

6次方程式のガロア群とガロア分解体 with Mathematica 14

2025 年6月 by mixedmoss

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"]
```

§1. 可解で既約な6次方程式のガロア群

既約で可解な6次方程式のガロア群 G_{a1} は12個あり、
大きく分けて、次の3グループに分かれます。(添え数字は位数を表します.)

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{72} \text{ グループ: } G_{72}, G_{36}, \Gamma_{36}, G_{18} \text{ (} G_{72} \text{ の部分群だが } G_{48} \text{ の部分群でない)} \\ G_{48} \text{ グループ: } G_{48}, G_{24}, \Gamma_{24}, H_{24}, \Gamma_{12} \text{ (} G_{48} \text{ の部分群 だが } G_{72} \text{ の部分群でない)} \\ G_{12} \text{ グループ: } G_{12}, C_6, H_6 \text{ (} G_{72} \text{ と } G_{48} \text{ の共通の部分群で、全て } G_{12} \text{ の部分群となる)} \end{array} \right.$$

但し決まった名前は無いようで、上の名前は「文献1」によるものです。 G_{72}, G_{48} などの“G”には特別な意味は無いようです。

G_{72} は $X=\{1,3,5\}, Y=\{2,4,6\}, S=\{X,Y\}$ とおくと、 S を動かさない S_6 の部分群で、
 $G_{72} = \langle (1,3), (1,5), (1,2)(3,4)(5,6) \rangle$,
SageMathによると、 $G_{72} = \langle \sigma, \tau \rangle$, $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\tau = (1, 3)$ です。

次に G_{48} は $X=\{1,2\}, Y=\{3,4\}, Z=\{5,6\}, T=\{X,Y,Z\}$ とおくと、 T を動かさない S_6 の部分群で、
 $G_{48} = \langle (1,2), (1,3)(2,4), (1,3,5)(2,4,6) \rangle$,
Sageによると
 $G_{48} = \langle \sigma, \tau, \mu \rangle$, $\sigma = (1, 3, 5, 2, 4, 6)$, $\tau = (1, 2)$, $\mu = (1, 3, 2, 4)$ です。

最後に $G_{12} = G_{72} \cap G_{48}$ で $G_{12} \simeq D_4$ です。

$\Gamma_{36}, \Gamma_{24}, \Gamma_{12}$ は交代群を表し、それぞれ G_{72}, G_{48}, G_{24} と A_6 の共通部分で、特に $\Gamma_{12} \simeq A_4$ です。
また H は対称群と同型な群を表し $H_{24} \simeq S_4$, $H_6 \simeq S_3$ です。更に $\Gamma_{24} \simeq H_{24} \simeq S_4$ です。詳しくは「文献1」をご覧ください。

これらをSageMathで見つけるには、例えば次の様にすれば OKです。要するに S_6 の推移的な共役部分群を求めます。

このような共役部分群は16個ありますが、そのうち可解群となるのが上の12個です。

```
G = SymmetricGroup(6)
tr = []
repgroup = G.conjugacy_classes_subgroups()
for i in range(0, len(repgroup)): if repgroup[i].is_transitive(): tr.append(repgroup[i])
```

SageMath で既約で可解なガロア群を見つけるには、例えば上に続けて次の様にプログラムします。 ($H_{24} \approx \Gamma_{24}$ なので 位数が24 の場合は別に扱っています.)

```
G72 = tr[12]; G48 = tr[10]; G18 = tr[4]; G36 = tr[8]; Gamma36 = tr[9]; Gamma12 = tr[2]; G12 = tr[3]; C6
= tr[1]; H6 = tr[0]; G24 = tr[5]; Gamma24 = tr[6]; H24 = tr[7];
group=[C6,H6,Gamma12,G12,G18,G36,Gamma36,G48,G72]
names={C6:"C6",H6:"H6",Gamma12:"Gamma12",G12:"G12",G18:"G18",G36:"G36",Gamma36:"Ga
mma36",G48:"G48",G72:"G72"}
```

