + 2 a1^5 a2^2 a3 a6 + 28 a1^3 a2^3 a3 a6 +$
$9 a1 a2^4 a3 a6 - a1^6 a3^2 a6 - 42 a1^2 a2^2 a3^2 a6 - 6 a2^3 a3^2 a6 - 5 a1^3 a3^3 a6 + 30 a1 a2 a3^3 a6 -$
$12 a3^4 a6 - 10 a1^6 a2 a4 a6 + 4 a1^4 a2^2 a4 a6 + 20 a1^2 a2^3 a4 a6 - 2 a2^4 a4 a6 + 2 a1^5 a3 a4 a6 +$
$10 a1^3 a2 a3 a4 a6 - 30 a1 a2^2 a3 a4 a6 - 26 a1^2 a3^2 a4 a6 + 4 a2 a3^2 a4 a6 - 14 a1^4 a4^2 a6 -$
$36 a1^2 a2 a4^2 a6 + 16 a2^2 a4^2 a6 + 56 a1 a3 a4^2 a6 - 32 a4^3 a6 + 4 a1^7 a5 a6 + 6 a1^5 a2 a5 a6 -$
$44 a1^3 a2^2 a5 a6 - 16 a1 a2^3 a5 a6 + 14 a1^4 a3 a5 a6 + 74 a1^2 a2 a3 a5 a6 + 26 a2^2 a3 a5 a6 -$
$4 a1 a3^2 a5 a6 + 36 a1^3 a4 a5 a6 + 24 a1 a2 a4 a5 a6 - 24 a3 a4 a5 a6 - 30 a1^2 a5^2 a6 -$
$20 a2 a5^2 a6 + 6 a1^6 a6^2 - 48 a1^4 a2 a6^2 + 26 a1^2 a2^2 a6^2 - 4 a2^3 a6^2 + 52 a1^3 a3 a6^2 -$

