目次

10　3 次元 (空間) のグラフ

– この章は高校の範囲をやや超える –

x, y, z 座標系 (直交座標系) におけるプロット

$z = f(x, y)$ のグラフ (曲面) ($a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$)	plotfunc3d(f(x, y), x = a ..b, y = c ..d)
$z = f(x, y)$ のグラフ (曲面) ($a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$)	plot :: Function3d(f(x, y), x = a ..b, y = c ..d);
媒介変数表示された 3 次元の曲線 ($a \leqq t \leqq b$)	plot :: Curve3d([x(t), y(t), z(t)], t = a ..b)
媒介変数表示された 3 次元の曲面 (a ≦ u ≦ b, c ≦ v ≦ d)	plot :: Surface3d([x(u, v), y(u, v), z(u, v)], u = a ..b, v = c ..d)

特殊な座標系によるプロット (参考)

球面座標 (r, θ, ϕ) で表示された 3 次元の曲面 (a ≦ u ≦ b, c ≦ v ≦ d)	plot :: spherical([r(u, v), θ(u, v), ϕ(u, v)], u = a ..b, v = c ..d)
円柱座標 (ρ, ϕ, z) で表示された 3 次元の曲面 (a ≦ u ≦ b, c ≦ v ≦ d)	plot :: cylindrical([ρ(u, v), ϕ(u, v), z(u, v)], u = a ..b, v = c ..d)

[注1)] MuPAD ではいろいろな形で表されたグラフを描くことが出来ます。$z = f(x, y)$ のグラフを描く plotfunc3d はそれ自体で，たくさんのグラフを一緒に描くことが出来ます。そのうえ，MuPAD は，違った描写法で描かれたグラフを一緒に描写することも出来ます。さらに，いろいろなオプションがあり、グラフの描写の様子を細かく指定することが出来ます。詳しくは，各節を見てください。

10.1　$z = f(x, y)$ のグラフ

$z = f(x, y)$ のグラフを，$a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ の範囲で描くのは plotfunc3d(); を次のようにしてつかいます。[注2)]

plotfunc3d(f(x, y), x = a ..b, y = c..d);

z の範囲は指定できません。2 つ以上のグラフを重ねて描きたいときは, コンマで区切るだけです。

plotfunc3d(f(x), g(x) , x = a ..b);

scene option をつけるのは，次のようにコンマで区切って指定します。2 つ以上の scene option をつけるときは, コンマで区切って指定します。

plotfunc3d(option, f(x, y), x = a ..b, y = c..d);
plotfunc3d(option1, option2, · · · , f(x, y), x = a ..b, y = c..d);

また，平面のグラフと同様に, scene option と plot option の 2 種類のオプションがあります。[注3)]

注1) 球面座標・円柱座標はあくまで参考としてあげた。また，平面のグラフと同様 plot::〜 の形のコマンドは plot(plot::〜) のように plot() と組み合わせて使う。

注2) plot::Function3d() のほうはグラフの色を変えたり，違う座標系で描かれたグラフを重ねるときに使います。後の節 (違う座標系で描かれたグラフを重ね合わせの章) で扱います。

注3) MuPAD の Help では , scene option は f(x,y) の前につけることになっていますが, 実際は plotfunc3d(f(x, y), x = a ..b, y = c..d, option); のように，後につけても大丈夫でした。また，scene option というの

10.1.1 $z = f(x, y)$ のグラフとは何か？

空間のグラフは高校ではほとんどやりませんが、試験の問題では”ひそかに”出題されています。次の問題は 1 年生の問題集にあります。

実数 x, y が独立にすべての実数値をとり変化するとき、

$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5 \qquad \cdots(*)$$

の最小値を求めよ。

【解答】

x に関し平方完成して

$$z = (x - y)^2 + y^2 - 4y + 5$$

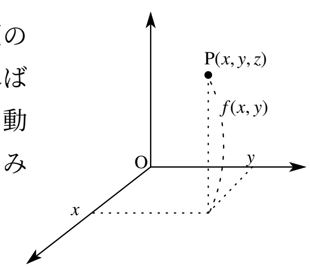
さらに y に関し平方完成して

$$z = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geqq 1$$

等号は $x = y$, かつ $y = 2$ のとき成立するので、最小値は

$$2 \qquad \cdots(答)$$

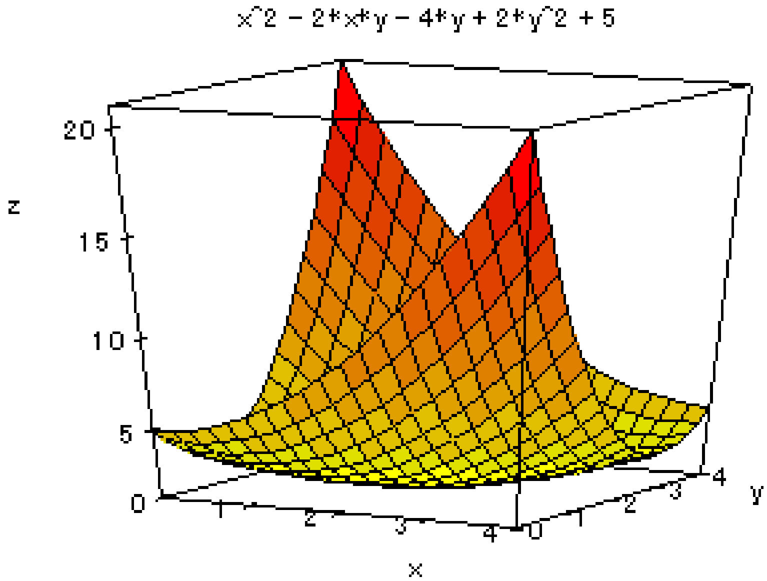
このような時,$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$ のグラフが頭にあれば問題の意味がよく解ります。一般に $z = f(x, y)$ の式が与えられたとき、x, y が決まれば $P(x, y, f(x, y))$ という点が定まり,x, y がある領域内を動くとき点 P はある曲面を動きます。では，さっそく $z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$ のグラフを描いてみましょう。



MuPAD では次のように打ちます。

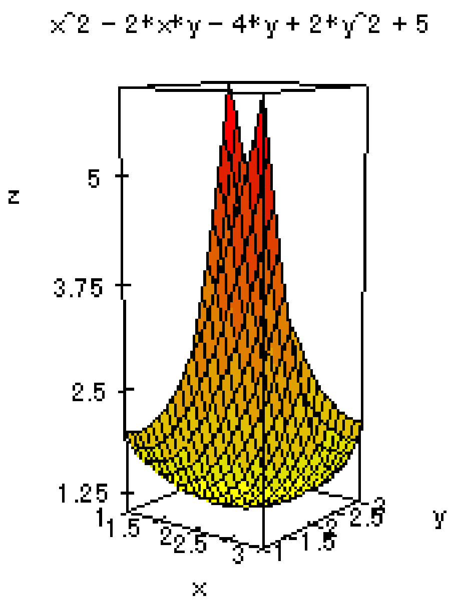
- `plotfunc3d(x ^ 2 - 2 * x * y + 2 * y ^ 2 - 4 * y + 5, x = 0..4, y = 0..4);`

は全体の描写を決めるオプションで, 主なものとしては Scaling, Ticks, BackGround, ForeGround, Axes, Arrows などあり，それぞれの値を Scaling=*Constrained*, Ticks=[20, 10, 5] のように (名前)=(値) のように指定します。しかし，Scaling=Constrained ,Ticks などぐらいしか私は使いません。plot option としては，Color(グラフの色), Grid(パラメータの刻み数) などがあります。plotfunc3d では plot option は, Grid のみ指定できます。Grid の指定は, $Grid = [n_x, n_y]$ のように,x,y 方向の両方を指定します。最初の設定 (default) では Grid=[20,20] です。オプションに関しては, 最後の節に簡単な表にしていますので, 詳しくはそちらを見てください。