```
_.<x>= PolynomialRing (QQ)
for p in range(-10,11):
  for q in range(-10,11):
    for r in range(-10,11):
      for s in range(-10,11):
        for t in range(-10,11):
          f=x^6+ p*x^4+q*x^3+r*x^2+s*x+t
          if f.is_irreducible():
            g=f.galois_group()
            if g.order() != 24:
              for h in group:
                if g.is_isomorphic(h):
                  print([[p,q,r,s,t],names[h]])
            elif g.is_subgroup(AlternatingGroup(6)):
              print([[p,q,r,s,t],"Gamma24"])
            elif g.is_isomorphic(SymmetricGroup(4)):
              print([[p,q,r,s,t],"H24"])
          else:
            print([[p,q,r,s,t],"G24"])
```

「solvableSextic.txt」に上のプログラムで見つけた可解で既約な6次方程式のリストを載せてあります。

§1 – 1. G_{72} グループ

ガロア群が G_{72} グループとなる方程式の例としては (#1)

「 $f(x) = (g(x))^2 + a(g(x)) + b$ (a, b は有理数, g は3次式)」があります。例えば

「 $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^2 + 4(x^3 + x^2 + x + 1) + 1 = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 6$ 」

のガロア群は G_{72} です。実際, $t^2 + 4t + 1 = 0$ の2解を t_1, t_2 ,

$x^3 + x^2 + x + 1 = t_1$ の解を $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $x^3 + x^2 + x + 1 = t_2$ の解を $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ とすると

「 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(t_1) \subset \mathbb{Q}(t_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \subset \mathbb{Q}(t_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 」となりますが,

各々の拡大次数は最大で 2, 6, 6 となるので ガロア群の位数は最大で $2 \times 6 \times 6 = 72$ となります。

そして「 $\mathbb{Q}(t_1) \subset \mathbb{Q}(t_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 」や

「 $\mathbb{Q}(t_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \subset \mathbb{Q}(t_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 」

の拡大次数は 3 となることはあっても 2 となることはないので,

(#1) の形のガロア群の位数は $2 \times 3 \times 6 = 36$ や $2 \times 3 \times 3 = 18$ には成りえますが,

24 には成りません。もちろん (#1) に入らない $\text{gal} = G_{72}$ の方程式も沢山あります。

§1 – 2. G_{48} グループ

ガロア群が G_{48} グループとなる方程式の例としては (≡2)

$$[f(x) = (g(x))^3 + a(g(x))^2 + b g(x) + c \quad (a, b, c \text{ は有理数, } g \text{ は 2 次式})]$$

があります。例えば

$$[f(x) = (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1) + 2 = x^6 + 4x^4 + 6x^2 + 5] \text{ のガロア群は } G_{48} \text{ です.}$$

実際, $t^3 + t^2 + t + 2 = 0$ の解を α, β, γ , $x^2 + 1 = \alpha$ の解を x_1 ,

x_2 , $x^2 + 1 = \beta$ の解を x_3, x_4 , $x^2 + 1 = \gamma$ の解を x_5 ,

x_6 とすると $[Q \subset Q(\alpha, \beta, \gamma) \subset Q(\alpha, \beta, \gamma, x_1) \subset Q(\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_3) \subset$

$Q(\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_3, x_5)]$ となります。その拡大次数は、最大で 6,

2, 2, 2 となるので ガロア群の位数は最大で $6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ となります。

また $[Q \subset Q(\alpha, \beta, \gamma)]$ の拡大次数は 3 には成りえますが、2 には成らないので、

(≡2) の形のガロア群の位数は $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ には成りえますが、16 には成りません。

また x_1, x_3, x_5 の中に独立でない組があれば 位数は 12 やもっと小さくなることもあります。

(≡1) に入らない $\text{gal} = G_{48}$ の方程式も有りますが かなり少ないです。

§1 – 3. G_{12} グループ

例えば $f_1(x) = x^6 - 3$ や $f_2(x) = x^6 + 3$ は (≡1) と (≡2) とも見えます。

そしてそのガロア群はそれぞれ G_{12} と H_6 です。もちろんどちらにも入らないものも有ります。

例えば $f_3(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は (≡1) にも (≡2) にも書き直せませんが、
 $\text{gal} = C_6$ です。

§2. Galois Resolvent

これに関しては 先に「G72_solutions.nb」か「G48_solutions.nb」を読まれた方が分かりやすいと思います。また「solveSexticProgram.nb」も併せて読まれると更に分かりやすいと思います。