$$
\begin{aligned}
&\quad 72\,a1\,a2\,a3\,a6^2+48\,a3^2\,a6^2-72\,a1^2\,a4\,a6^2+16\,a2\,a4\,a6^2+32\,a1\,a5\,a6^2-64\,a6^3\big)\,x+\\
&\big(3\,a1^2\,a2^4\,a3^2+3\,a1^3\,a2^2\,a3^3-6\,a1\,a2^3\,a3^3-6\,a1^2\,a2\,a3^4+3\,a2^2\,a3^4+3\,a1\,a3^5+a1^2\,a2^5\,a4+\\
&\quad 4\,a1^3\,a2^3\,a3\,a4+3\,a1\,a2^4\,a3\,a4-a1^4\,a2\,a3^2\,a4-10\,a1^2\,a2^2\,a3^2\,a4-4\,a2^3\,a3^2\,a4+\\
&\quad a1^3\,a3^3\,a4+12\,a1\,a2\,a3^3\,a4-6\,a3^4\,a4-5\,a1^4\,a2^2\,a4^2-12\,a1^2\,a2^3\,a4^2+a2^4\,a4^2-\\
&\quad a1^5\,a3\,a4^2-12\,a1^3\,a2\,a3\,a4^2-2\,a1\,a2^2\,a3\,a4^2+13\,a1^2\,a3^2\,a4^2+12\,a2\,a3^2\,a4^2+10\,a1^4\,a4^3+\\
&\quad 28\,a1^2\,a2\,a4^3-8\,a2^2\,a4^3-24\,a1\,a3\,a4^3+16\,a4^4-7\,a1^3\,a2^4\,a5-3\,a1\,a2^5\,a5-11\,a1^4\,a2^2\,a3\,a5-\\
&\quad 8\,a1^2\,a2^3\,a3\,a5+4\,a2^4\,a3\,a5+a1^5\,a3^2\,a5+29\,a1^3\,a2\,a3^2\,a5+42\,a1\,a2^2\,a3^2\,a5-15\,a1^2\,a3^3\,a5-\\
&\quad 24\,a2\,a3^3\,a5+9\,a1^5\,a2\,a4\,a5+48\,a1^3\,a2^2\,a4\,a5+12\,a1\,a2^3\,a4\,a5-9\,a1^4\,a3\,a4\,a5-\\
&\quad 33\,a1^2\,a2\,a3\,a4\,a5-6\,a2^2\,a3\,a4\,a5-9\,a1\,a3^2\,a4\,a5-55\,a1^3\,a4^2\,a5-8\,a1\,a2\,a4^2\,a5-\\
&\quad 24\,a3\,a4^2\,a5-4\,a1^6\,a5^2-29\,a1^4\,a2\,a5^2-11\,a1^2\,a2^2\,a5^2-10\,a2^3\,a5^2+18\,a1^3\,a3\,a5^2-\\
&\quad 57\,a1\,a2\,a3\,a5^2+51\,a3^2\,a5^2+68\,a1^2\,a4\,a5^2+36\,a2\,a4\,a5^2-11\,a1\,a5^3+22\,a1^4\,a2^3\,a6+\\
&\quad 26\,a1^2\,a2^4\,a6+2\,a2^5\,a6+3\,a1^5\,a2\,a3\,a6-82\,a1^3\,a2^2\,a3\,a6-68\,a1\,a2^3\,a3\,a6+5\,a1^4\,a3^2\,a6+\\
&\quad 75\,a1^2\,a2\,a3^2\,a6+54\,a2^2\,a3^2\,a6+3\,a1\,a3^3\,a6+7\,a1^6\,a4\,a6+50\,a1^4\,a2\,a4\,a6-58\,a1^2\,a2^2\,a4\,a6-\\
&\quad 8\,a2^3\,a4\,a6-9\,a1^3\,a3\,a4\,a6+66\,a1\,a2\,a3\,a4\,a6-6\,a3^2\,a4\,a6+74\,a1^2\,a4^2\,a6-35\,a1^5\,a5\,a6+\\
&\quad 50\,a1^3\,a2\,a5\,a6+114\,a1\,a2^2\,a5\,a6-153\,a1^2\,a3\,a5\,a6-174\,a2\,a3\,a5\,a6-84\,a1\,a4\,a5\,a6+\\
&\quad 66\,a5^2\,a6+4\,a1^4\,a6^2+114\,a1^2\,a2\,a6^2+6\,a2^2\,a6^2-60\,a1\,a3\,a6^2+120\,a4\,a6^2\big)\,x^2+\\
&\big(-3\,a1\,a2^5\,a3-12\,a1^2\,a2^3\,a3^2+3\,a2^4\,a3^2-3\,a1^3\,a2\,a3^3+18\,a1\,a2^2\,a3^3+3\,a1^2\,a3^4-6\,a2\,a3^4-\\
&\quad 3\,a1^2\,a2^4\,a4-2\,a2^5\,a4+4\,a1\,a2^3\,a3\,a4+a1^4\,a3^2\,a4+14\,a1^2\,a2\,a3^2\,a4-4\,a2^2\,a3^2\,a4-\\
&\quad 14\,a1\,a3^3\,a4+4\,a1^4\,a2\,a4^2+28\,a1^2\,a2^2\,a4^2+12\,a2^3\,a4^2+2\,a1^3\,a3\,a4^2-6\,a1\,a2\,a3\,a4^2+\\
