目次

3　整式の方程式，不等式

方程式 $f=0$ を x に関し解く	solve(f=0,x)
不等式 $f>0$ を x に関し解く	solve(f>0,x)
連立方程式 $f=0, g=0$ を x,y に関し解く	solve({f=0,g=0},{x,y})
連立不等式 $f>0, g>0$ を x,y に関し解く	solve({f>0,g>0},{x,y})
解の小数近似 (解が $x=\cdots$ の形で求まっている時)	float( )
解の小数近似 (RootOf の形でしか求まっていない時)	map(,float)

$a>b$	a>b
$a<b$	a<b
$a \geqq b$	a>=b
$a \leqq b$	a<=b
$a \neq b$	a<>b

注1)

3.1　一元方程式

方程式の解を求める事が出来ます。solve(方程式, 未知数の指定); のように書きます。例を見て見ましょう。

$x^2-3x+2=0$ の解は?

- solve(x ^ 2 − 3 ∗ x + 2 = 0, x);　　　>> $\{1,2\}$

$x^2-3x+1=0$ を x に関して解くと解が $\{1,2\}$ ということです。ここで, { } は集合を表す記号です。注2)
根号が出てくるような方程式も解けます。ただし、$\sqrt{a}$ は $a^{\frac{1}{2}}$ のように出力されます。

$2x^2-5x+1=0$ の解は?

- solve(2 ∗ x ^ 2 − 5 ∗ x + 1 = 0, x) ;　　　>> $\left\{5/4-\frac{17^{\frac{1}{2}}}{4}, 5/4+\frac{17^{\frac{1}{2}}}{4}\right\}$

虚数解も出せます。虚数単位は I と示されます。$2x^2+3x+4=0$ の解は?

- solve(2 ∗ x ^ 2 + 3 ∗ x + 4 = 0, x) ;　　　>> $\left\{-\frac{1}{4}\, I\, 23^{\frac{1}{2}}-3/4, \frac{1}{4}\, I\, 23^{\frac{1}{2}}-3/4\right\}$

上の答えはそれぞれ学校では、$\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}, \frac{-3\pm\sqrt{23}i}{4}$ と書かれます。確かにちょっと答えは見づらいですね。

x と書くのが面倒ですか？実は 1 変数のときは、未知数の指定は省略できます。

$x^2-3x+2=0$ の解は?

- solve(x ^ 2 − 3 ∗ x + 2 = 0);　　　>> $\{[x=1],[x=2]\}$

注1) 3 変数以上の場合も同様。変数の指定は省略できることが多い。default では, solve(f(x),x) は平方根と虚数単位 i を使って表せる解以外は RootOf(f) の形で表す。これを n 乗根 ($n \geqq 3$) を使った解が欲しいときは，solve(f, MaxDegree=n) のように MaxDegree(最大次数) を指定する。なお，solve は三角方程式など他の方程式・不等式も解ける。(三角関数・指数対数の章参照)

注2) 解は「$x=1$ または $x=2$」で $x=1$ と $x=2$ の順序は関係ない (組み合わせ) ですね。こういう時に { } 記号を使います。これに対し順列の場合は [ ] を使います。

しかし２つ以上の変数があるときは、当然ながら省略できません。例えば，$2x+y=1$ を x に関し解くには?

- solve(x + 2 * y = 1, x) ; 　　　　>> $\{1-2y\}$

$2x+y=1$ を y に関し解くには?

- solve(x + 2 * y = 1, y) ; 　　　　>> $\left\{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right\}$

このようにそれぞれの文字に関し解かれます。

３次以上の方程式も同様に解けます。$x^4-x^3-2x^2+x+1=0$ の解は?

- solve(x ^ 4 − x ^ 3 − 2 * x ^ 2 + x + 1 = 0, x) ; 　　　　>> $\left\{-1, 1, \frac{1}{2}-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{1}{2}\right\}$

学校では, 因数定理を使って解きますね。$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$ とおくと,

$$f(1)=1-1-2+1+1=0,\ f(-1)=1+1-2-1+1=0$$

よって，$f(x)$ は $(x-1)$ と $(x+1)$ を因数にもつ。$f(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割って,

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-1)$$

ゆえに，$f(x)=0$ とおくと

$$x=\pm1,\ \text{または},\ x^2-x-1=0 \Longleftrightarrow x=\pm1,\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

とやればよかったですね。$5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ ですから確かに結果は一致します。

3.2　一元不等式

不等式も, 方程式と同じように解けます。ただ，≦, ≧ などはキーボードにないので <=, >= のように入力します。[注3)]

$x^2-3x+2<0$ の解は?

- solve(x ^ 2 − 3 * x + 2 < 0, x); 　　　　>>]1, 2[

$x^2-3x+2 \leqq 0$ の解は?

- solve(x ^ 2 − 3 * x + 2 <= 0, x); 　　　　>> [1, 2]

ここで，]1,2[は $1<x<2$,[1,2] は $1\leqq x\leqq 2$ を表します。[注4)]

区間が無限に広い場合は infinitity(∞) と, −infinity(−∞) を使って示されます。

注3)　まちがって =< のように入力するとエラーがでます。「大切なものを先に書く」と覚えておくと良いでしょう。

注4)　]1,2[のように書いてあると，[1,2] ($1\leqq x\leqq 2$) より区間が少し狭い感じがしますね？

$x^2 > 4$ の解は?