```
In[ ]:= Import["https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/sextic/Table1.png"]
Out[ ]=
```

TABLE I
The Degrees of the Irreducible Factors of the Galois Resolvents
 $F_2(x)$, $F_{10}(x)$, and $F_{15}(x)$ in $\mathbf{Q}(x_1, \dots, x_6)^G$

Group G	$F_2(x)$	$F_{10}(x)$	$F_{15}(x)$
S_6	2	10	15
A_6	1, 1	10	15
H_{120}	2	10	10, 5
Γ_{60}	1, 1	10	10, 5
G_{72}	2	9, 1	9, 6
Γ_{36}	1, 1	9, 1	9, 6
G_{36}	2	9, 1	9, 3, 3
G_{18}	2	9, 1	9, 3, 3
G_{48}	2	6, 4	8, 6, 1
Γ_{24}	1, 1	6, 4	8, 6, 1
G_{24}	2	6, 4	8, 6, 1
H_{24}	2	6, 4	6, 4, 4, 1
Γ_{12}	1, 1	6, 4	6, 4, 4, 1
G_{12}	2	6, 3, 1	6, 3, 3, 2, 1
C_6	2	6, 3, 1	6, 3, 3, 2, 1
H_6	2	3, 3, 3, 1	3, 3, 3, 3, 1, 1, 1

上の表は「文献1」からです。 $F_2(x)$, $F_{10}(x)$, $F_{15}(x)$ というのが Galois Resolvent です。 この表の説明をできる限りしたいと思います。 もしかしたら間違っているかもしれません。 (^.^;

§2-1. $F_2(x)$ について

$F_2(x)$ は正確には $F_{A_6}(x)$ で 定義は「 $F_2(x) = \prod_{A_6}(x-\theta)$, $\theta = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_5-x_6)$ 」です。 S_6 の A_5 による剰余類の代表元($e=\{\}$ と $\sigma=(1,2)$)により θ を置換して $(x-\theta)$ の積を作ります。

即ち $F_2(x)=(x-\theta)(x-\sigma(\theta))=(x-\sqrt{D})(x+\sqrt{D})=x^2-D$ (D は f の判別式)です。 例えば $\text{gal}(f)=\Gamma_{60}$ の時は $\text{gal}(f)$ は偶置換のみからなるので $\sigma(\theta)=\theta$ となり、 θ は $g(f)$ によって変わりません。

即ち θ は $g(f)$ の固定体である有理数となります。 一方、 $\text{gal}(f)=H_{24} \simeq S_4$ の場合は $\text{gal}(f)$ は奇置換を含むので θ は $\text{gal}(f)$ の固定体に入りません。

故に $F_2(x)$ は既約2次式となりえます。 ただし、 $\text{gal}(f)=H_{24}$ の場合でも $F_2(x)$ が一次式の積となることも有ります。

例えば「 $f=1-10x+8x^2-7x^4+x^6$ 」のガロア群は $g(f)=H_{24}$ ですが、 $D=26600^2$ で

$F_2(x)=(x-26600)(x+26600)$ です。

§2-2. $F_{10}(x)$ について

次に $F_{10}(x)$ は正確には $F_{G_{72}}(x)$ で 定義は「 $F_{10}(x) = \prod_{G_{72}}(x-\theta)$, $\theta = (x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4+x_6)$ 」です. S_6 の G_{72} による剰余類の代表元の集合を Σ_{10} , Σ_{10} の要素によって θ を置換して $(x-\theta)$ の積を作った式が $F_{10}(x)$ となります. 具体的には以下の様になります. (Σ_{10} は $\{x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6\}$ の置換先によって表現しています.)

