可解で既約な6次方程式の厳密解を求めるプログラム　with *Mathematica* 14

2025 年5月31日　by　`mixedmoss`

```
In[◦ ]:= ClearAll["Global`*"]
```

§1 . プログラム

G72_solutions.nb と G48_solutions.nb をモジュール化して, 可解で既約な6次方程式f(x)を入力するだけで， 厳密解が求まるようにプログラムしました． なお， このプログラムはガロア群を求める必要はなく， Galois Resolvent を使って書いています． 説明は先に述べた2つのファイルをご覧ください． プログラム中で使う p10a~ p10f,p15a~p15e の定義は次の様になりますが， 実行時間が非常に長くかかるため (p15cは約3日!) Text形式としてます． 結果は直下の closed cell に入れてあるので， 新規， またはClearAll["-Global`*"] のなどの後には必ず｢評価｣して下さい． データが長すぎる為か， **長時間使っているうちにデータが壊れることもあります． その場合は reload して下さい．** (そんなことは起こりえないと思われるかもしれませんが， 実際に2度起こりました). またInternet に接続していないと§2の 表 が見えないかも知れません.

§1 - 1.(準備) p10a~f, p15a~e のプログラムと結果

```
Σ10 = {{x1, x3, x5, x2, x4, x6}, {x1, x3, x2, x4, x5, x6}, {x1, x3, x4, x2, x5, x6}, {x1, x3, x6, x2, x4, x5},
{x1, x5, x2, x3, x4, x6}, {x1, x5, x4, x2, x3, x6}, {x1, x5, x6, x2, x3, x4}, {x1, x2, x4, x3, x5, x6}, {x1, x2,
x6, x3, x4, x5}, {x1, x4, x6, x2, x3, x5}};
makeP10[p_] := SymmetricReduction[Expand[Product[(x - p) /. AssociationThread[Σ10[[1]] ->
Σ10[[k]]], {k, 1, 10}]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}][[1]] // Collect[#, x] &;
p10a = makeP10[(x1 + x3 + x5) (x2 + x4 + x6)];
p10b = makeP10[(x1  x3 + x3  x5 + x5  x1) + (x2  x4 + x4  x6 + x6  x2)];
p10c = makeP10[(x1 + x3 + x5) (x1  x3 + x3  x5 + x5  x1) + (x2 + x4 + x6) (x2  x4 + x4  x6 + x6  x2)];
p10d = makeP10[x1  x3  x5 + x2  x4  x6];
p10e = makeP10[x1  x3  x5 (x1 + x3 + x5) + x2  x4  x6 (x2 + x4 + x6)];
p10f = makeP10[(x1 x3 + x3 x5 + x5 x1) (x2 x4 + x4 x6 + x6 x2)];

Σ15 = {{x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {x1, x2, x3, x5, x4, x6}, {x1, x2, x3, x6, x4, x5}, {x1, x3, x2, x4, x5, x6},
{x1, x3, x2, x5, x4, x6}, {x1, x3, x2, x6, x4, x5}, {x1, x4, x2, x3, x5, x6},
  {x1, x4, x2, x5, x3, x6}, {x1, x4, x2, x6, x3, x5},
  {x1, x5, x2, x3, x4, x6}, {x1, x5, x2, x4, x3, x6},
  {x1, x5, x2, x6, x3, x4}, {x1, x6, x2, x3, x4, x5}, {x1, x6, x2, x4, x3, x5}, {x1, x6, x2, x5, x3, x4}};
makeP15[p_] := SymmetricReduction[Expand[Product[(x - p) /. AssociationThread[Σ15[[1]] ->
Σ15[[k]]], {k, 1, 15}]], {x1, x2, x3, x4, x5, x6}, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}][[1]] // Collect[#, x] &;
p15a = makeP15[x1  x2 + x3  x4 + x5  x6];
p15b = makeP15[x1  x2  x3  x4 + x3  x4  x5  x6 + x5  x6  x1  x2];
p15c = makeP15[x1  x2  (x1 + x2) + x3  x4  (x3 + x4) + x5  x6  (x5 + x6)];
```

```
p15d = makeP15[(x1 + x2) (x3 + x4) (x5 + x6)];
p15e = makeP15[(x1 + x2) (x3 + x4) + (x3 + x4) (x5 + x6) + (x5 + x6) (x1 + x2)];
```