&\quad 2\,a3^2\,a4^2-30\,a1^2\,a4^3-16\,a2\,a4^3+18\,a1^3\,a2^3\,a5+23\,a1\,a2^4\,a5+8\,a1^4\,a2\,a3\,a5+\\
&\quad 10\,a1^2\,a2^2\,a3\,a5-32\,a2^3\,a3\,a5-17\,a1^3\,a3^2\,a5-82\,a1\,a2\,a3^2\,a5+36\,a3^3\,a5-4\,a1^5\,a4\,a5-\\
&\quad 72\,a1^3\,a2\,a4\,a5-90\,a1\,a2^2\,a4\,a5+72\,a1^2\,a3\,a4\,a5+82\,a2\,a3\,a4\,a5+76\,a1\,a4^2\,a5+\\
&\quad 36\,a1^4\,a5^2+76\,a1^2\,a2\,a5^2+44\,a2^2\,a5^2-10\,a1\,a3\,a5^2-94\,a4\,a5^2-38\,a1^4\,a2^2\,a6-\\
&\quad 80\,a1^2\,a2^3\,a6-10\,a2^4\,a6-4\,a1^5\,a3\,a6+60\,a1^3\,a2\,a3\,a6+230\,a1\,a2^2\,a3\,a6-52\,a1^2\,a3^2\,a6-\\
&\quad 186\,a2\,a3^2\,a6-48\,a1^4\,a4\,a6-76\,a1^2\,a2\,a4\,a6+36\,a2^2\,a4\,a6-34\,a1\,a3\,a4\,a6-\\
&\quad 80\,a4^2\,a6+88\,a1^3\,a5\,a6-184\,a1\,a2\,a5\,a6+342\,a3\,a5\,a6-74\,a1^2\,a6^2-132\,a2\,a6^2\big)\,x^3+\\
&\big(a2^6+15\,a1\,a2^4\,a3+18\,a1^2\,a2^2\,a3^2-12\,a2^3\,a3^2+a1^3\,a3^3-18\,a1\,a2\,a3^3+3\,a3^4+\\
&\quad 2\,a1^2\,a2^3\,a4+2\,a2^4\,a4-4\,a1^3\,a2\,a3\,a4-30\,a1\,a2^2\,a3\,a4-6\,a1^2\,a3^2\,a4+20\,a2\,a3^2\,a4-\\
&\quad a1^4\,a4^2-20\,a1^2\,a2\,a4^2-26\,a2^2\,a4^2+10\,a1\,a3\,a4^2+24\,a4^3-22\,a1^3\,a2^2\,a5-62\,a1\,a2^3\,a5-\\
&\quad 2\,a1^4\,a3\,a5+88\,a2^2\,a3\,a5+46\,a1\,a3^2\,a5+32\,a1^3\,a4\,a5+140\,a1\,a2\,a4\,a5-138\,a3\,a4\,a5-\\
&\quad 111\,a1^2\,a5^2-94\,a2\,a5^2+33\,a1^4\,a2\,a6+156\,a1^2\,a2^2\,a6+20\,a2^3\,a6-3\,a1^3\,a3\,a6-\\
&\quad 228\,a1\,a2\,a3\,a6+138\,a3^2\,a6+113\,a1^2\,a4\,a6+88\,a2\,a4\,a6-43\,a1\,a5\,a6+129\,a6^2\big)\,x^4+\\
&\big(-6\,a2^5-30\,a1\,a2^3\,a3-12\,a1^2\,a2\,a3^2+18\,a2^2\,a3^2+6\,a1\,a3^3+2\,a1^2\,a2^2\,a4+\\
&\quad 12\,a2^3\,a4+2\,a1^3\,a3\,a4+36\,a1\,a2\,a3\,a4-12\,a3^2\,a4+4\,a1^2\,a4^2+12\,a2\,a4^2+\\
&\quad 13\,a1^3\,a2\,a5+78\,a1\,a2^2\,a5-3\,a1^2\,a3\,a5-96\,a2\,a3\,a5-63\,a1\,a4\,a5+\\
&\quad 123\,a5^2-11\,a1^4\,a6-156\,a1^2\,a2\,a6-84\,a2^2\,a6+57\,a1\,a3\,a6-114\,a4\,a6\big)\,x^5+\\
&\big(15\,a2^4+30\,a1\,a2^2\,a3+3\,a1^2\,a3^2-12\,a2\,a3^2-3\,a1^2\,a2\,a4-28\,a2^2\,a4-13\,a1\,a3\,a4+\\
&\quad a4^2-3\,a1^3\,a5-47\,a1\,a2\,a5+36\,a3\,a5+58\,a1^2\,a6+138\,a2\,a6\big)\,x^6+\\
&\big(-20\,a2^3-15\,a1\,a2\,a3+3\,a3^2+a1^2\,a4+22\,a2\,a4+11\,a1\,a5-66\,a6\big)\,x^7+\\
&\big(15\,a2^2+3\,a1\,a3-6\,a4\big)\,x^8-\\
&6\,a2\,x^9+x^{10}
\end{aligned}
$$