```
In[1]:=  $\Sigma_{10} = \{\{x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6\}, \{x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, x_6\},$   

 $\{x_1, x_3, x_4, x_2, x_5, x_6\}, \{x_1, x_3, x_6, x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_5, x_2, x_3, x_4, x_6\},$   

 $\{x_1, x_5, x_4, x_2, x_3, x_6\}, \{x_1, x_5, x_6, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_6\},$   

 $\{x_1, x_2, x_6, x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_4, x_6, x_2, x_3, x_5\}\};$ 
```

$$F_{10}(x) = (x - (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6)) (x - (x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)) \\
(x - (x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_5 + x_6)) (x - (x_1 + x_3 + x_6)(x_2 + x_4 + x_5)) \\
(x - (x_1 + x_2 + x_5)(x_3 + x_4 + x_6)) (x - (x_1 + x_4 + x_5)(x_2 + x_3 + x_6)) \\
(x - (x_1 + x_5 + x_6)(x_2 + x_3 + x_4)) (x - (x_1 + x_2 + x_4)(x_3 + x_5 + x_6)) \\
(x - (x_1 + x_2 + x_6)(x_3 + x_4 + x_5)) (x - (x_1 + x_4 + x_6)(x_2 + x_3 + x_5))$$

$F_{10}(x)$ は $x_1 \sim x_6$ の対称式となるので有理数係数の式です. また $\text{gal}(f) = G_{72}$ のとき, θ は G_{72} の固定体に入るので有理数です. 従って1次の因数 $(x - \theta)$ を持ちます. このことは G_{72} の部分群である Γ_{36} , G_{36} , G_{18} , G_{12} , C_6 , H_6 でも正しいです. しかし G_{12} , C_6 , H_6 などはこの他にも3次や6次の因数を持ちます.

例えば $\text{gal} = C_6 = \langle \mu \rangle$,

$\mu = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ のとき $F_{10}(x)$ の因数を調べるために Σ_{10} の元を順に $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_9$, S_6 の G_{72} による剰余類を $S_6 = \sigma_0 G_{72} + \sigma_1 G_{72} + \dots + \sigma_9 G_{72} = S_0 + S_1 + \dots + S_9$ とし, $\{S_i, i = 0, 1, \dots, 9\}$ の C_6 による軌道 (orbit) を調べます.

ここで「 G_{72} は $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{2, 4, 6\}$,

$S = \{X, Y\}$ とおくと, S を動かさない S_6 の部分群」なので

$$S_0 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}, S_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, \\
S_2 = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6\}\}, S_3 = \{\{1, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}\}, \\
S_4 = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 6\}\}, S_5 = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}, S_6 = \{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}\}, \\
S_7 = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}\}, S_8 = \{\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 5\}\}, S_9 = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\},$$

と見て構いません. まず明らかに $C_6(S_0) = S_0$ です.

次に「 $S_1 \xrightarrow{\mu} S_6 \xrightarrow{\mu} S_8 \xrightarrow{\mu} S_1$ 」なので $C_6(S_1) = \{S_1, S_6, S_8\}$ です.

最後に「 $S_2 \xrightarrow{\mu} S_3 \xrightarrow{\mu} S_7 \xrightarrow{\mu} S_9 \xrightarrow{\mu} S_4 \xrightarrow{\mu} S_5 \xrightarrow{\mu} S_2$ 」なので $C_6(S_2) =$

$\{S_2, S_3, S_7, S_9, S_4, S_5\}$ です. これで M が軌道分解されました. 軌道の長さが 1, 3, 6 となるので, 表と一致します. 同じ軌道上にある S_k は同じ代数的構造を持つので, S_k を含む軌道の長さを m とすると, $F_{10}(x)$ は既約 m 次式 (g とおく) を因数に持つか, g を均等に分解した式 $h(n|m, h^n = g)$ を持ちます.

以上を Mathematica でプログラムすると次の様になります.