【注】結果は下の closed　cell の内部に入っています．右下のコをクリックして「評価」して下さい．

§1 - 2.メインプログラム

以下がメインプログラムです．「評価」してください．

```
(*gの有理数解で重複度がmultiplicityのいずれかとなるものを取り出す*)
getTheta[g_,multiplicity_List]:=Module[{ichiji},ichiji = Select[FactorList[g], Exponent[#⟦1⟧,
 If[ichiji≠{},x/.Solve[ichiji⟦1,1⟧==0,x]⟦1⟧,{}]];

(*Gal=G72,G12 のタイプを解くプログラム. 詳しくは G72.solutions.nb参照*)
solveG72[f_]:=Module[{alist,$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6,u1,u2,v1,v2,α,β,θa,θb,θc,θd,θe,θf},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x]⟦1;;6⟧{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10f}={p10a,p10b,p10c,p10d,p10e,p10f}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a
{θa,θb,θc,θd,θe,θf}=getTheta[#,{1,4,7,10}]&/@{f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10f};
{α,β}=t/.Solve[t^2-($a1)t+θa==0,t];
If[{α,β}≠{0,0},{u1,u2}=LinearSolve[{{1,1},{α,β}},{θb,θc}];{v1,v2}=LinearSolve[{{1,1},{α,β}}
If[Discriminant[u^2- (θb)u+(θf),u]≠0,{u1,u2}=u/.Solve[u^2- (θb)u+(θf)==0,u];{v1,v2}=LinearSo
u1=u2=1/2θb ;{v1,v2}=v/.Solve[v^2- θd v+$a6==0,v]]];
{x1,x3,x5}=x/.Solve[x^3-α x^2+ u1 x-v1==0,x,Cubics→True];
{x2,x4,x6}=x/.Solve[x^3-β x^2+ u2 x-v2==0,x,Cubics→True];]

(*Gal=G48 のタイプを解くプログラム. 詳しくは G48.solutions.nb参照*)
solveG48[f_]:=Module[{alist,$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6,u1,u2,u3,α,β,γ,θa,θb,θc,θd,θe,mat},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x]⟦1;;6⟧{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f15a,f15b,f15c,f15d,f15e}={p15a,p15b,p15c,p15d,p15e}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→
{θa,θb,θc,θd,θe}=getTheta[#,{1,5,7,9,15}]&/@{f15a,f15b,f15c,f15d,f15e};
{α,β,γ}=t/.Solve[t^3-θa t^2+θb t-$a6==0,t,Cubics→True];
Which[
(*case1*)(α-β)(β-γ)(γ-α)≠0,mat={{1,1,1},{α,β,γ},{β γ,γ α,α β}};{u1,u2,u3}=Simplify@LinearS
 (*case2a*)α==β&&α≠γ,u3=θc/(γ-α);{u1,u2}=u/.Solve[u^2+(u3)u+θe^2+u3^2,u],
 (*case2b*)β==γ&&β≠α,u1=θc/(α-β);{u2,u3}=u/.Solve[u^2+(u1)u+θe^2+u1^2,u],
 (*case2c*)γ==α&&γ≠β,u2=θc/(β-γ);{u3,u1}=u/.Solve[u^2+(u2)u+θe^2+u2^2,u],
 (*case3*)α==β==γ,{u1,u2,u3}=u/.Solve[u^3+(θe)u-(θd)==0,u,Cubics→True]
];
{x1,x2,x3,x4,x5,x6}=MapThread[1/2{(#1+Sqrt[#1^2-4#2]),(#1-Sqrt[#1^2-4#2])}&,{{u1,u2,u3},{α,

(*全ての6次方程式に対するプログラム. Gal=G72,G12 のタイプには solveG72で対応, Gal=G48 のタイプには solveG48で
solveSextic[f_]:=Module[{alist,θ10,θ15},
alist=CoefficientList[f,x]⟦1;;6⟧{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f15a}={p10a,p15a}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→alist];
θ10=getTheta[f10a,{1,4,7,10}];
θ15=getTheta[f15a,{1,5,7,9,15}];
Which[θ10=!={}&&θ15=!={},gal="G12系列";solveG72[f],θ10=!={}&&θ15==={},gal="G72系列";solveG72
```

§2.メインプログラムの解説

§2 - 1. ガロア群Gと f10a~f10f, f15a~f15e の因数分解

In[∘]:=
```
Import["https://mixedmoss.com/mathematica/Galois/sextic/Table1.png"]
```

Out[∘]=

TABLE I
The Degrees of the Irreducible Factors of the Galois Resolvents
$F_2(x)$, $F_{10}(x)$, and $F_{15}(x)$ in $\mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_6)^G$

Group G	$F_2(x)$	$F_{10}(x)$	$F_{15}(x)$
S_6	2	10	15
A_6	1, 1	10	15
H_{120}	2	10	10, 5
Γ_{60}	1, 1	10	10, 5
G_{72}	2	9, 1	9, 6
Γ_{36}	1, 1	9, 1	9, 6
G_{36}	2	9, 1	9, 3, 3
G_{18}	2	9, 1	9, 3, 3
G_{48}	2	6, 4	8, 6, 1
Γ_{24}	1, 1	6, 4	8, 6, 1
G_{24}	2	6, 4	8, 6, 1
H_{24}	2	6, 4	6, 4, 4, 1
Γ_{12}	1, 1	6, 4	6, 4, 4, 1
G_{12}	2	6, 3, 1	6, 3, 3, 2, 1
C_6	2	6, 3, 1	6, 3, 3, 2, 1
H_6	2	3, 3, 3, 1	3, 3, 3, 3, 1, 1, 1