ちょっと解りにくいですね。でもどうやら $x = y = 2$ の前後で z 成分が最小となるらしいので,$(x, y) = (2, 2)$ の近くを拡大してみます。拡大するには平面のときと同様，変域を制限すればいいですね。$1 \leqq x \leqq 3, 1 \leqq y \leqq 3$ に変えてみましょう。また Scaling=Constrained [注4] のオプションをつけてみました。

- `plotfunc3d(Scaling = Constrained, x ^ 2 - 2 * x * y + 2 * y ^ 2 - 4 * y + 5, x = 1..3, y = 1..3);`

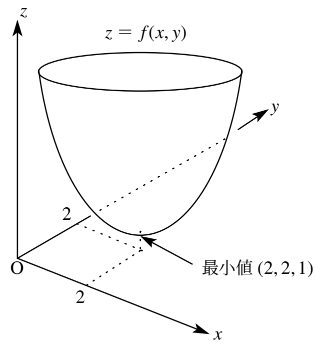


たしかに，$x = 2, y = 2$ の近くでグラフが一番低くなっているようです。このように $z = f(x, y)$ のグラフを描くと、$f(x, y)$ の最小値を目で見ることが出来ます。

[注4] このオプションをつけると座標軸の目盛りが x, y, z 軸に関し同じになります.

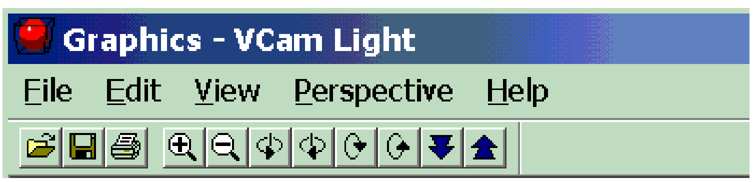
Comment

実は、本当はグラフは次のような”感じ”になります。逆釣鐘と言ったところでしょうか?

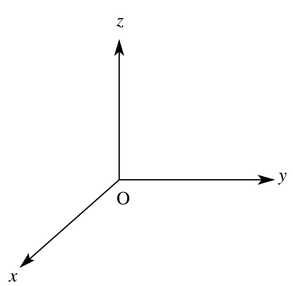


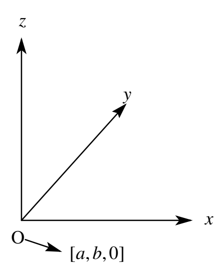
10.1.2　Vcam の見方

さて、ここで 空間のグラフの見方についてちょっと見てみましょう。MuPAD は内部で Vcam[注5)] を呼び出し Vcam の Window が開きます。(下図)



Tool Bar を使って図形を変えることが出来ます。左から 3 番目の ⊕ は図形の拡大 (Zoom In), 4 番目の ⊖ は縮小 (Zoom Out),5 番目〜8 番目の矢印と楕円マークは それぞれ矢印の方向に回転させることを表します。9,10 番目の太い矢印は視点の接近 (nearer) と離反 (farther) を表します。このときサイズは変わらず、視点のみ変わります。[注6)] はじめに表示される画面は、教科書の画面と違う視点から見ています。(x, y 軸をそれぞれ一塁・三塁方向とすると一塁側の内野席と外野席の中間から見た感じです。これに対し教科書はライト方向から見ています。教科書はイチローのファン？)





【教科書の視点】　　【MuPAD の視点 (最初)】

ただ MuPAD では見易くするため、y 軸は手前に書いてあり, 指定した変域が $x = a..b, y = c..d$ のときは原点の位置 (最も左下の点) に $(a, b, 0)$ が来ます。もちろんこれは最初の図であって回転していくと教科書の視点にすることは簡単に出来ます。

注5) virtual camera

注6) もっと細かく視点を変えたければ MuPAD の方で CameraPoint option と FocalPoint option(scene option) を使います。これらはそれぞれ [x,y,z] 座標で指定します。

10.1.3 $z = f(x, y)$ のグラフと $f(x, y)$ の最大・最小値の関係

次は数　の範囲からもう 1 つ問題を考えて見ます。今度は変域に制限のある場合です。

実数 x, y が独立に $0 \leqq x \leqq 3, 0 \leqq y \leqq 1$ の範囲を変化するとき、

$$z = xy + 3x - y + 1 \qquad \cdots (*)$$

の最大値を求めよ。

【解答】

(i) y が一定で x のみが $0 \leqq x \leqq 3$ で変化するときの z の最大値を $M(y)$ とおく。x に関し整理して

$$z = (y + 3)x - y + 1$$

ここで $y + 3 > 0$ であるから z は x に関し傾きが正の 1 次関数になる。よって z は $x = 3$ のとき最大で

$$M(y) = 3(y + 3) - y + 1 = 2y + 10$$

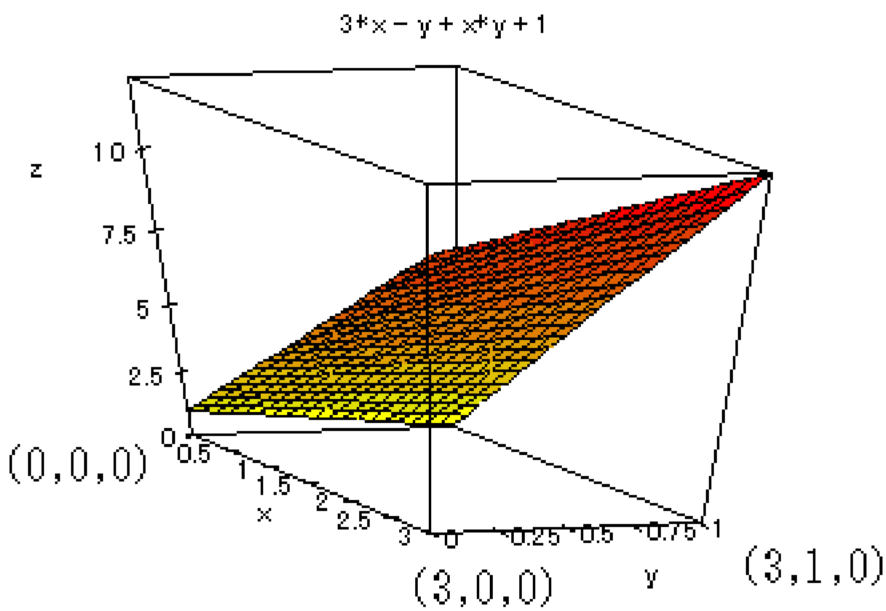
(ii) 次に, y を $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲で動かしたときの z の最大値が求める最大値である。よって $y = 1$ のとき, 最大値は

