共変ベクトル(1次微分形式)の可視化

2016年9月4日

Cabri研究会

生越　茂樹

§ 1. 双対ベクトル空間

ベクトル空間V から実数 R への線形写像(線形汎関数)の集合を V^* とする．
V^*の要素f, g に対し，その和と実数倍を

$$(f+g)(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}),\ (c\,f)(\mathbf{x}) \equiv cf(\mathbf{x}) \quad (\text{ただし } x\in V, c\in R)$$

と定義するとV^* はベクトル空間を作る．これを V の**双対ベクトル空間**と言う.

例えば, $\dim V=2$,Vの基底が $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ ， $x=x^1\mathbf{e_1}+x^2\mathbf{e_2}(x^i\in R)$ のとき　$f_1(\mathbf{x})=x^1, f_2(\mathbf{x})=x^2$
と定義すると[即ちf_i は $\mathbf{x}$ の第 i 成分を対応させる関数]　f_1, f_2 は V^* の要素となる.
$\left(\because \mathbf{y}=y^1\mathbf{e_1}+y^2\mathbf{e_2}\text{とすると}, f_1(\mathbf{x}+\mathbf{y})=x^1+y^1=f_1(\mathbf{x})+f_1(\mathbf{y}) \text{ かつ } f_1(c\mathbf{x})=cx^1=cf_1(\mathbf{x})\right)$
さらに $\mathbf{e^1}\equiv f_1$, $\mathbf{e^2}\equiv f_2$ と定めると,

$$\boxed{\mathbf{e^1}(\mathbf{e_1})=1,\ \mathbf{e^1}(\mathbf{e_2})=0,\ \mathbf{e^2}(\mathbf{e_2})=0,\ \mathbf{e^2}(\mathbf{e_2})=1 \Longleftrightarrow \mathbf{e^i}(\mathbf{e_j})=\delta^i_j}$$

また $\{\mathbf{e^1},\mathbf{e^2}\}$ はV^*の基底となる. これを $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$の**双対基底**と言う.

$$\begin{pmatrix} \because f\in V^*\text{に対し} f(\mathbf{e_1})=a_1, f(\mathbf{e_2})=a_2 \text{とすると}, f(\mathbf{x})=f(x^1\mathbf{e_1}+x^2\mathbf{e_2})=x^1a_1+x^2a_2 \\ \text{一方 } (a_1\mathbf{e^1}+a_2\mathbf{e^2})(\mathbf{x})=a_1\mathbf{e^1}(\mathbf{x})+a_2\mathbf{e^2}(\mathbf{x})=a_1x^1+a_2x^2 \text{ だから}, f=a_1\mathbf{e^1}+a_2\mathbf{e^2} \end{pmatrix}$$

§2. 内積によるV*の表現

ベクトル空間V に内積 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ が定義されている時,$f_{\mathbf{x}}(\mathrm{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ とすると $f_{\mathbf{x}}$ は線形汎関数.

さらに $\boxed{\Phi:\ V\to V^*\ ,\ \Phi(\mathbf{x})=f_{\mathbf{x}}\ =\mathbf{x}\cdot}$ とすると, Φ は V から V^*への同型写像となる.

Φを「標準的な同型対応」と言う. Φにより, V とV^* を同一視できる.

例えば V の基底が $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$の時 $\boxed{\mathbf{e}^{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{j}}=\delta^i_j}$ となるような「V内のベクトル」 $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2$ がとれる.

$\mathbf{e}^{\mathbf{i}}\cdot(x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2)=x^i$ だから 「V^*の双対基底$f_{\mathbf{e}_{\mathbf{i}}}$」と「 V内のベクトル$\mathbf{e}^{\mathbf{i}}$ 」が対応する.

また $\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2$ のとき, $\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{x}=\ x^1$, $\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{x}=x^2$ だから $\boxed{\mathbf{x}=(\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{x})\mathbf{e}_1+(\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{x})\mathbf{e}_2}$

同様 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}^1+x_2\mathbf{e}^2$ のとき, $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{x}=\ x_1$, $\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{x}=x_2$ だから $\boxed{\mathbf{x}=(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{x})\mathbf{e}^1+(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{x})\mathbf{e}^2}$

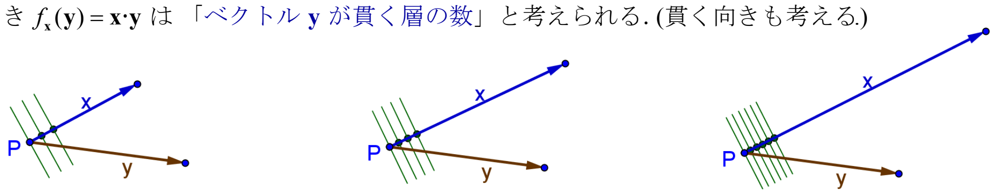
[注] $\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2$ のとき, x^i を $\mathbf{x}$ の**反変成分**, $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}^1+x_2\mathbf{e}^2$ のとき, x_i を $\mathbf{x}$ の**共変成分**と言う.

通常, 反変成分は $\begin{pmatrix}\mathrm{x}^1\\ x^2\end{pmatrix}$, 共変成分は (x_1,x_2)のように表す. また**反変ベクトル,共変ベクトル**とも言う.

共変成分と反変成分.ggb　共変成分,反変成分と座標変換.ggb

§ 3. 層(stack)によるV*の表現

V内のベクトル $\mathbf{x}$ に直交し，かつその密度が $|\mathbf{x}|$に比例する平面の集合(stack)を V*の要素 $f_{\mathbf{x}}$ とみなす.
このとき $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ は「ベクトル $\mathbf{y}$ が貫く層の数」と考えられる. (貫く向きも考える.)

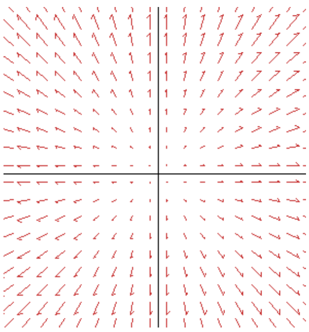


共変成分のstack表示.ggb

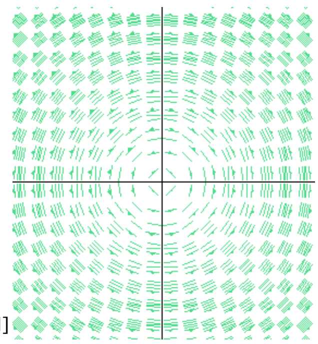
例えば　関数$f(x,y)=x^2+y^2$ に対し $\mathbf{u}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=(2x,2y)$ は共変ベクトルとなり，以下の2通りで表される.

$\left(\mathbf{u}\right.$ は 反変ベクトル $\mathbf{dv}=\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$に対して，　実数 $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ を対応させるので　共変ベクトル$\left.\right)$

[内積利用]



[stack利用]



Vector field analyzer

参考文献

- 「物理のためのベクトルとテンソル」by ダニエル･フライシュ
- 「ベクトル解析30講 」 by 志賀浩二
- 「重力理論」 by Wheeler,Misner & Thorne

- 物理のかぎしっぽ
  - http://hooktail.sub.jp/
- Vector Field Analyzer II
  - https://math.la.asu.edu/~kawski/vfa2/
- 「Intro to differential forms」on YouTube
  - https://www.youtube.com/watch?v=M5wrnwlm8lw&list=PLB8F2D70E034E9C29

【注】Vector Field Analyzer は java の設定が必要. また IE 上でのみ動くのかもしれない.