上の表は「文献1」からの抜粋です.
(四角の枠は私が書きました.) 表で $F_2(x)$ の定義は「$F_2(x) = \Pi(x - \Theta)$,
$\Theta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_5 - x_6)$ で S_6 / A_6 の代表元2つで Θを置換して積を取ります.
よって判別式をDとすると $F_2(x) = (x - \sqrt{D})(x + \sqrt{D}) = x^2 - D$ です. また$F_{10}(x)$ = f10a,
$F_{15}(x)$ = f15a です. f10b~f10f, f15b~f15e はここには載っていません.

上の表によると 例えば Gal =
G_{12} のとき「$F_{10}(x)$ = (既約6次式) × (既約3次式) × (既約1次式)」,
「$F_{15}(x)$ = (既約6次式) × (既約3次式) × (既約3次式) × (既約2次式) × (既約1次式)」
と因数分解できるように見えます.
そうならば Θ の値はその1次因数の解を取れば良さそうに見えますが,
残念ながら そうなるとは限りません. 「既約3次式」の代わりに「1 次式の3乗」となることもあり,
その上その解が他の因数の解と一致することもあります. 幾つかの例をお見せします.

In[∘]:=
```
factorF10F15[f_]:=Module[{},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x]〚1;;6〛{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f15a}={p10a,p15a}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→alist];
Print["F10=f10a="Factor[f10a],"\nF15=f15a="Factor[f15a]]
]
factorF10Series[f_]:=Module[{},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x]〚1;;6〛{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f10a,f10b,f10c,f10d,f10e,f10f}={p10a,p10b,p10c,p10d,p10e,p10f}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a
Print["f10a="Factor[f10a],"\nf10b="Factor[f10b],"\nf10c="Factor[f10c],"\nf10d="Factor[f10d],"
]
factorF15Series[f_]:=Module[{},
alist={$a1,$a2,$a3,$a4,$a5,$a6}=CoefficientList[f,x]〚1;;6〛{1,-1,1,-1,1,-1}//Reverse;
{f15a,f15b,f15c,f15d,f15e}={p15a,p15b,p15c,p15d,p15e}/.AssociationThread[{a1,a2,a3,a4,a5,a6}→
Print["f15a="Factor[f15a],"\nf15b="Factor[f15b],"\nf15c="Factor[f15c],"\nf15d="Factor[f15d],"
]
```

§2 − 1 − 1. Gal = G_{12} のとき

- 例1 : $f1 = 5 - 2x + 9x^2 - 8x^3 + x^6$

In[∘]:= $f1 = 5 - 2x + 9x^2 - 8x^3 + x^6$;

factorF10F15[f1]

F10=f10a= $(-4 + x)\ (-64 + 32x - 4x^2 + x^3)\ (625 - 950x - 1311x^2 - 634x^3 - 38x^4 + 8x^5 + x^6)$

F15=f15a= $(-4 + x)\ (-23 + x^2)\ (-167 + 5x + x^3)\ (-23 - 23x - 4x^2 + x^3)\ (1 + 88x + 35x^2 + 32x^3 + 35x^4 + 8x^5 + x^6)$

- 例2 : $f2 = 8 - 10x^3 + x^6$

In[∘]:= $f2 = 8 - 10x^3 + x^6$;

factorF10F15[f2]

F10=f10a= $x\ (68 + 36x - 12x^2 + x^3)\ (4624 - 2448x + 2112x^2 + 568x^3 + 108x^4 + 12x^5 + x^6)$

F15=f15a= $(-6 + x)\ x^3\ (36 + 6x + x^2)\ (-68 - 6x^2 + x^3)\ (4624 - 408x^2 - 136x^3 + 36x^4 + 6x^5 + x^6)$

- 例3 : $f3 = 5 + 8x + 4x^2 - 2x^3 + x^4 + x^6$

In[∘]:= $f3 = 5 + 8x + 4x^2 - 2x^3 + x^4 + x^6$;

factorF10F15[f3]

F10=f10a= $(-9 + x)\ (-1 + x)^3\ (49 - 3144x - 918x^2 - 6x^3 + 33x^4 + 6x^5 + x^6)$

F15=f15a= $(-5 + x)\ (-2 + x)^2\ (-43 + 24x - 9x^2 + x^3)\ (-27 + 3x^2 + x^3)\ (-448 + 1536x + 960x^2 + 352x^3 + 84x^4 + 12x^5 + x^6)$