$$2 \times 1 + 10 = 12 \qquad \cdots (答)$$

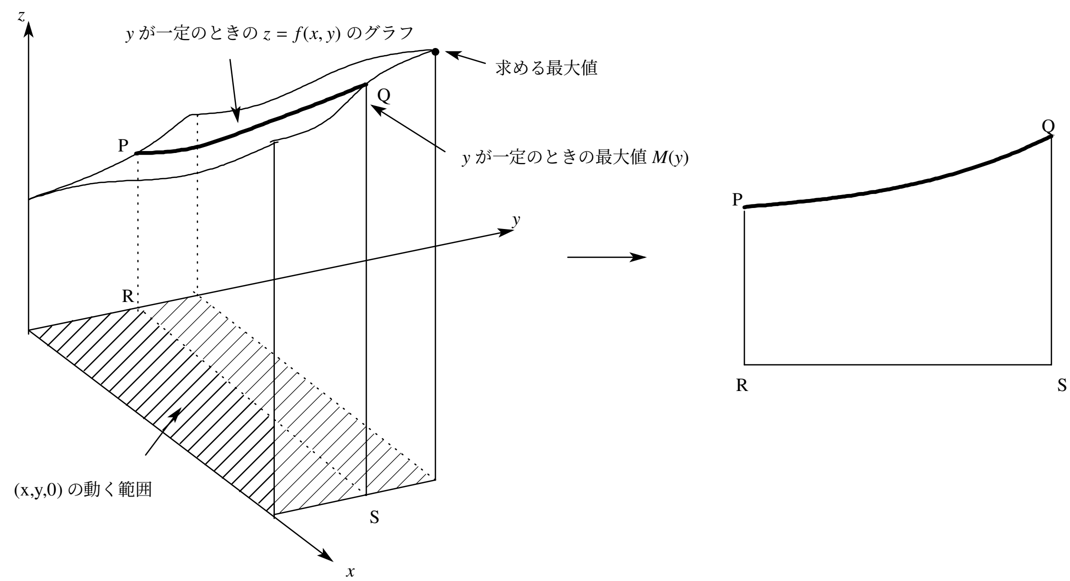
これはいったい図形的には何をやっているのでしょうか？ $z = f(x, y) = xy+3x-y+1$ $(0 \leqq x \leqq 3, 0 \leqq y \leqq 1)$ のグラフを描いてみます。

- `plotfunc3d(x * y + 3 * x - y + 1, x = 0..3, y = 0..1);`

結果は図のとうりです。何度か z 軸の周りに回転させよく解る様に座標を書き入れてみました。グラフからも $(x, y) = (3, 1)$ のときに最大値をとることは確からしいです。



では $M(y)$ の図形的な意味は何でしょうか。y が一定で x のみ変化するということは次図で点 $(x, y, f(x, y))$ が**曲線**PQ 上を動くという意味です。そのときの最大値が $M(y)$ になるわけです。今の関数のとき $z = (y+3)x - y + 1$ ですから曲線 PQ は実は右上がりの直線になり右端で最大となります。そのように求めた $M(y)$ の最大値が真の最大値というわけです。(これはよく高校野球にたとえて、予選・決勝方式といわれます。$M(y)$ が地区予選の優勝者という感じです。)



これでイメージがわいて来たでしょうか？このように 2 変数関数の最大・最小値は 3 次元のグラフのイメージを持っていると、良く意味が解るのではないでしょうか？

10.1.4　球のプロット (その 1)

最後に球 ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) を書いて見ましょう。ただ MuPAD では 3D の陰関数のグラフはかけないので z に関し解いてみましょう。z に関し解くと、$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ですから, 球の上半分を描くために，次のように入力します。

- `plotfunc3d(sqrt(1 - x^2 - y^2), x = -1..1, y = -1..1);`

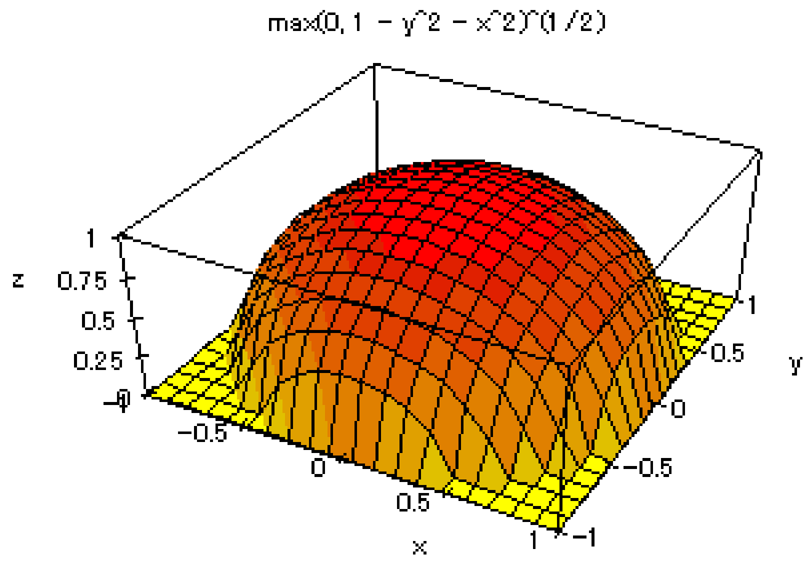
しかし

>> Error: Plot function(s) must return real numbers.
Type of the returned value is DOM_COMPLEX;
during evaluation of 'plot3d'

との表示が出ます。つまり $\sqrt{\ }$ のなかが負になってしまったのです。そこでいくつかの数の最大値を求めるコマンド max(a,b,c,$\cdots$); を使ってみます。

- `plotfunc3d(sqrt(max(0, 1 - x^2 - y^2)), x = -1..1, y = -1..1);`

すると、次の図のようになります。

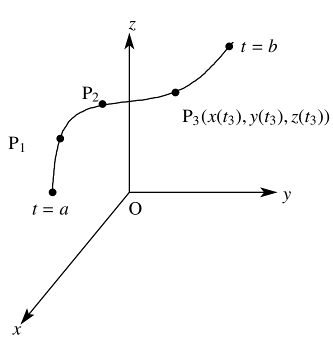


考えてみたら当たり前ですが $z = 0$ も描かれてしまいます。なかなか難しいですね。球を描くには後でやる「曲面のパラメータ表示」を使うとうまくいきます。

10.2　空間の曲線

10.2.1　空間の曲線とは何か?

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ は媒介変数表示された 3 次元の曲線 を表します。なぜなら直線上の点の空間座標は 1 つのパラメーター t の値で決まってしまうからです。また, この式の意味は t が変化するにつれ点 P $(x(t), y(t), z(t))$ も動き、それは曲線を作るという意味です。

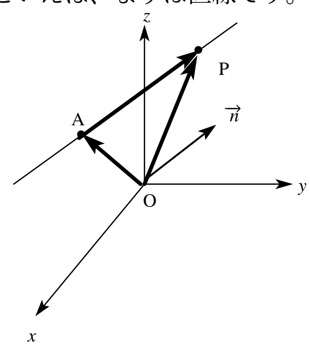


10.2.2　空間の曲線のプロット

MuPAD で曲線を描くのは plot::Curve3d を用いて，次のようにします。

- plot(
- plot :: Curve3d([x(t), y(t), z(t)], t = a ..b)
-);

平面のグラフの媒介変数表示のとき，plot::Curve2d を使いましたが, それとほとんど同じです。オプションも，2 次元のときと同様につけられます。[注7] さて皆さんが習った曲線といえば、まずは直線です。[注8]



点 A を通りベクトル $\overrightarrow{n}$ と平行な直線上の点を点 P とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}//\overrightarrow{n}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{n}$ (t は実数) とかけ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{n}$$

です。よって $\mathrm{P}(x, y, z)$,$\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$,$\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ とすると

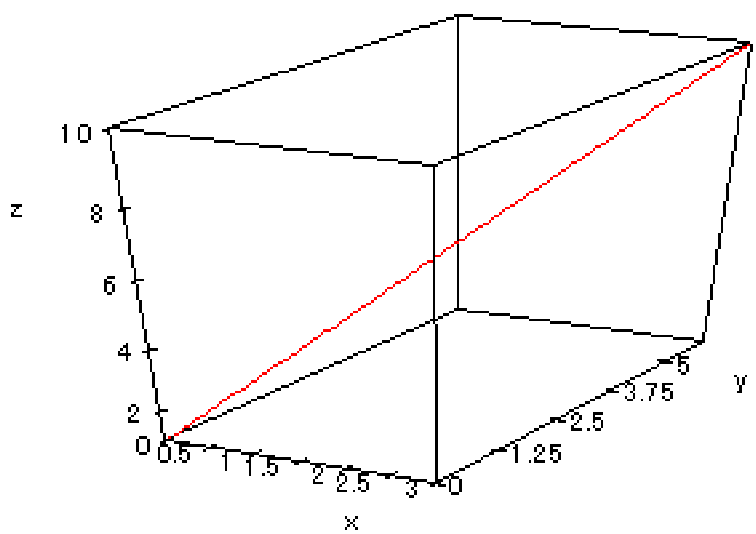
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