• `solve(x ^ 2 > 4, x);`
x in]-infinity, -2[union]2, infinity[

union というのは和集合の意味です。ですから，$-\infty < x < -2$ または $2 < x < \infty$ ということです。ちょっと見づらいですね。

方程式では, 虚数解も自動的に出ましたが, 不等式では変数は実数に制限されます。

$x^2 + 1 < 0$ の解は?

• `solve(x ^ 2 + 1 < 0, x);` >> { }

これは空集合を表していて, 解なしということです。注5) しかし，等号を含んだ不等式に関しては，MuPAD は間違いを犯します。

$x^2 - 2x + 1 \leqq 0$ の解は?

• `solve(x ^ 2 - 2 * x + 1 <= 0, x);` >> { }

$x^2 - 2x + 1 \leqq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 \leqq 0$ ですから, 正解は $x = 1$ のはずです。しかし MuPAD は' 解なし' といいます。このように **MuPAD も間違いを犯すので, 自分で結果を確かめることが絶対必要**です。

3.3 連立方程式

連立方程式も, 同様に解くことが出来ます。方程式をまとめて { } の中に入れるだけです。注6)

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ の解は?

• `solve({x + y = 2, x - y = 0});` >> {[x = 1, y = 1]}

$\begin{cases} x + y + z = 2 & \cdots ① \\ x^2 + y^2 + y^2 = 14 & \cdots ② \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 & \cdots ③ \end{cases}$ の解は?

• `solve({x + y + z = 2, x ^ 2 + y ^ 2 + z ^ 2 = 14, x ^ 3 + y ^ 3 + z ^ 3 = 20});`
>> {[x = 1, y = −2, z = 3], [x = 1, y = 3, z = −2], [x = −2, y = 1, z = 3],
[x = −2, y = 3, z = 1], [x = 3, y = 1, z = −2], [x = 3, y = −2, z = 1]}

注5) 例えば，$(2i)^2 + 1 = -4 + 1 < 0$ なので $x = 2i$ なども解のはずですが, 実数解しか MuPAD は出しません。
注6) { } は集合を表します。

実際，$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ だから，①,② より，

$$2^2=14+2(xy+yz+zx) \iff xy+yz+zx=-5 \qquad \cdots ④$$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ だから①,②,③,④ より，

$$20-3xyz=2\cdot\{14-(-5)\} \iff xyz=-6 \qquad \cdots ⑤$$

①, ④, ⑤より x, y, z を解に持つ方程式は

$$t^3-2t^2-5t+6=0 \iff (t-1)(t-3)(t+2)=0 \iff t=1,3,-2$$

よって方程式の解の集合は

$$\{x,y,z\}=\{1,3,-2\}$$

確かに, 一致する。もう一問やってみましょう。

例題

相異なる実数 x, y が

$$\begin{cases} x^3-y^2 &= 4x-1 \qquad \cdots ① \\ y^3-x^2 &= 4y-1 \qquad \cdots ② \end{cases}$$

をみたしている。

(1) $x^2+xy+y^2+x+y=4$ であることを示せ。

(2) x, y の値を求めよ。

まずは，学校で解くように解いて見ましょう。対称性を利用します。

【解答】

(1)① − ② より

$$(x^3-y^3)+(x^2-y^2)=4(x-y) \iff (x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)=4(x-y)$$

$x-y \neq 0$ だから

$$x^2+xy+y^2+x+y=4 \qquad 【証明終】$$

(2) $x+y=u,\ xy=v$ とおくと，(1) より

$$(u^2-v)+u=4 \iff v=u^2+u-4 \qquad \cdots ③$$

① + ② より

$$\begin{aligned} &x^3+y^3-(x^2+y^2)=4(x+y)-2 \\ \iff &(x+y)^3-3xy(x+y)-\left\{(x+y)^2-2xy\right\}=4(x+y)-2 \\ \iff &u^3-3uv-(u^2-2v)=4u-2 \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

③,④ より

$$\begin{aligned} u^3-3u(u^2+u-4)-u^2+2(u^2+u-4)-4u+2=0 &\iff u^3+u^2-5u+3=0 \\ &\iff (u-1)^2(u+3)=0 \\ &\iff u=1, u=-3 \end{aligned}$$

③ より u, v の値は

$$(u, v) = (1, -2) \text{ または } (-3, 2) \qquad \cdots ⑤$$

(i) $(u, v) = (1, -2) \Longleftrightarrow x + y = 1, xy = -2$ のとき,

$$(x, y) = (2, -1),\ (-1, 2)$$

(i) $(u, v) = (-3, 2) \Longleftrightarrow x + y = -3, xy = 2$ のとき,

$$(x, y) = (-2, -1),\ (-1, -2)$$

以上から求める解は

$$(x, y) = (2, -1), (-1, 2), (-2, -1), (-1, -2) \qquad \cdots (\text{答})$$

次はこれを MuPAD で解いてみます。

$$\begin{cases} x^3 - y^2 & = 4x - 1 \cdots ① \\ y^3 - x^2 & = 4y - 1 \cdots ② \end{cases} \quad \text{の解は?}$$