例1では Table1 に述べてあるように因数分解されています．しかし例2では F15(x)の「既約3次式」が「1次式の3乗」になっています．例3では F10(x)の「既約3次式」が「1次式の3乗」になり，F15(x)の「既約2次式」が「1次式の2乗」になっています．さらに f10b~f まで範囲を広げて見ましょう．

■ 例4 : $f4 = 5 - 10\,x + 4\,x^2 + 10\,x^3 - 6\,x^4 + x^6$

In[∘]:=
```
f4 = 5 - 10 x + 4 x^2 + 10 x^3 - 6 x^4 + x^6;
factorF10Series[f4]
```

f10a= $x\,(5 + 4\,x + 4\,x^2 + x^3)\,(78\,400 + 2880\,x + 4816\,x^2 + 2093\,x^3 + 384\,x^4 + 32\,x^5 + x^6)$

f10b= $(6 + x)\,(91 + 64\,x + 14\,x^2 + x^3)\,(77\,896 - 60\,x + 406\,x^2 - 77\,x^3 - 36\,x^4 + 4\,x^5 + x^6)$

f10c= $(-5 + x)^3\,x\,(3\,483\,200 - 1\,721\,120\,x + 353\,064\,x^2 - 38\,385\,x^3 + 2331\,x^4 - 75\,x^5 + x^6)$

f10d= $(5 + x)^3\,(10 + x)\,(3400 - 1340\,x + 114\,x^2 - 145\,x^3 + 81\,x^4 - 15\,x^5 + x^6)$

f10e= $x\,(25 - 10\,x + x^3)\,(1\,433\,600 - 112\,640\,x + 2376\,x^2 - 839\,x^3 - 14\,x^4 + 16\,x^5 + x^6)$

f10f= $(-4 + x)\,(1 + 38\,x - 12\,x^2 + x^3)\,(1\,960\,000 - 154\,000\,x + 4700\,x^2 + 665\,x^3 - 94\,x^4 - 8\,x^5 + x^6)$

■ 例5 : $f5 = 8 + 8\,x^2 - 6\,x^4 + x^6$

In[∘]:=
```
f5 = 8 + 8 x^2 - 6 x^4 + x^6;
factorF10Series[f5]
```

f10a= $(-2 + x)\,(-8 + 8\,x + 6\,x^2 + x^3)^2\,(-8 + 204\,x + 26\,x^2 + x^3)$

f10b= $(8 + x)\,(512 - 8\,x^2 + x^3)\,(56 + 44\,x + 12\,x^2 + x^3)^2$

f10c= $x^4\,(-11\,776 + 3968\,x^2 - 120\,x^4 + x^6)$

f10d= $x^4\,(-11\,776 + 3968\,x^2 - 120\,x^4 + x^6)$

f10e= $(-8 + x)\,(-512 + 448\,x + 8\,x^2 + x^3)\,(-448 + 16\,x + 16\,x^2 + x^3)^2$

f10f= $(-16 + x)\,(-4096 + 512\,x - 16\,x^2 + x^3)\,(-64 - 48\,x - 8\,x^2 + x^3)^2$

例4では f10cやf10dの「既約3次式」が「1 次式の3乗」となっています. さらに例5では その「1 次式の3乗」が別の一次式と一緒になって「1 次式の4乗」となっています.

§2 − 1 − 2. Gal = G_{72} のとき

チェックした限りでは f10a~f10f, f15a~f15e は表の通りに分解されました.

■ 例6 : f6 = $1 + x + 3 x^2 + 9 x^3 + 10 x^4 + x^6$

In[∘]:=
```
f6 = 1 + x + 3 x^2 + 9 x^3 + 10 x^4 + x^6;
factorF10Series[f6]
factorF15Series[f6]
```

f10a= $(-11 + x)\left(-5324 + 4961 x - 162\,712 x^2 - 102\,970 x^3 - 31\,362 x^4 + 36\,903 x^5 - 8790 x^6 + 943 x^7 - 49 x^8 + x^9\right)$

f10b= $(1 + x)\left(2\,516\,914 - 7\,438\,279 x + 3\,239\,012 x^2 - 604\,450 x^3 + 66\,212 x^4 + 5803 x^5 - 4020 x^6 + 623 x^7 - 41 x^8 + x^9\right)$

f10c= $(-11 + x)\left(-109\,961\,896 + 115\,060\,957 x - 57\,076\,558 x^2 + 17\,178\,547 x^3 - 3\,381\,484 x^4 + 445\,013 x^5 - 38\,868 x^6 + 2167 x^7 - 70 x^8 + x^9\right)$

f10d= $(-2 + x)\left(-2551 + 1141 x - 1096 x^2 - 1778 x^3 + 1760 x^4 + 1214 x^5 + 129 x^6 + 43 x^7 + 11 x^8 + x^9\right)$