たしかに x, y, z 座標がパラメータ t の関数になっています。

点 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$ を通り、$\overrightarrow{n} = (1, 2, 3)$ と平行な直線を描いてみましょう。$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 2, 3) = (t, 2t, 3t + 1)$ だから次のようにします。

- plot(
- plot :: Curve3d([t, 2 ∗ t, 3 ∗ t + 1], t = 0..3)
-);

これで次のようになります。



点 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$ を通ってないように見えますが、左下の点は原点ではありません。左下の’0’ は x 軸の目盛りの’0’ を表しています。間違いやすいですね。さて次の曲線は何を表しているでしょう？

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t \ (0 \leqq t \leqq 10\pi)$$

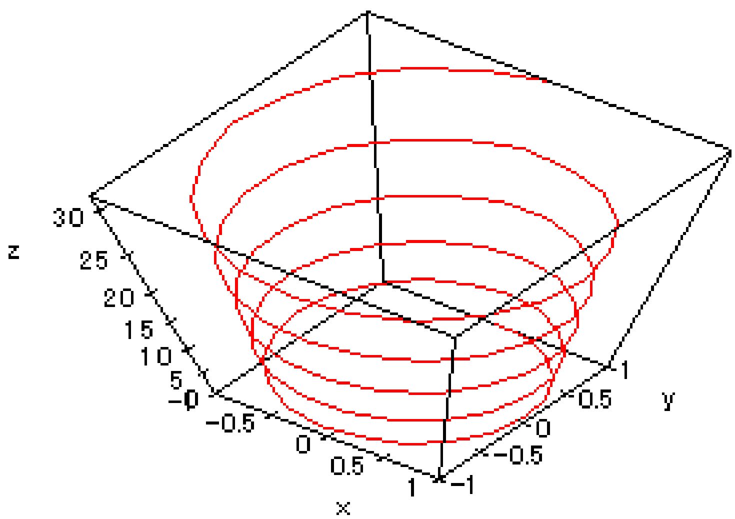
[注7] もちろん 3 行に分けて書く必要はありませんが、見やすさを考えて分けました。このように分割するときは Shift キー を押しながら Return キーを押します。

[注8] 正方形が長方形の一種であるように, 直線も曲線の一種です。

$z=0$ ならもちろん円周 $(x=\cos t, y=\sin t, z=0)$ 上を５周します。でも t が増えるにつれて z 成分も増えるのだから…そうです螺旋になるはずです。やってみましょう。

- plot(
- plot :: Curve3d([cost, sint, t], t = 0..10 * PI)
-);

少し回転させると、次のようになりました。



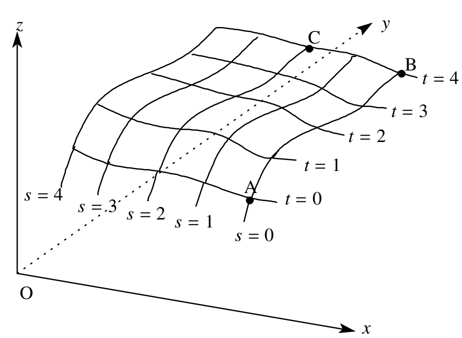
ちょっと蛇のようですね？

10.3　空間の曲面

10.3.1　曲面とは何か？

$x=f(s,t), y=g(s,t), z=h(s,t)$ $(a \leqq s \leqq b, c \leqq t \leqq d)$ は媒介変数表示された３次元の曲面を表します。なぜなら曲面上の点の位置 (曲面座標) は２つの数字の組 (s,t) で表されるからです。

例えば’ 仮に’ 図の点 A の空間座標が A(2, 3, 4) とすると $f(0,0)=2, g(0,0)=3, h(0,0)=4$ となります。同様、図の点 B, 点 C の空間座標を $B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$, とすると $[f(0,4)=x_2, g(0,4)=y_2, h(0,4)=z_2], [f(2,4)=x_3, g(2,4)=y_3, h(2,4)=z_3]$ となります。
または、”s を一定にして t のみを動かすと $P(f(s,t), g(s,t), h(s,t))$ は曲線を描き，次に t を動かすと曲線が動き曲面を作る”と考えても良いでしょう。



10.3.2 曲面のプロット

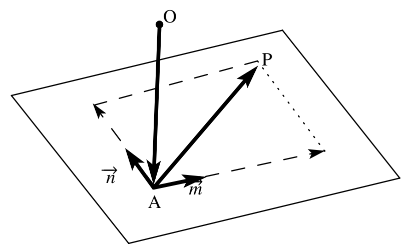
さて、MuPAD で曲面を描くのは次のようにします。

- `plot(`
- `plot::Surface3d([x(s,t), y(s,t), z(s,t)], s = a..b, t = c ..d)`
- `);`

さて皆さんが習った曲面といえば、まずは平面です。注9)

平面と平行で１次独立注10) な２つのベクトルを $\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}$, 平面上の１点を点 A, 平面上の点を点 P とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{m}$ (s, t は実数) とかけるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{m}$$



です。よって $\mathrm{P}(x, y, z), \mathrm{A}(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{n} = (n_x, n_y, n_z), \overrightarrow{m} = (m_x, m_y, m_z)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + sn_x + tm_x \\ y = y_0 + sn_y + tm_y \\ z = z_0 + sn_z + tm_z \end{cases}$$

たしかに x, y, z 座標がパラメータ s, t の関数になっています。

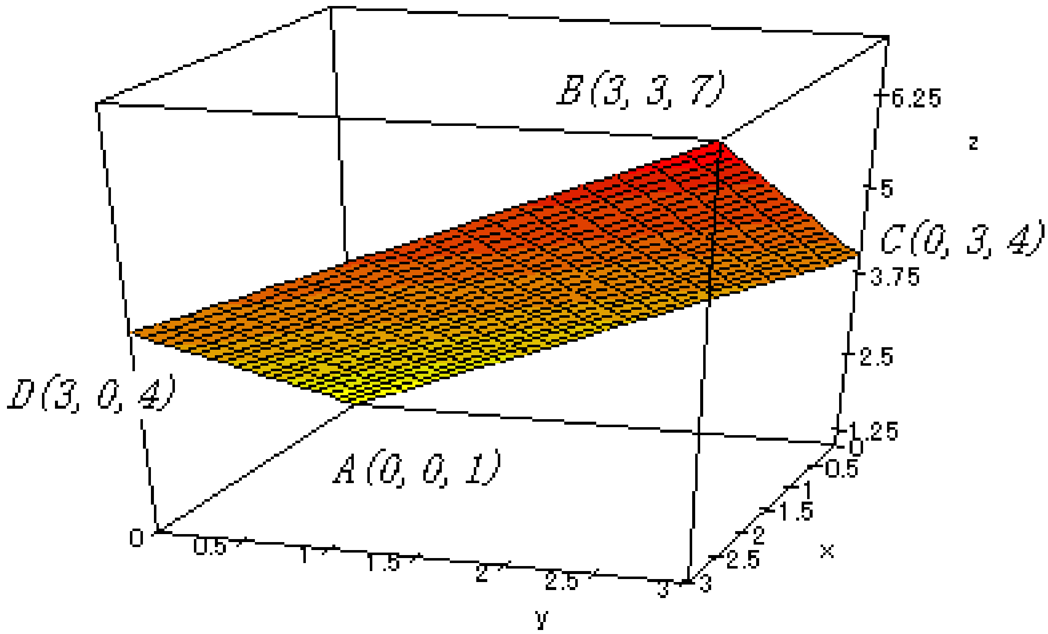
点 A(0, 0, 1) を通り、$\overrightarrow{n} = (1, 0, 1), \overrightarrow{m} = (0, 1, 1)$ と平行な平面を描いてみましょう。$(x, y, z) = (0, 0, 1) + s(1, 0, 1) + t(0, 1, 1) = (s, t, s + t + 1)$ だから次のようにすれば良いでしょう。