```

orbitInSBy[H_] := Table[
  Sort /@ Table[Sort /@ (TakeList[Σ10[i], {3, 3}] /. AssociationThread[H[[1]] → H[[k]]]),
    {k, 1, Length[H]}] // Union, {i, 1, 10}] // Union
C6 = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {x2, x3, x4, x5, x6, x1}, {x3, x4, x5, x6, x1, x2},
  {x4, x5, x6, x1, x2, x3}, {x5, x6, x1, x2, x3, x4}, {x6, x1, x2, x3, x4, x5}};

```

```

orbit = orbitInSBy[C6]
Length /@ orbit

```

```

Out[4]= {{{{x1, x3, x5}, {x2, x4, x6}}}, {{{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}},
  {{x1, x2, x6}, {x3, x4, x5}}, {{x1, x5, x6}, {x2, x3, x4}}},
  {{{x1, x2, x4}, {x3, x5, x6}}, {{x1, x2, x5}, {x3, x4, x6}},
  {{x1, x3, x4}, {x2, x5, x6}}, {{x1, x3, x6}, {x2, x4, x5}},
  {{x1, x4, x5}, {x2, x3, x6}}, {{x1, x4, x6}, {x2, x3, x5}}}}

```

```

Out[5]= {1, 3, 6}

```

同様にして, $gal = H_6$, G_{12} の場合も求めます. 表と一致します.

```

In[6]:= G12 = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {x3, x4, x6, x5, x2, x1}, {x6, x5, x1, x2, x4, x3},
  {x4, x3, x5, x6, x1, x2}, {x5, x6, x2, x1, x3, x4}, {x2, x1, x4, x3, x6, x5},
  {x1, x2, x6, x5, x4, x3}, {x3, x4, x1, x2, x5, x6}, {x6, x5, x3, x4, x2, x1},
  {x4, x3, x2, x1, x6, x5}, {x5, x6, x4, x3, x1, x2}, {x2, x1, x5, x6, x3, x4}};
H6 = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {x6, x3, x4, x2, x1, x5}, {x5, x4, x2, x3, x6, x1},
  {x4, x5, x6, x1, x2, x3}, {x3, x6, x1, x5, x4, x2}, {x2, x1, x5, x6, x3, x4}};

```

```

In[8]:= orbit = orbitInSBy[H6]
Length /@ orbit

```

```

Out[8]= {{{{x1, x5, x6}, {x2, x3, x4}}}, {{{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}},
  {{x1, x2, x5}, {x3, x4, x6}}, {{x1, x3, x6}, {x2, x4, x5}}},
  {{{x1, x2, x4}, {x3, x5, x6}}, {{x1, x2, x6}, {x3, x4, x5}},
  {{x1, x4, x5}, {x2, x3, x6}}}, {{{x1, x3, x4}, {x2, x5, x6}},
  {{x1, x3, x5}, {x2, x4, x6}}, {{x1, x4, x6}, {x2, x3, x5}}}}

```

```

Out[9]= {1, 3, 3, 3}

```

```

In[10]:= orbit = orbitInSBy[G12]
Length /@ orbit

```

```

Out[10]= {{{{x1, x3, x6}, {x2, x4, x5}}}, {{{x1, x3, x5}, {x2, x4, x6}},
  {{x1, x4, x5}, {x2, x3, x6}}, {{x1, x4, x6}, {x2, x3, x5}}},
  {{{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}}, {{x1, x2, x4}, {x3, x5, x6}},
  {{x1, x2, x5}, {x3, x4, x6}}, {{x1, x2, x6}, {x3, x4, x5}},
  {{x1, x3, x4}, {x2, x5, x6}}, {{x1, x5, x6}, {x2, x3, x4}}}}

```

```

Out[11]= {1, 3, 6}

```

§2-3. $F_{15}(x)$ について

最後に $F_{15}(x)$ は正確には $F_{G_{48}}(x)$ で 定義は「 $F_{48}(x) = \prod_{G_{48}} (x - \theta)$, $\theta = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6$ 」です. S_6 の G_{48} による剰余類の代表元の集合を Σ_{15} , Σ_{15} の要素によって θ を置換して $(x - \theta)$ の積を作った式が $F_{15}(x)$ となります. 具体的には以下の様になります. (Σ_{15} は $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ の置換先によって表現しています.)