f10e= $x\left(465\,850 + 502\,755 x + 123\,860 x^2 - 26\,069 x^3 - 15\,448 x^4 - 2404 x^5 - 242 x^6 + 21 x^7 + 12 x^8 + x^9\right)$

f10f= $(-3 + x)\left(-54\,224 + 59\,592 x - 61\,612 x^2 + 31\,102 x^3 + 5519 x^4 - 2017 x^5 + 73 x^6 + 57 x^7 - 15 x^8 + x^9\right)$

f15a= $\left(-3151 + 78 x - 425 x^2 - 5 x^3 + 125 x^4 - 22 x^5 + x^6\right)\left(48\,632 - 7953 x - 8488 x^2 - 610 x^3 - 586 x^4 + 208 x^5 - 98 x^6 - 19 x^7 - 8 x^8 + x^9\right)$

f15b= $\left(-3399 - 506 x + 415 x^2 + 155 x^3 - 35 x^4 - 6 x^5 + x^6\right)\left(-10\,648 + 22\,627 x - 14\,278 x^2 + 3630 x^3 - 1386 x^4 + 143 x^5 - 98 x^6 + 11 x^7 - 3 x^8 + x^9\right)$

f15c= $\left(-77\,639 - 92\,104 x + 45\,625 x^2 - 8415 x^3 + 825 x^4 - 44 x^5 + x^6\right)\left(14\,999\,762 - 16\,567\,839 x + 7\,239\,048 x^2 - 1\,568\,232 x^3 + 152\,380 x^4 + 5909 x^5 - 3892 x^6 + 547 x^7 - 37 x^8 + x^9\right)$

f15d= $\left(625 + 875 x - 2975 x^2 + 225 x^3 + 60 x^4 + 10 x^5 + x^6\right)\left(304\,175 - 1\,523\,520 x - 1\,091\,235 x^2 - 139\,761 x^3 + 93\,394 x^4 + 42\,386 x^5 + 7889 x^6 + 799 x^7 + 44 x^8 + x^9\right)$

f15e= $\left(129 + 9922 x + 4425 x^2 - 2995 x^3 + 525 x^4 - 38 x^5 + x^6\right)\left(74\,549\,698 + 75\,895\,287 x - 83\,101\,612 x^2 + 30\,773\,950 x^3 - 6\,197\,814 x^4 + 766\,428 x^5 - 60\,172 x^6 + 2941 x^7 - 82 x^8 + x^9\right)$

§2 − 1 − 3. Gal = G_{48} のとき

例7の様に表の通りに分解されるものもありますが，例8の様に表では既約でも，実際には更に分解される事も多いです．

- 例7 : f8 = $3 + 9x + 8x^2 - 10x^3 - 10x^4 + x^6$

In[ ]:=
```
f7 = 3 + 9 x + 8 x^2 - 10 x^3 - 10 x^4 + x^6;
factorF10Series[f7]
factorF15Series[f7]
```

f10a= $(1 + 19x + 23x^2 + 10x^3 + x^4)(34225 + 51977x + 31136x^2 + 7883x^3 + 929x^4 + 50x^5 + x^6)$

f10b= $(2111 + 1441x + 323x^2 + 30x^3 + x^4)(35055 + 21843x + 2046x^2 - 723x^3 - 71x^4 + 10x^5 + x^6)$

f10c= $(-557 + 8x + 83x^2 + 17x^3 + x^4)(2224995 + 1244586x + 283435x^2 + 33508x^3 + 2169x^4 + 73x^5 + x^6)$

f10d= $(663 - 552x + 173x^2 - 23x^3 + x^4)(4635 + 2286x - 405x^2 - 252x^3 + 19x^4 + 13x^5 + x^6)$

f10e= $(291 + 33x - 23x^2 + 4x^3 + x^4)(294705 - 71721x + 8562x^2 + 1095x^3 + 205x^4 + 28x^5 + x^6)$

f10f= $(603 - 879x + 265x^2 - 28x^3 + x^4)(1040121 - 41481x - 20918x^2 + 2215x^3 + 45x^4 - 20x^5 + x^6)$

f15a= $(-5 + x)(12312 + 6700x + 576x^2 - 401x^3 - 66x^4 + 5x^5 + x^6)$
$(72052 + 9202x - 20367x^2 - 5045x^3 + 3200x^4 + 1775x^5 + 343x^6 + 30x^7 + x^8)$

f15b= $(-6 + x)(30213 - 693x + 3096x^2 - 453x^3 + 18x^4 - 14x^5 + x^6)$
$(1194939 + 392553x + 174285x^2 + 30006x^3 + 1458x^4 - 471x^5 - 80x^6 - 4x^7 + x^8)$