今，計算したのは

θ_a = (x1 + x3+ x5) (x2+ x4+ x6)

でした．(ちなみに HageDorn 氏の論文には 付録としてこの式が載っていますが，一部これと違っています．何故なのか解りません．) p10aに具体的な数字を代入するのは後回しにして，G_{72}不変な式を更に考えます．

θ_b = (x1 x3 + x3 x5 + x5 x1) + (x2 x4 + x4 x6 + x6 x2)

θ_c = (x1 + x3 + x5) (x1 x3 + x3 x5 + x5 x1) + (x2 + x4 + x6) (x2 x4 + x4 x6 + x6 x2)
θ_d = x1 x3 x5 + x2 x4 x6
θ_e = (x1 + x3 + x5) (x1 x3 x5) + (x2 + x4 + x6) (x2 x4 x6)
θ_f = (x1 x3 +x3 x5+x5 x1) (x2 x4 +x4 x6+ x6 x2)

これらについても「θをΣ10の要素で置換した式の積」と「基本対称式への変形」を行い， 順に多項式 p10b, p10c, p10d, p10e,p10f を作りますが， これらの計算は p10a より更に時間がかかるので， コマンドはコメントアウトし結果も closed cell に入れてあります． Mathematicaでは， 右側の小さい「コ」マークをクリックして「評価」して下さい． また結果の式を見るには「セル」→「セルのプロパティ」→「開く」を選択してください． Mathematicaをお持ちでない方は 「formulas . txt」をご覧ください． 結果は信じられないほど長く検索が必要な位です． (1万行を超えます.)

In[313]:=
```
(*p10b= makeP10[(x1 x3+x3 x5+x5 x1)+(x2 x4+x4 x6+x6 x2)]*)
(*結果は直下の closed cell に入っています*)
```

In[315]:=
```
(*p10c = makeP10[(x1+x3+x5)(x1 x3+x3 x5+x5 x1)+(x2+x4+x6)(x2 x4+x4 x6+x6 x2)]*)
```

In[317]:=
```
(*p10d=makeP10[x1 x3 x5+x2 x4 x6]*)
```

In[319]:=
```
(*p10e=makeP10[x1 x3 x5(x1+x3+x5)+x2 x4 x6(x2+x4+x6)]*)
```

In[321]:=
```
(*p10f=makeP10[(x1 x3+x3 x5+x5 x1)(x2 x4+x4 x6+x6 x2)]*)
```

今までは一般の話でしたが， ここから具体的に「例：$f(x) = x^6 + 3x^3 + 9x^2 + 9x + 9$」に対して， p10a, p10b, p10c, p10d, p10e, p10f を作り， 名前を f10a, f10b, f10c, f10d, f10e , f10f と変え， その有理数解を求めます.

In[323]:=
```
f = x^6 + 3 x^3 + 9 x^2 + 9 x + 9;

as = CoefficientList[f, x][[1 ;; 6]] {1, -1, 1, -1, 1, -1} // Reverse;
f10a = p10a /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6} → as]
f10b = p10b /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6} → as]
f10c = p10c /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6} → as]
f10d = p10d /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6} → as]
f10e = p10e /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6} → as]
f10f = p10f /. AssociationThread[{a1, a2, a3, a4, a5, a6} → as]
```

Out[325]=
$$26244 - 238383\,x + 216513\,x^2 - 33534\,x^3 + 5832\,x^4 - 243\,x^5 + 1053\,x^6 - 567\,x^7 - 54\,x^8 + x^{10}$$

Out[326]=
$$26244 + 238383\,x + 216513\,x^2 + 33534\,x^3 + 5832\,x^4 + 243\,x^5 + 1053\,x^6 + 567\,x^7 - 54\,x^8 + x^{10}$$

Out[327]=
$$-2125764 + 767637\,x + 177147\,x^2 - 203391\,x^3 + 45927\,x^4 + 8019\,x^5 - 2673\,x^6 - 567\,x^7 + 243\,x^8 - 27\,x^9 + x^{10}$$

Out[328]=
$$-118098 + 610173\,x - 19683\,x^2 - 65610\,x^3 - 26244\,x^4 + 5832\,x^5 + 2430\,x^6 - 243\,x^7 - 81\,x^8 + 3\,x^9 + x^{10}$$

Out[329]=
$$175375530\,x - 65367243\,x^2 - 75464622\,x^3 - 21119859\,x^4 - 2729376\,x^5 - 158922\,x^6 + 567\,x^8 + 36\,x^9 + x^{10}$$

Out[330]=
$$229582512 - 255091680\,x + 140300424\,x^2 - 50664042\,x^3 + 12774267\,x^4 - 2414448\,x^5 + 300348\,x^6 - 23328\,x^7 + 1296\,x^8 - 54\,x^9 + x^{10}$$

f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10fを，有理数の範囲で因数分解します．

In[331]:=
```
Factor[f10a]
Factor[f10b]
Factor[f10c]
Factor[f10d]
Factor[f10e]
Factor[f10f]
```