- solve({x ^ 3 − y ^ 2 = 4 ∗ x − 1, y ^ 3 − x ^ 2 = 4 ∗ y − 1});

\>> $\{[x = -1, y = -2], [x = -1, y = 2], [x = -2, y = -1], [x = 2, y = -1],$

$[x = y, y = \text{RootOf}(\ \text{X28})^3 - (\text{X28})^2 - 4(\text{X28}) + 1, \text{X28})]\}$

注7)

3.4 【参考】RootOf と MaxDegree

ここで RootOf(f,x) というのは x が f=0 の解 である事を表しています。すなわち, $x = y$, かつ, y が 3 次方程式; $y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ の解であるというのと同じです。実際，もし $x = y$ とすると, ① より $y^3 - y^2 = 4y - 1 \Longleftrightarrow y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ となります。MuPAD は，特に指定しなければ，平方根と虚数単位 i を使って表せる解以外は Roofof( ) の形で表示します。もし，n 乗根 ($n \geqq 3$) まで使った解が欲しいときは，solve(f,MaxDegree=n) のように MaxDegree=n というオプションを指定します。$y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ の 3 乗根まで使った解を求めてみましょう。

- solve(y ^ 3 − y ^ 2 − 4 ∗ y + 1 = 0, y, MaxDegree = 3);　　　>> 超長〜い解

結果はでましたが, 長すぎて書ききれません。別の 3 次方程式でやってみます。$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$ を解いてみます。

- solve(x ^ 3+3*x ^ 2+9*x+5=0,MaxDegree=3);

$$>> x = 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2} - 1, x = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4} - \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2} - 1 - \frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}} + \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right),$$

$$x = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4} - \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2} - 1 + \frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}} + \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right)$$

確かに実数解が１つと, 互いに共役な複素数が２つでました。４次までは解の公式があるので, このように累乗根を使えば解は求まります。３次, ４次方程式の解の公式は，超なが〜いのでここでは省略します。

注7) (X28) の括弧は, 解りやすくするために，私が入れました。(X28) というのは MuPAD が勝手に振ってくる変数名です。多分, その日,28 番目に MuPAD が利用した変数なのでしょう。

3.5　【参考】解の小数近似

先のように，超なが〜い解が出てきた時は, 小数近似をすると解の見当がつきます。解の近似値を求めるには, 解が求まっているときは float( ) を，RootOf() の形でしか求まっていないときは, map(,float) を使います。[注8)] 先の方程式;$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$ の近似解を求めてみます。

- solve(x ^ +3*x ^ 2+9*x+5=0,MaxDegree=3);

$$>> x = 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4\frac{2}{3}}{2} - 1, x = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4} - \frac{4\frac{1}{3}}{2} - 1 - \frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}} + \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right),$$
$$x = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4} - \frac{4\frac{1}{3}}{2} - 1 + \frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}} + \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right)$$

この例では，曲がりなりにも $x = \sim$ の形で解が求まっています。このような時は,float で大丈夫です。

- float(%);

$>> \{[x = -0.6725199979], [x = -1.163740001 - 2.465853273I], [x = -1.163740001 + 2.465853273I]\}$

先ほどの $y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ の解はどうでしょうか？

- solve(y ^ 3 − y ^ 2 − 4 ∗ y + 1 = 0);　　$>>$ y in RootOf$((X9)^3 - (X9)^2 - 4(X9) + 1, X9)$

このような時は，map を使います。

- map(%, float);　　>> y in $\{-1.699628148, 0.2391232783, 2.46050487\}$

３つとも，実数解でした。

3.6　【参考】解の範囲の指定

solve() は，虚数解も求めます。もし，実数解のみが欲しいときは，assume( ) を使って，
assume(x,Type::Real) のように指定します。[注9)]

$x^2 + 1 = 0$ の実数解は?

- assume(x, Type :: Real) : • solve(x ^ 2 + 1 = 1) ;　　>> { }

これは空集合，すなわち' 解なし' を表します。$x^2 = -1$ の解は $x = \pm i$ ですから，実数解はありません。実数指定をはずすと, どうなるでしょう？ x のタイプをはずすには,delete(x) のようにします。

- delete(x) : • solve(x ^ 2 + 1 = 1) ;　　$>> \{[x = -\mathrm{I}, x = \mathrm{I}]\}$

今度は，虚数解もでました。

注8)　maps([x,y,· · ·], コマンド) は,[x,y,· · ·] というリストに同じコマンドを作用させる。例えば，• maps([4,9,5],sqrt);>>[2,3,$5^{\frac{1}{2}}$] となる。この map() は, 集合 { } やリスト [ ] に対し使われる。また，float() は，小数近似を求めるコマンド (第１章参照)

注9)　assume(x,Type::Real) は"x を実数タイプの変数と仮定せよ"という意味です。実数以外にも, いろいろなタイプ指定が出来ます。(文字式の章参照)