f15c= $(-13 + x)(124517 + 22055x - 10819x^2 - 3013x^3 - 107x^4 + 17x^5 + x^6)$
$(79724119 + 72755539x + 28330584x^2 + 6107892x^3 + 796408x^4 + 64374x^5 + 3156x^6 + 86x^7 + x^8)$

f15d= $(-23 + x)(65067 + 12535x - 4629x^2 - 1733x^3 + 543x^4 - 43x^5 + x^6)$
$(15129 - 20541x - 1376x^2 + 5572x^3 + 1708x^4 - 386x^5 - 64x^6 + 6x^7 + x^8)$

f15e= $(15 + x)(243912 + 211120x + 73006x^2 + 12761x^3 + 1184x^4 + 55x^5 + x^6)$
$(488332 + 946958x + 750983x^2 + 318045x^3 + 78950x^4 + 11805x^5 + 1043x^6 + 50x^7 + x^8)$

■ 例8 : $f8 = 3 - 10x^2 - 10x^4 + x^6$

In[∘]:=
```
f8 = 3 - 10 x^2 - 10 x^4 + x^6;
factorF10Series[f8]
factorF15Series[f8]
```

f10a= $(-3 - 10x + 10x^2 + x^3)^2 (19600 + 5408x + 680x^2 + 40x^3 + x^4)$

f10b= $(-97 + 90x + 20x^2 + x^3)^2 (3520 + 192x + 80x^2 + x^4)$

f10c= $x^4 (93471 - 6457x^2 + 73x^4 + x^6)$

f10d= $x^4 (93471 - 6457x^2 + 73x^4 + x^6)$

f10e= $(291 + 70x - 20x^2 + x^3)^2 (20160 - 576x + 240x^2 + x^4)$

f10f= $(-9 - 30x + 10x^2 + x^3)^2 (48400 + 8224x + 840x^2 + 40x^3 + x^4)$

f15a= $(10 + x) (220 - 24x + 20x^2 + x^4)^2 (-55043 - 24020x + 1680x^2 + 522x^3 + 120x^4 + 20x^5 + x^6)$

f15b= $(10 + x) (1260 - 72x + 60x^2 + x^4)^2 (-135387 - 129780x + 840x^2 + 1566x^3 + 160x^4 + 20x^5 + x^6)$

f15c= $x^7 (970758649 + 15079988x^2 + 83630x^4 + 292x^6 + x^8)$

f15d= $x^7 (970758649 + 15079988x^2 + 83630x^4 + 292x^6 + x^8)$

f15e= $x (12460 + 4424x + 620x^2 + 40x^3 + x^4)^2 (31157 - 18980x + 8020x^2 + 4278x^3 + 620x^4 + 40x^5 + x^6)$

§2 - 1 - 4. Gal = H_6 のとき

■ 例9 : $f9 = 3 + x^6$

In[∘]:=
```
f9 = 3 + x^6;
factorF10Series[f9]
factorF15Series[f9]
```

f10a= $x (-192 + x^3) (-3 + x^3)^2$

f10b= $x (3 + x^3)^2 (192 + x^3)$

f10c= $(-3 + x)^3 x^4 (3 + x)^3$

f10d= $(-3 + x)^3 x^4 (3 + x)^3$

f10e= $x (-576 + x^3) (-9 + x^3)^2$

f10f= $x (-576 + x^3) (-9 + x^3)^2$

f15a= $x^3 (-81 + x^3) (-24 + x^3)^2 (3 + x^3)$

f15b= $x^3 (-243 + x^3) (-72 + x^3)^2 (9 + x^3)$

f15c= $(-9 + x) (-3 + x)^3 x^7 (3 + x)^3 (9 + x)$

f15d= $(-9 + x) (-3 + x)^3 x^7 (3 + x)^3 (9 + x)$

f15e= $x^3 (-3 + x^3) (24 + x^3)^2 (81 + x^3)$

- 例10 : f10 = $2 - 6x + 9x^2 + 2x^3 + x^6$

In[∘]:=
```
f10 = 2 - 6 x + 9 x^2 + 2 x^3 + x^6;
factorF10Series[f10]
factorF15Series[f10]
```

f10a= $x\,(-196 + 9x - 6x^2 + x^3)\,(-16 + 9x - 6x^2 + x^3)\,(-16 + 36x + 12x^2 + x^3)$
f10b= $x\,(16 + 36x - 12x^2 + x^3)\,(16 + 9x + 6x^2 + x^3)\,(196 + 9x + 6x^2 + x^3)$
f10c= $(-4 + x)^3\,x\,(-28 + 57x - 12x^2 + x^3)\,(8 + 21x + 6x^2 + x^3)$
f10d= $(-2 + x)^3\,(2 + x)\,(46 + 21x - 6x^2 + x^3)\,(82 + 57x + 12x^2 + x^3)$
f10e= $x\,(-32 + 24x + x^3)\,(-1148 - 3x + 18x^2 + x^3)\,(184 + 105x + 18x^2 + x^3)$
f10f= $(-9 + x)\,(-977 + 267x - 27x^2 + x^3)\,(-392 - 84x - 9x^2 + x^3)\,(-32 + 24x - 9x^2 + x^3)$