- `plot(`
- `plot::Surface3d([s, t, s + t + 1], s = 0..3, t = 0..3)`
- `);`

これで次のようになります。(教科書の視点と同じになるように何回か ToolBar を利用して回転させ，いくつかの点の座標も書き込んであります。)

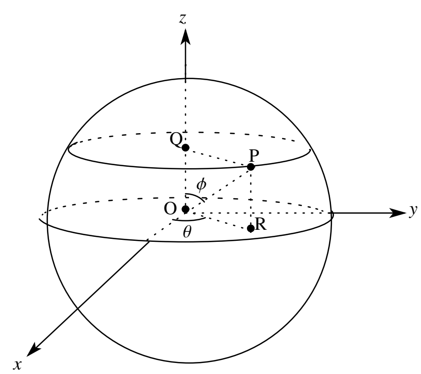
注9) 平面も曲面の一種です。

注10) $\overrightarrow{m}$, と $\overrightarrow{n}$ が１次独立というのは互いに平行でなく，またどちらも $\overrightarrow{0}$ でないという事です。１次独立でないと $\overrightarrow{m}$, と $\overrightarrow{n}$ が平行四辺形を作れません。



10.3.3　球のプロット (その 2)

さていよいよ球 $(x^2+y^2+z^2=r^2)$ のパラメータ表示をやってみましょう。これは次の図の $\theta(0 \leqq \theta < 2\pi)$, と$\phi(0 \leqq \phi \leqq \pi)$ を利用します。球面上の点 $P(x,y,z)$ から z 軸におろした垂線の足を Q, xy 平面におろした垂線の足を R とすると, OR=PQ= $r\sin\phi$, OQ= $r\cos\phi$ であるから



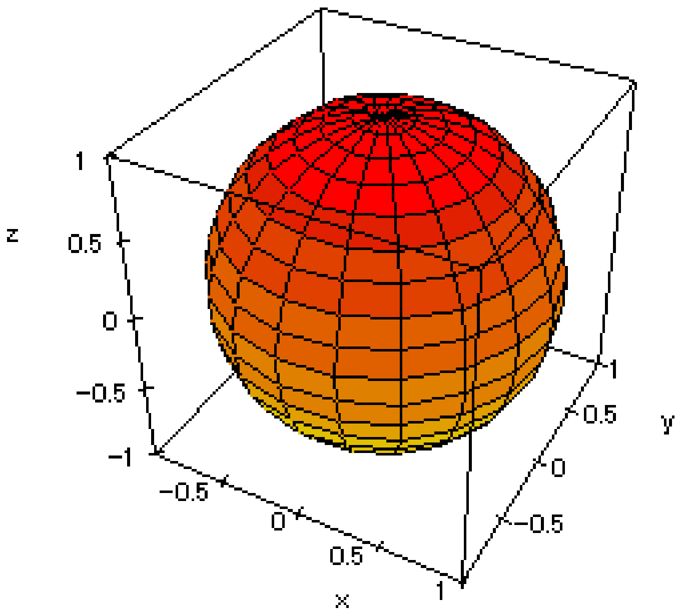
$$\begin{cases} x = OR\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta \\ y = OR\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta \\ z = OQ \qquad = r\cos\phi \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

したがって原点中心，半径 1 の球のパラメータ表示は次のようになります。

$$\begin{cases} x = \sin\phi\cos\theta \\ y = \sin\phi\sin\theta \quad (0 \leqq \phi \leqq \pi,\ 0 \leqq \theta < 2\pi) \\ z = \cos\phi \end{cases}$$

したがって，次のように入力すると良いでしょう。

- plot(Scaling = Constrained,
- plot :: Surface3d([sin u ∗ cos v, sin u ∗ sin v, cos u], u = 0..PI, v = 0..2 ∗ PI)
-);



Surface3d() を使ったとき，曲面に描かれている曲線は $u =$ 一定, $v =$ 一定 となる曲線を表しています。(∗) において $\theta =$ 一定 ということは，球の北極から南極を結ぶ線 (子午線) を表しています。また $\phi =$ 一定 ということは，北緯 95 度線のような緯線にあたります。つまり (∗) の表示は地球上の点を東経 135 度, 北緯 60 度などと表すのと同じようなものです。[注11)]

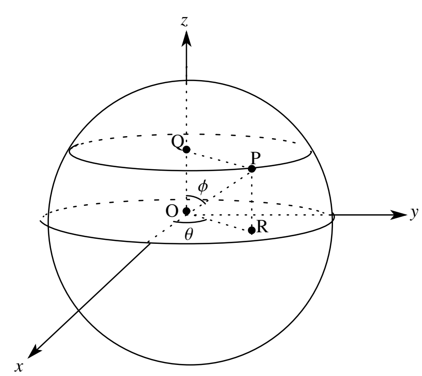
10.4 【参考】球面座標

10.4.1 球面座標とは何か？

球面座標とは前の章の球面上の点のパラメータ表示 (∗) の応用です。空間内の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$, P と原点との距離を r とすると P は原点中心, 半径 r の球上にあるといえるから

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad \cdots(**)$$

と表せますね。このとき r, θ, ϕ の組 $[r, \theta, \phi]$ を点 P の球面座標といいます。



[注12)]

点 P の球面座標 $[r, \theta, \phi]$ が u と v の関数になっているときも P の集合は曲面になります。これを MuPAD

注11) 例えば東経 135 度, 北緯 60 度の点は，ロンドンが x 軸の正の部分の真上にあるとすると，$\theta = 135°, \phi = 30°$ となります。

注12) 普通の座標と混乱しないようここでは [ ] を使ったが別に ( ) でも大丈夫。また たとえば $A(2,0,0)$ の球面座標は $[2, 0, \frac{\pi}{2}]$, $B(0,3,3)$ の球面座標は $[3\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ です。

で表示するには次のようにします。

- plot(
- plot :: spherical([r(u, v), θ(u, v), ϕ(u, v)], u = a..b, v = c ..d)
-);

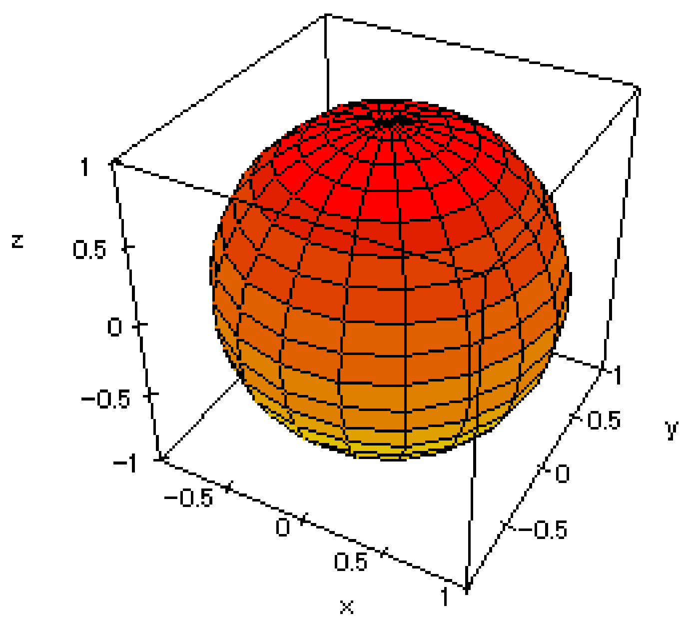
10.4.2　球のプロット (その 3)