```
In[12]:=  $\Sigma_{15} = \{ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_4, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_4, x_5\},$   

 $\{x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, x_6\}, \{x_1, x_3, x_2, x_5, x_4, x_6\}, \{x_1, x_3, x_2, x_6, x_4, x_5\},$   

 $\{x_1, x_4, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_1, x_4, x_2, x_5, x_3, x_6\}, \{x_1, x_4, x_2, x_6, x_3, x_5\},$   

 $\{x_1, x_5, x_2, x_3, x_4, x_6\}, \{x_1, x_5, x_2, x_4, x_3, x_6\}, \{x_1, x_5, x_2, x_6, x_3, x_4\},$   

 $\{x_1, x_6, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_6, x_2, x_4, x_3, x_5\}, \{x_1, x_6, x_2, x_5, x_3, x_4\} \};$ 
```

$$F_{15}(x) = (x - x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6)(x - x_1x_2 - x_3x_5 - x_4x_6)(x - x_1x_2 - x_3x_6 - x_4x_5) \\
(x - x_1x_3 - x_2x_4 - x_5x_6)(x - x_1x_3 - x_2x_5 - x_4x_6)(x - x_1x_3 - x_2x_6 - x_4x_5) \\
(x - x_1x_4 - x_2x_3 - x_5x_6)(x - x_1x_4 - x_2x_5 - x_3x_6)(x - x_1x_4 - x_2x_6 - x_3x_5) \\
(x - x_1x_5 - x_2x_3 - x_4x_6)(x - x_1x_5 - x_2x_4 - x_3x_6)(x - x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_4) \\
(x - x_1x_6 - x_2x_3 - x_4x_5)(x - x_1x_6 - x_2x_4 - x_3x_5)(x - x_1x_6 - x_2x_5 - x_3x_4)$$

$F_{15}(x)$ は $x_1 \sim x_6$ の対称式となるので有理数係数の式です. また $\text{gal}(f) = G_{48}$ のとき, θ は G_{48} の固定体に入るので有理数です. 従って1次の因数 $(x - \theta)$ を持ちます. このことは G_{48} の部分群である G_{24} , Γ_{24} , H_{24} , Γ_{12} , G_{12} , C_6 , H_6 でも正しいです. しかし G_{12} , C_6 , H_6 などはこの他にも2次, 3次, 6次の因数を持ちます.

Σ_{15} の元を順に $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{14}$,

S_6 の G_{48} による剰余類を $G_{48} = \sigma_0 G_{48} + \sigma_1 G_{48} + \dots + \sigma_{14} G_{48} = T_0 + T_1 + \dots + T_{14}$ とし,

$\{T_i, i = 0, 1, \dots, 14\}$ の gal による軌道 (orbit) を調べます.

ここで「 G_{48} は $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$,

$T = \{X, Y, Z\}$ とおくと, T を動かさない S_6 の部分群」なので

$$T_0 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}, T_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\},$$

$$T_3 = \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}, \dots, T_{14} = \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$$

と見て構いません. $\text{gal} = G_{12}, C_6, H_6$ に対して, 順に, $F_{10}(x)$ の時と同様に Mathematica でプログラムして T に於ける軌道の長さを調べます.