f15a= $(-3 + x)^2\,(6 + x)\,(-108 - 27x + x^3)\,(-83 + 9x - 3x^2 + x^3)\,(-11 + 9x - 3x^2 + x^3)\,(-2 + 9x + 6x^2 + x^3)$
f15b= $(-9 + x)\,x^2\,(-112 - 12x + x^3)\,(32 - 12x + x^3)\,(-324 - 9x^2 + x^3)\,(-4 - 12x - 9x^2 + x^3)$
f15c= $(-6 + x)^2\,(12 + x)\,(108 + 54x + x^3)$
$(-28 + 30x - 12x^2 + x^3)\,(-172 + 102x - 12x^2 + x^3)\,(8 - 6x + 6x^2 + x^3)$
f15d= $(-4 + x)^2\,(14 + x)\,(-8 - 6x - 6x^2 + x^3)$
$(-8 + 66x - 6x^2 + x^3)\,(224 + 66x + 6x^2 + x^3)\,(28 + 30x + 12x^2 + x^3)$
f15e= $(-6 + x)\,(3 + x)^2\,(108 - 27x + x^3)\,(2 + 9x - 6x^2 + x^3)\,(11 + 9x + 3x^2 + x^3)\,(83 + 9x + 3x^2 + x^3)$

gal = G_{72} の時は完全に表の通りでしたが, G_{48} ,
G_{12} の時は表の通りになるのは半分以下となります. そして gal = C_6, H_6 の時は,
表の通りになるのは (調べた限りでは) 1 つもありません. なぜなのかよく分かりません.

§2 - 2. θ の見つけ方について

以下, この節では求める有理数解をθ, それ以外の有理数解をθ’と表します. §2 - 1 で見た様に, θを含む式が1次式とは限らず, またθ以外にも有理数解を持つ事が有りますが, gal=G72グループ, gal=G12グループの時は, f10a~f10f において (x-θ)の指数は 1,4,7,10 のいずれかとなり, (x-θ’)の指数は 3,6,9 の何れかとなります. また gal=G48グループの時は, f15a~f15e において (x-θ)の指数は 1,5,7,9,15 のいずれかとなり, (x-θ’)の指数は 6,8,14 の何れかとなります. 故に, gal=G72, G12のグループの時は, 1次式で指数が{1,4,7,10}の何れかとなるものを探し, gal=G48の時は, 1次式で指数が{1,5,7,9,15}の何れかとなるものを探すとθが求まります. 後は G72_solutions.nbと G48_solutions.nb と同様に解くことができます. (gal=G12のときは gal=G72と同様に解きます). また G72,G48,G12 の3グループの場合分けは「f10a,f15a がθを共に持てば G12グループ」,「 f10a のみがθを持てばG72グループ」,「 f15aのみがθを持てば G48グループ」と場合分けできます. これ以上に細かくガロア群を求めるには f10a~f10f,f15a~f15e 以外にも式が必要となりますが, それは 文献[1][3]をご覧ください.

§3 . 使用例

6次の係数が1(monic)で既約で可解な有理数係数の6次方程式に対応しています. 使うには solveSextic[f] と入力して「評価」するだけです. このとき変数x1~x6に厳密解の式が保存されます. 出力するには「x1」などと打ち込む必要があります. また gal にはガロア群が入るグループ名 が入ります. また f10a~f10f, f15a~f15eも Global変数なので見ることができます. 「文献1」に載っている2つの例を解いてみます.

- 例1 f=1+x+ x^2 +x^3+x^4+x^5+x^6

In[∘]:=
```
f1 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6;
solveSextic[f1]
TraditionalForm[x1]
TraditionalForm[x2]
```

Out[∘]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{6}\left(-1-i\sqrt{7}\right)-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(14+i\sqrt{7}+3\sqrt{21}\right)}+\frac{i\sqrt{7}\left(1-i\sqrt{3}\right)}{3\times 2^{2/3}\sqrt[3]{14+i\sqrt{7}+3\sqrt{21}}}$$

Out[∘]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{6}\left(-1+i\sqrt{7}\right)-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(14-i\sqrt{7}+3\sqrt{21}\right)}-\frac{i\sqrt{7}\left(1-i\sqrt{3}\right)}{3\times 2^{2/3}\sqrt[3]{14-i\sqrt{7}+3\sqrt{21}}}$$

x_1 , x_2 のみ出力しました. 次は 厳密解の近似値とNSolveを使った数値解を比較します.