球面座標を使うと $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点は, $r = 1, 0 \leqq \theta < 2\pi, 0 \leqq \phi \leqq \pi$. θ と ϕ は無関係なので

$$[1, \theta, \phi]\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq \phi \leqq \pi)$$

と表せる。したがって MuPAD では次のようになる。

- plot(
- plot :: spherical([1, s, t], s = 0..2 * PI, t = 0..PI)
- , Scaling = Constrained);

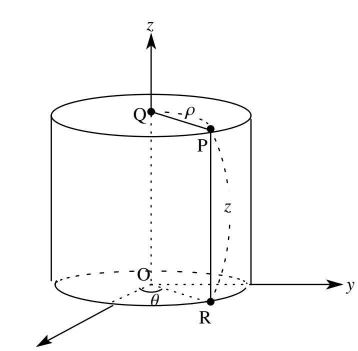


これは前に書いたのとまったく同じですね。でもこの方が楽でしょう。

10.5　【参考】円柱座標

10.5.1　円柱座標とは何か？

点 P(x, y, z) と z 軸との距離を ρ, P から z 軸におろした垂線の足を Q, xy 平面におろした垂線の足を R, OR と x 軸正方向との角を θ とすると図より



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \cdots (***)$$

このとき ρ, θ, z の組 $[\rho, \theta, z]$ を点 P の円柱座標という。円柱座標は, 数 C で習った極座標に z 成分を付け加えたものと考えると良いでしょう。[注13)]
点 P の円柱座標 $[\rho, \theta, z]$ が u と v の関数になっているときも P の集合は曲面になります。これを MuPAD で表示するには次のようにします。

- plot(
- plot :: cylindrical([ρ(u, v), θ(u, v), z(u, v)], u = a..b, v = c ..d)
-);

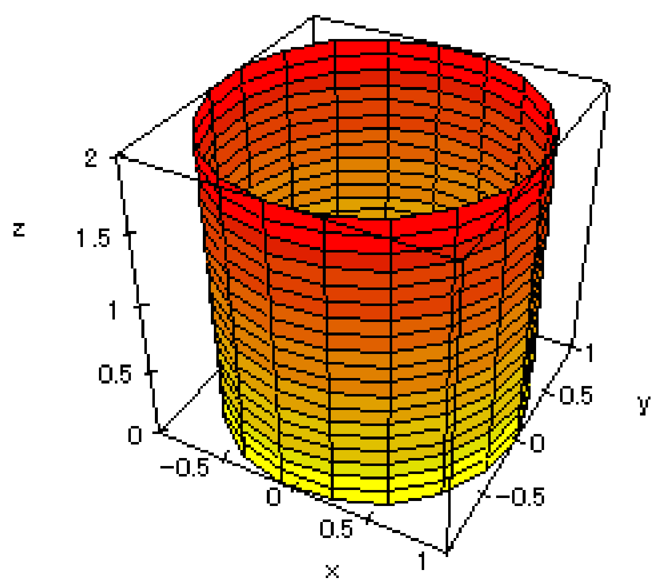
10.5.2 円柱のプロット

例えば z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱 $(x^2 + y^2 = 1, 0 \leqq z \leqq 2)$ 上の点を円柱座標で表すと $\rho = 1$, θ は任意 $(0 \leqq \theta \leqq 2)$ だから,

$$[\rho, \theta, z] = [1, \theta, z] \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq z \leqq 2)$$

となる。よって次のように入力すると良いでしょう。

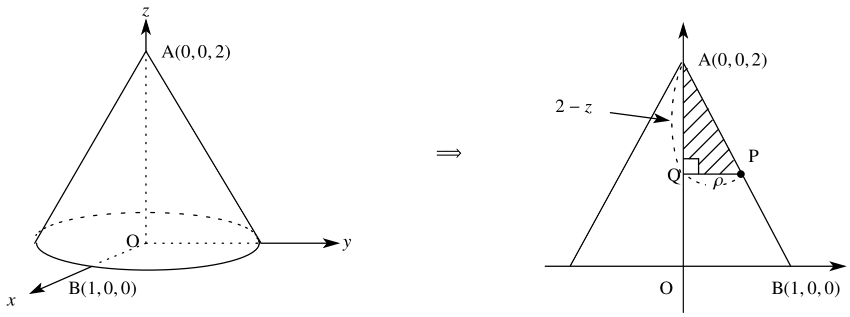
- plot(
- plot :: cylindrical([1, s, z], s = 0..2 ∗ PI, z = 0..2)
- , Scaling = Constrained);



10.5.3 円錐のプロット

円柱座標は円柱以外にも「ある軸の周りへの回転体」を図示するとき役立ちます。例えば円錐なんかですね。頂点が A(0, 0, 2), 底面が $x^2 + y^2 \leqq 1, z = 0$ である円錐の円柱座標は

注13) 普通の座標と混乱しないようここでは [ ] を使ったが別に ( ) でも大丈夫。また たとえば $A(0, 2, 1)$ の円柱座標は $[2, \frac{\pi}{2}, 1]$, $B(3, 0, 3)$ の円柱座標は $[3, 0, 3]$ です。



$\triangle$APQ $\backsim$ $\triangle$ABO より

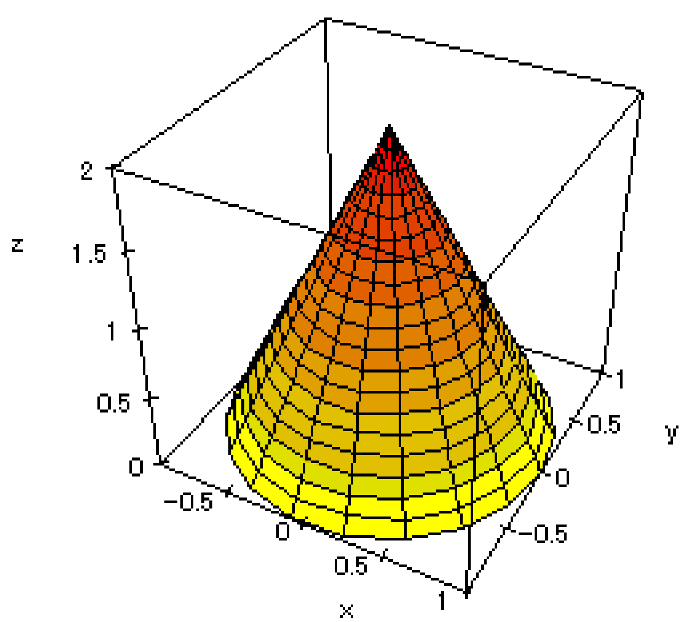
$$(2-z):\rho = 2:1 \Longleftrightarrow 2\rho = 2-z \Longleftrightarrow \rho = \frac{2-z}{2}$$

であるから

$$[\rho, \theta, z] = \left[\frac{2-z}{2}, \theta, z\right] \ (0 \leqq \theta < 2\pi, 0 \leqq z \leqq 2)$$

したがって，次のように入力します。

- `plot(`
- `plot::cylindrical([ (2 − z)/2, s, z], s = 0..2 * PI, z = 0..2)`
- `,Scaling = Constrained);`



10.6 【参考】異なった座標系で描かれたグラフの重ね合わせ

平面のグラフのプロットと同じように, Color option(plot option のひとつ) を使って個々のグラフの色を変えたり，異なった座標系で描かれたグラフを重ねて描くことが出来ます。ただし, このような時は plotfunc3d

ではなく，plot::Function3d を使います。scene option(Scaling,Ticks,Title など) や plot option(Color, Grid など) のつけ方も平面のグラフのときと同様です。

10.6.1 円柱と円柱の交線

例題

x 軸を中心軸とする半径 1 の円柱 C_1 と，z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱 C_2 の交線はどのような図形になるか？ 図示せよ。