Out[331]=
$$(-3 + x)\left(-8748 + 76545\,x - 46656\,x^2 - 4374\,x^3 - 3402\,x^4 - 1053\,x^5 - 702\,x^6 - 45\,x^7 + 3\,x^8 + x^9\right)$$

Out[332]=
$$(3 + x)\left(8748 + 76545\,x + 46656\,x^2 - 4374\,x^3 + 3402\,x^4 - 1053\,x^5 + 702\,x^6 - 45\,x^7 - 3\,x^8 + x^9\right)$$

Out[333]=
$$(-9 + x)\left(236196 - 59049\,x - 26244\,x^2 + 19683\,x^3 - 2916\,x^4 - 1215\,x^5 + 162\,x^6 + 81\,x^7 - 18\,x^8 + x^9\right)$$

Out[334]=
$$(-6 + x)\left(19683 - 98415\,x - 13122\,x^2 + 8748\,x^3 + 5832\,x^4 - 405\,x^6 - 27\,x^7 + 9\,x^8 + x^9\right)$$

Out[335]=
$$x\left(175375530 - 65367243\,x - 75464622\,x^2 - 21119859\,x^3 - 2729376\,x^4 - 158922\,x^5 + 567\,x^7 + 36\,x^8 + x^9\right)$$

Out[336]=
$$(-9 + x)\left(-25509168 + 25509168\,x - 12754584\,x^2 + 4212162\,x^3 - 951345\,x^4 + 162567\,x^5 - 15309\,x^6 + 891\,x^7 - 45\,x^8 + x^9\right)$$

f10a $= 0$ の有理数解は「$x = 3$」なので，「$(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6) = 3$」となります．

同様にf10b, f10c, f10d, f10e,f10f の有理数解は，順に -3, 9, 6,0,9 となるので，対応するθの値が求まります．

§3 . 解を求める

§2の結果より

$\theta_a = (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6) = 3$

$\theta_b = (x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1) + (x_2 x_4 + x_4 x_6 + x_6 x_2) = -3$

$\theta_c = (x_1 + x_3 + x_5)(x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1) + (x_2 + x_4 + x_6)(x_2 x_4 + x_4 x_6 + x_6 x_2) = 9$

$\theta_d = (x_1 x_3 x_5) + (x_2 x_4 x_6) = 6$

$\theta_e = (x_1 + x_3 + x_5)(x_1 x_3 x_5) + (x_2 + x_4 + x_6)(x_2 x_4 x_6) = 0$

$\theta_f = (x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1)(x_2 x_4 + x_4 x_6 + x_6 x_2) = 9$

また解と係数の関係より

$s_1 = (x_1 + x_3 + x_5) + (x_2 + x_4 + x_6) = a_1 = 0$

$s_6 = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_4 x_6) = a_6 = 9$

$s_5 = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_4 + x_4 x_6 + x_6 x_2) + (x_2 x_4 x_6)(x_1 x_3 + x_3 x_5 + x_5 x_1) = a_5 = -9$

「2 次方程式 → 3 次方程式」の順に解いていきます.

§3-1. 2 次方程式を解く [$(x_1+x_3+x_5)$ と $(x_2+x_4+x_6)$を求める]

α=x1+x3+x5とβ=x2+x4+x6 とおくと, (s_1)と(θ_a)から α,β は「$t^2+3=0$」の2解となる. 故に

$\alpha = x1 + x3 + x5 = \sqrt{-3}$, $\beta = x2 + x4 + x6 = -\sqrt{-3}$ としてよい.

§3–2. 3 次方程式を解く $\left[\{x_1, x_3, x_5\}\right.$ と $\left.\{x_2, x_4, x_6\}\right.$ を各々求める$\left.\right]$

次に $u_1 = x1\,x3 + x3\,x5 + x5\,x1$, $u_2 = x2\,x4 + x4\,x6 + x6\,x2$とおくと ($\theta_b$), ($\theta_c$) より
u_1, u_2 は連立一次方程式「$u_1 + u_2 = -3$, $\alpha\,u_1 + \beta\,u_2 = 9$」の解となる.