```
In[13]:= orbitIntBy[H_] := Table[Sort /@  

  Table[Sort /@ (TakeList[ $\Sigma_{15}$ [[i]], {2, 2, 2}] /. AssociationThread[H[[1]] -> H[[k]]]),  

  {k, 1, Length[H]}] // Union, {i, 1, 15}] // Union
```

```
In[14]:= orbit = orbitInTBy[G12]
Length /@ orbit
```

```
Out[14]=
{{{ {x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6} }},
 {{ {x1, x4}, {x2, x6}, {x3, x5} }, { {x1, x5}, {x2, x3}, {x4, x6} }},
 {{ {x1, x2}, {x3, x5}, {x4, x6} }, { {x1, x4}, {x2, x3}, {x5, x6} },
 { {x1, x5}, {x2, x6}, {x3, x4} }}, {{ {x1, x2}, {x3, x6}, {x4, x5} },
 { {x1, x3}, {x2, x4}, {x5, x6} }, { {x1, x6}, {x2, x5}, {x3, x4} }},
 {{ {x1, x3}, {x2, x5}, {x4, x6} }, { {x1, x3}, {x2, x6}, {x4, x5} },
 { {x1, x4}, {x2, x5}, {x3, x6} }, { {x1, x5}, {x2, x4}, {x3, x6} },
 { {x1, x6}, {x2, x3}, {x4, x5} }, { {x1, x6}, {x2, x4}, {x3, x5} }}}
```

```
Out[15]=
{1, 2, 3, 3, 6}
```

```
In[16]:= orbit = orbitInTBy[C6]
Length /@ orbit
```

```
Out[16]=
{{{ {x1, x4}, {x2, x5}, {x3, x6} }},
 {{ {x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6} }, { {x1, x6}, {x2, x3}, {x4, x5} }},
 {{ {x1, x2}, {x3, x6}, {x4, x5} }, { {x1, x4}, {x2, x3}, {x5, x6} },
 { {x1, x6}, {x2, x5}, {x3, x4} }}, {{ {x1, x3}, {x2, x5}, {x4, x6} },
 { {x1, x4}, {x2, x6}, {x3, x5} }, { {x1, x5}, {x2, x4}, {x3, x6} }},
 {{ {x1, x2}, {x3, x5}, {x4, x6} }, { {x1, x3}, {x2, x4}, {x5, x6} },
 { {x1, x3}, {x2, x6}, {x4, x5} }, { {x1, x5}, {x2, x3}, {x4, x6} },
 { {x1, x5}, {x2, x6}, {x3, x4} }, { {x1, x6}, {x2, x4}, {x3, x5} }}}
```

```
Out[17]=
{1, 2, 3, 3, 6}
```

```
In[18]:= orbit = orbitInTBy[H6]
Length /@ orbit
```

```
Out[18]=
{{{ {x1, x2}, {x3, x6}, {x4, x5} }},
 {{ {x1, x3}, {x2, x5}, {x4, x6} }}, {{ {x1, x4}, {x2, x6}, {x3, x5} }},
 {{ {x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6} }, { {x1, x5}, {x2, x4}, {x3, x6} },
 { {x1, x6}, {x2, x3}, {x4, x5} }}, {{ {x1, x2}, {x3, x5}, {x4, x6} },
 { {x1, x3}, {x2, x6}, {x4, x5} }, { {x1, x4}, {x2, x5}, {x3, x6} }},
 {{ {x1, x3}, {x2, x4}, {x5, x6} }, { {x1, x5}, {x2, x3}, {x4, x6} },
 { {x1, x6}, {x2, x5}, {x3, x4} }}, {{ {x1, x4}, {x2, x3}, {x5, x6} },
 { {x1, x5}, {x2, x6}, {x3, x4} }, { {x1, x6}, {x2, x4}, {x3, x5} }}}
```

```
Out[19]=
{1, 1, 1, 3, 3, 3, 3}
```

表の他の部分についても同様に調べることができます。また「G72_solutions.nb」,「G48_solutions.nb」などでは $f_{10a} \sim f_{10f}$, $f_{15a} \sim f_{15e}$ などの式が登場しますが、 $f_{10a} = F_{10}(x)$, $f_{15a} = F_{15}(x)$ です。さらにこのセクションに関しては「solveSexticProgram.nb の§2」も参考になるとと思います。