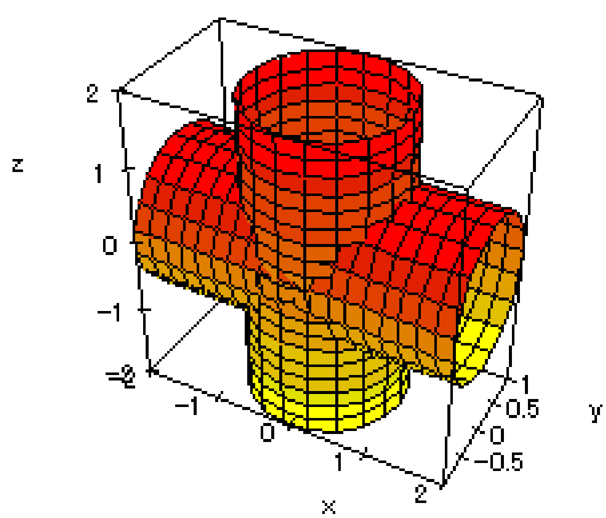
x 軸を中心軸とする半径 1 の円柱上の点は $(x,y,z) = (x,\cos\theta,\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表され，また z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱上の点は, x,y,z 座標で $(x,y,z) = (\cos\theta,\sin\theta,z)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$，または円柱座標を使って $[\rho,\theta,z] = [1,\theta,z]$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表せます。x,y,z 座標を使うときは，次のように入力します。

- plot(
- plot :: Surface3d([cos(t), sin(t), z], t = 0..2 * PI, z = −2..2),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], t = 0..2 * PI, x = −2..2)
- , Scaling = Constrained);

円柱座標を使うときは，次のように入力します。

- plot(
- plot :: cylindrical([1, s, z], s = 0..2 * PI, z = −2..2),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], t = 0..2 * PI, x = −2..2)
- , Scaling = Constrained);

いずれも，２つの立体が図のように表示されます。

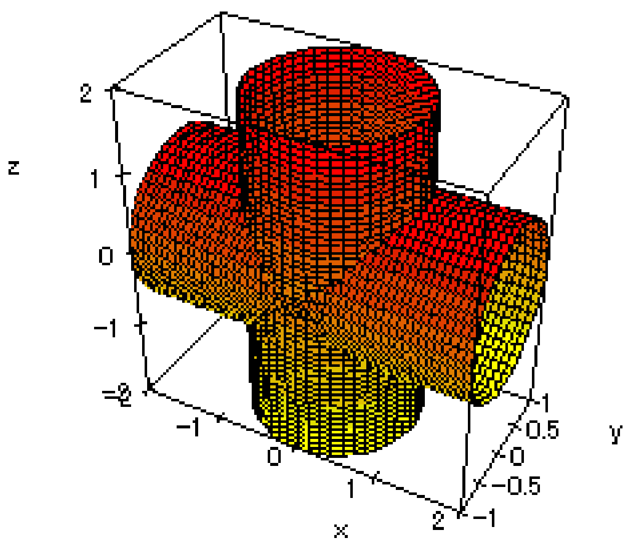


少しグラフがぎざぎざで交線が見づらいですね。このような時は, 平面のグラフでも使用した Grid option を利用します。ただ，曲面の場合は Grid= $[n_x, n_y]$ の様に x,y 方向の grid(格子) を指定します。x,y,z 座標の

場合でやってみましょう。Grid=[50,50] にします。[注14] また Grid option は plot option ですから Surface3d() の括弧の中に入れます。これに対し Scaling=Constrained は scene option なので plot() の括弧の中に入れます。平面のグラフのときと同様ですね。

- plot(
- plot :: Surface3d([cos(t), sin(t), z], t = 0..2 * PI, z = −2..2, Grid = [50, 50]),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], t = 0..2 * PI, x = −2..2, Grid = [50, 50])
- , Scaling = Constrained);

これでプロットが次のように変わります。滑らかになりました。二つの円柱の交線がよく見えます。(MuPAD の画面上ではもっときれいに見えます)



10.6.2　円錐と円柱の交線

最後に応用問題として「大学への数学」の学力コンテスト (98 年 9 月号) に採用された問題を考えて見てください。私のもとの問題はこうでした。

例題

頂点が $A(0,0,2)$, 底面が $x^2+y^2 \leqq \frac{4}{3}, z=0$ の円錐の側面と，軸が x 軸で半径 1 の円柱 $y^2+z^2=1$ の側面との交線を C とする。円柱の側面のうち C によって囲まれている部分の面積を求めよ。

読者のコメントを読んでみると,「図形の概形がわからず，ナスをくり抜いて実験した！」というものもありました。しかしナスを無駄にする必要は, ナいんでス。MuPAD を使えばいいのです。こんどは”円錐に関しては, 円柱座標” また”円柱に関しては Surface3d ” を利用して書いてみます。

[注14] Curve3d は曲線ですから Grid=500 のように表します。曲面の場合は Grid の初期値は Grid=[20,20], 曲線の場合は Grid= [50] となっています。

さて，前にやったように円錐の円柱座標は

$$[\rho, \theta, z] = \left[\frac{2-z}{\sqrt{3}}, \theta, z\right] \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq z \leqq 2)$$

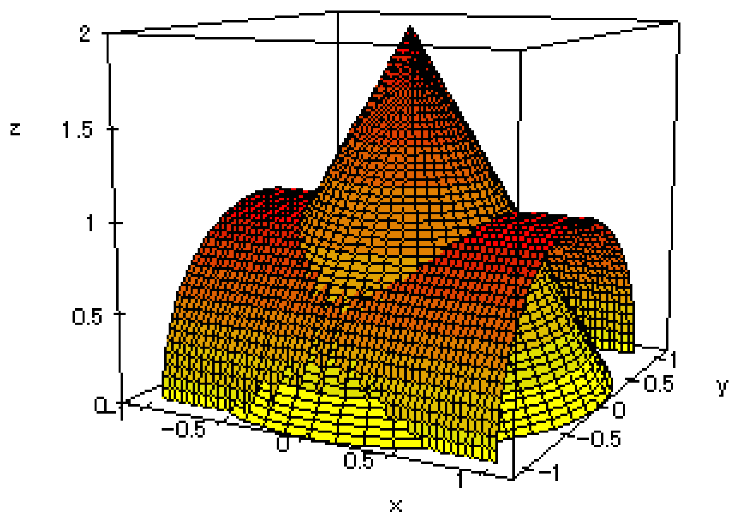
一方, 円柱の上半分 ($z \geqq 0$) の媒介変数表示は

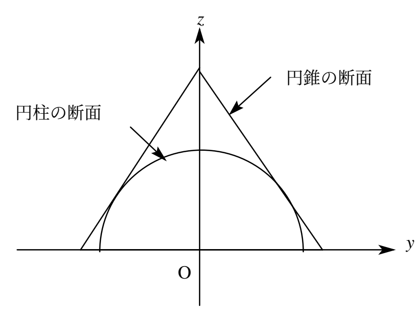
$$(x, y, z) = (x, \cos\theta, \sin\theta) \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表せます。したがって MuPAD では次のようになります。

- plot(
- plot :: cylindrical([(2 − z)/sqrt(3), s, z], s = 0..2 ∗ PI, z = 0..2, Grid = [50, 50]),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], x = −1..1, t = 0..PI, Grid = [50, 50])
- , Scaling = Constrained);

ここで Grid= [50, 50] というのはパラメータの分割数でこれが大きいほど曲面が滑らかになります。
さて次のようになりました。実は平面 $x = 0$ 上の断面図を考えると 2 つの図形は接しています。このとき以外は面積は簡単には求まりません。なお, 円錐の円柱の上側の体積，**円錐の**C によって囲まれる側面積なども求まります。





平面 $x = 0$ 上の断面図

このようにいろいろなグラフや曲面を描いてみると面白いです。他にも「円柱と四角すい」とか「円柱と平面」とかいろいろやってみてください。

10.7　【参考】オプションのリスト（一部のみ)