これから $(u_1, u_2) = \left(-\frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{-3}\right), -\frac{3}{2}\left(1 - \sqrt{-3}\right)\right)$

また v_1=x1 x3 x5, v_2=x2 x4 x6 とおくと, (θ_d), (θ_e)より, v_1, v_2 は連立一次方程式「$v_1 + v_2 = 6$, $\alpha\,v_1 + \beta\,v_2 = 0$」の解となる. これから $(v_1, v_2) = (3, 3)$

以上より, x1, x3, x5 を解に持つ3次方程式eq1と, x2, x4, x6 を解に持つ3次方程式 eq2 は次の様になる.

$$\begin{cases} \text{eq1}: & x^3 - \alpha\,x^2 + u_1\,x - v_1 = 0 \\ \text{eq2}: & x^3 - \beta\,x^2 + u_2\,x - v_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{eq1}: & x^3 - \sqrt{-3}\,x^2 - \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{-3}\right)x - 3 = 0 \\ \text{eq2}: & x^3 + \sqrt{-3}\,x^2 - \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt{-3}\right)x - 3 = 0 \end{cases}$$

Solveを用いて, これらを解くと f = 0 の解が全て求まる. (残念ながら Mathematica のSolve では「分母の有理化」が行われていません.)

In[337]:=

```
{x1, x3, x5} =
  x /. Solve[x^3 - Sqrt[-3] x^2 - 3 / 2 (1 + Sqrt[-3]) x - 3 == 0, x, Cubics → True];
{x2, x4, x6} =
  x /. Solve[x^3 + Sqrt[-3] x^2 - 3 / 2 (1 - Sqrt[-3]) x - 3 == 0, x, Cubics → True];
```

x_1, x2 を表示します.

In[339]:=

```
TraditionalForm[x1]
TraditionalForm[x2]
```

Out[339]//TraditionalForm=

$$\frac{i}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{81}{2}+\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\left(\frac{81}{2}+\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{27}{2}\,i\left(3\,\sqrt{3}-i\right)^3}\right)}+\frac{i\left(3\,\sqrt{3}-i\right)}{2^{2/3}\,\sqrt[3]{\frac{81}{2}+\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\left(\frac{81}{2}+\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{27}{2}\,i\left(3\,\sqrt{3}-i\right)^3}}}$$

Out[340]//TraditionalForm=

$$-\frac{i}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{81}{2}-\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\left(\frac{81}{2}-\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{27}{2}\,i\left(3\,\sqrt{3}+i\right)^3}\right)}-\frac{i\left(3\,\sqrt{3}+i\right)}{2^{2/3}\,\sqrt[3]{\frac{81}{2}-\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\left(\frac{81}{2}-\frac{15\,i\,\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{27}{2}\,i\left(3\,\sqrt{3}+i\right)^3}}}$$

この厳密解と数値解を比べてみると, 下の様に一致します.

In[341]:=

```
N[{x1, x2, x3, x4, x5, x6}] // Sort
```

Out[341]=

```
{-1.1786 - 0.71502 i, -1.1786 + 0.71502 i, -0.273154 - 1.04191 i,
 -0.273154 + 1.04191 i, 1.45176 - 1.40516 i, 1.45176 + 1.40516 i}
```

In[342]:=

```
x /. NSolve[f == 0, x] // Sort
```

Out[342]=

```
{-1.1786 - 0.71502 i, -1.1786 + 0.71502 i, -0.273154 - 1.04191 i,
 -0.273154 + 1.04191 i, 1.45176 - 1.40516 i, 1.45176 + 1.40516 i}
```

§4 . 解を求める（続き)

§3の例では $\alpha \neq \beta$ なので,
「$\Theta_b : u_1 + u_2 = -3$, $\Theta_c : \alpha u_1 + \beta u_2 = 9$」 が一次独立になって解を持ちましたが,
$\alpha = \beta$ のときは Θ_b, Θ_c の値から u_1, u_2 を求めることはできません. しかし,
f は既約なので重解を持ちません. よって $u_1 \neq u_2$ または $v_1 \neq v_2$ の少なくとも一方は成り立ちます.

まず「$\Theta_b = u_1 + u_2$」と「$\Theta_f = u_1 u_2$」の値から $\{u_1, u_2\}$ の「組」が,
$\Theta_d = v_1 + v_2$ と $s_6 = v_1 v_2$ の値から $\{v_1, v_2\}$ の「組」が求まります.
更に「$s_3 = v_1 u_2 + v_2 u_1$」の値と組み合わせることによって,
(u_1, u_2), (v_1, v_2) の値が求まります.

(私の調べた限りでは) G_{48} や G_{12} のグループと異なり,
G_{72} のグループでは f10a ~ f10f の有理数解がただ1つに決まるので,
これだけで $f = 0$ の解が求まります.