In[∘]:=
```
N[{x1, x2, x3, x4, x5, x6}] // Sort
x /. NSolve[f1 == 0, x] // Sort
```

Out[∘]=

{-0.900969 - 0.433884 ⅈ, -0.900969 + 0.433884 ⅈ, -0.222521 - 0.974928 ⅈ,
-0.222521 + 0.974928 ⅈ, 0.62349 - 0.781831 ⅈ, 0.62349 + 0.781831 ⅈ}

Out[∘]=

{-0.900969 - 0.433884 ⅈ, -0.900969 + 0.433884 ⅈ, -0.222521 - 0.974928 ⅈ,
-0.222521 + 0.974928 ⅈ, 0.62349 - 0.781831 ⅈ, 0.62349 + 0.781831 ⅈ}

ご覧のように一致します. 次は ガロア群のグループと, f10a, f15a を因数分解します.

In[∘]:=
```
gal
Factor[f10a]
Factor[f15a]
```

Out[∘]=

G12系列

Out[∘]=

$$(-2+x)\left(-1+5x-6x^2+x^3\right)\left(8+4x+16x^2+x^3+11x^4+2x^5+x^6\right)$$

Out[∘]=

$$(-3+x)\left(2+x+x^2\right)\left(1-x-2x^2+x^3\right)^2\left(43-23x-3x^2-x^3+9x^4+3x^5+x^6\right)$$

本当のガロア群は C_6 ですから確かにG_{12} の部分群です.

- 例2 f= $x^6+x^4-x^3-2x^2+3x-1$

```
f2 = x^6 + x^4 - x^3 - 2 x^2 + 3 x - 1;
solveSextic[f2]
TraditionalForm[x1]
```

Out[•]//TraditionalForm=

$$\left(6\left(2^{2/3}\sqrt[6]{3}\,(93i-155\sqrt{3}+45\sqrt{31}-9i\sqrt{93})\sqrt[3]{\sqrt{93}-9}-3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{93}-9)^{2/3}(-93-93i\sqrt{3}+31i\sqrt{31}+9\sqrt{93})+2\sqrt[3]{3}\,(-1395-279i\sqrt{3}+87i\sqrt{31}+145\sqrt{93})\right)\right)\Big/\left((31\sqrt{3}-9\sqrt{31})\left(2\sqrt[3]{3}\,(\sqrt{3}+3i)+\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{93}-9)^{2/3}\right)\left(6+6i\sqrt{3}-3i\sqrt[3]{2}\,\sqrt[6]{3}\,(\sqrt{93}-9)^{2/3}+\sqrt[3]{2}\,(3(\sqrt{93}-9))^{2/3}\right)\right)+\sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3(\sqrt{93}-9)}}-\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{93}-9)}}{3^{2/3}}-\left(6\left(2^{2/3}\sqrt[6]{3}\,(93i-155\sqrt{3}+45\sqrt{31}-9i\sqrt{93})\sqrt[3]{\sqrt{93}-9}-3\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{93}-9)^{2/3}(-93-93i\sqrt{3}+31i\sqrt{31}+9\sqrt{93})+2\sqrt[3]{3}\,(-1395-279i\sqrt{3}+87i\sqrt{31}+145\sqrt{93})\right)^2\right)\Big/\left(31(3\sqrt{93}-29)\left(2\sqrt[3]{3}\,(\sqrt{3}+3i)+\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{93}-9)^{2/3}\right)^2\left(6+6i\sqrt{3}-3i\sqrt[3]{2}\,\sqrt[6]{3}\,(\sqrt{93}-9)^{2/3}+\sqrt[3]{2}\,(3(\sqrt{93}-9))^{2/3}\right)^2\right)\right)}$$

In[•]:=
```
N[{x1, x2, x3, x4, x5, x6}] // Chop // Sort
x /. NSolve[f2 == 0, x] // Sort
```

Out[•]=

{-1.23488, -0.335607 + 1.53239 i, -0.335607 - 1.53239 i,
0.552548, 0.676771 + 0.370853 i, 0.676771 - 0.370853 i}

Out[•]=

{-1.23488, -0.335607 - 1.53239 i, -0.335607 + 1.53239 i,
0.552548, 0.676771 - 0.370853 i, 0.676771 + 0.370853 i}

In[•]:=
```
gal
Factor[f10a]
Factor[f15a]
```

Out[•]=

G48系列

Out[•]=

$(1+71x-x^2-2x^3+x^4)\,(1-15x+60x^2-30x^3+20x^4-4x^5+x^6)$

Out[•]=

$x\,(-31-82x-46x^2+19x^3+4x^4-x^5+x^6)$
$(877-74x-144x^2+53x^3-25x^4-4x^5+9x^6-2x^7+x^8)$

f15aのみが有理数解を持つので，G48グループで，本当のガロア群は SageMath によるとG_{48} です．