MuPAD のオプションは 全体のグラフに関するオプション (Scene option）と 個々のグラフ (object) に関するオプション (plot option) の２種類があり, それぞれつける位置も異なります。

1．Scene options

Option 名	値	初期値	働き
Arrows	TRUE,FALSE	FALSE	x,y,z 軸の矢印
Axes	Box,Corner,None,Origin	Origin	x,y,z 軸の表示の仕方
BackGround	[R,G,B]	RGB::White	背景色
CameraPoint	[x, y, z]	Automatic	視点の位置
FocalPoint	[x, y, z]	Automatic	焦点の位置
ForeGround	[R,G,B]	RGB::Black	前景色 (x,y,z 軸の色)
LineStyle	SolidLines,DashedLines	SolidLines	グラフの線種 (実線、点線)
Scaling	Constrained,Unconstrained	Unconstrained	両軸方向の目盛りのとり方
Ticks	Automatic,None,[n_x, n_y, n_z], n ,	Automatic	目盛り刻みの数
Title	”タイトル名”	入力した関数 (plotfunc3d のとき)	タイトル
TitlePosition	Above,Below	Above	タイトルの位置

２．plot options

Option 名	値	初期値	働き
Color	[Flat],[Flat,[R,G,B]],[Height], [Height,[R_1, G_1, B_1], [R_2, G_2, B_2]]	[Height]	各グラフの色の指定
Grid	[n] (曲線のとき) [n_1, n_2] (曲面のとき)	[100] [20,20]	パラメータの分割数
Title	”タイトル名”	” ”	各グラフのタイトル
TitlePosition	[x,y]		各タイトルの位置

色の指定は RGB 指定 [R,G,B] かまたはカラー変数を用いて指定する。カラー変数は RGB::Black, RGB::White, RGB::Green, RGB::Red, RGB::Blue, RGB::Yellow, RGB::Gray, RGB::Magenta, RGB::Olive, RGB::LightGray, RGB::OliveGreenDark(どんな色じゃ？) など ”色々”ある。

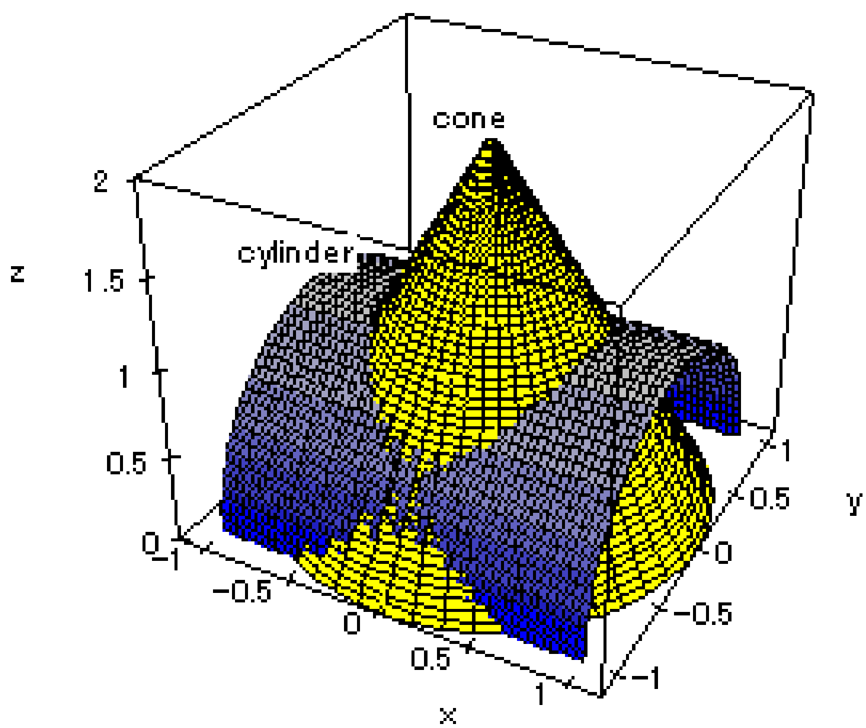
option に関し，さらに詳しいことは,BrouseManual で「scene option」 と 「plot option 」の項を見てください。[注15)]

注15)　同じ Title option でも plot option の Title option の方は, 個々のグラフにつけられるが (すなわちグラフの数だけつけられるが), scene option の Title option は全体に一個つけられるだけです。

【例】さて前の節で描いたグラフを**円錐はフラットの黄色**で，**円柱は青から灰色まで高さによって色を変えながら**描いてみる。また**それぞれのグラフにもタイトルをつけ, Grid=[50,50] にする**と次のようになる。Scene option と plot option の位置の違いにも注意してください。

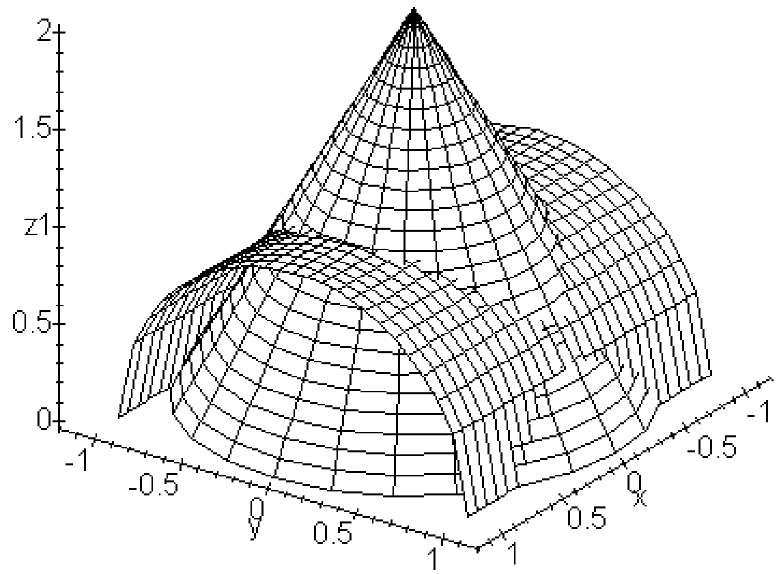
- plot(
- plot :: cylindrical([(2 − z)/sqrt(3), s, z], s = 0..2 ∗ PI, z = 0..2
  , Grid = [50, 50], Color = [Flat, RGB :: Yellow], TitlePosition = [5, 2], Title = ”cone”),
  ··· plot options
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], x = −1..1, t = 0..PI
  , Grid = [50, 50], Color = [Height, RGB :: Blue, RGB :: Gray],
  TitlePosition = [3.2, 4], Title = ”cylinder”) ··· plot options
- , Scaling = Constrained); ··· scene option

これで次のグラフになる。



10.8 【参考】MuPAD と Maple のグラフ描写

Maple は Mathematica と並び数学ソフトの代表的なものです。以前，Maple を使っていた私は，同じ図形を Maple でも描かせた事があります。次の図は，Maple で同じ図形を描いたものです。



円錐と, 円柱の交線の辺りを見てください。Maple の方が, 細かい点がきれいに描けています。MuPAD で Grid を大きくしても, 残念ながら同じにはなりません。その他にも，Maple では描かせた図形をマウスでドラッグして簡単に回転させたり, 上下・左右に拡大縮小することが出来ます。これは，MuPAD にはない大きなメリットです。

MuPAD は，Maple とほぼ並ぶ性能を持っていますが，グラフに関しては，Maple に一歩譲るみたいです。まあ，これは値段差（Maple−18 万 1 千円, MuPAD−0 円) を考えれば，仕方ないのかもしれません。もしお金持ちになれば，Maple も使ってみてください。MuPAD と Maple の操作方法は非常に似ているので，MuPAD が使えるようになったら，Maple はすぐ使えます。