目次

4 数列 2

4.1 数列の一般項 2

4.2 数列の和 2

4.3 漸化式 3

4.3.1 ２項間漸化式 3

4.3.2 ３項間漸化式 5

4.3.3 連立漸化式 6

4　数列

コマンド	意味
$\texttt{sum}(a(k), k = 1..n)$	$\sum_{k=1}^{n} a_k$
$\texttt{rec}$(漸化式, $a(n)$, 初期条件)	漸化式の定義
$\texttt{solve}(\texttt{rec}$(漸化式, $a(n)$, 初期条件))	漸化式の解

注1)

4.1　数列の一般項

MuPAD では, 例えば, $\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$ の一般項を求めるとか，初項 1 , 公差 2 の等差数列の一般項を求めるとかいうコマンドはありません。一般項が解っているときに，第 n 項を求めるのは簡単です。文字式の章で述べた関数の定義を使えば良いです。[注2)]

4.2　数列の和

一般項 a_k が求まっているとき, n 項までの和; $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めるには, sum(a_k,k=1..n) のようにします。

$\sum_{k=1}^{3} k^2$?　　• $\texttt{sum(k ^ 2, k = 1..3);}$　　>> 14

確かに，$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$ ですね。次は n 項までの和を求めてみましょう。

$\sum_{k=1}^{n} k^2$?　　• $\texttt{sum(k ^ 2, k = 1..n);}$　　$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$

教科書と同じような形にするのは、因数分解すれば良いですね。続けて，factor( ) を使います。

• $\texttt{factor(\%);}$　　>> $1/6\, n(n + 1)(2n + 1)$

sum() で使う変数は k 以外の文字でも大丈夫です。今度は等比数列でやってみましょう。

$\sum_{i=1}^{n} 2^i$　　• $\texttt{sum(2 ^ i, i = 1..n)}$　　>> $2\,2^n - 2$

注1)　sum は和を意味します。rec は recursion formula(漸化式) の略です。recur というのは' 再び起こる（再帰する)' という意味です。直訳すると，' 再帰方程式' となります。

注2)　$a_n = 2n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と解っているとき，a_{10} を求めるには, 次のようにします。

$\{a_n\}$ に suretu_a という名前をつけて定義します。

• suretu_a := n− > 2 ∗ n − 1;　　>> $n \longrightarrow 2n - 1$

n に 10 を代入します。関数として定義したので代入は楽ですね。

• suretu_a(10);　　>> 19

実際

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 2$$

ですね。分数式の和も求まります。$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ を求めてみましょう。[注3)]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$は?

- $\mathtt{sum(1/(k*(k+1)),k=1..n)}$ >> $\dfrac{n}{n+1}$

確かめてみましょう。$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ から

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

分数式の和は 差の形に書き直すのでした。[注4)]

4.3 漸化式

$\{a_n\}$ の漸化式は, rec(漸化式,a(n), 初期条件) のようにします。ここで初期条件というのは $a_1 = 3, a_2 = 5$ などというやつです。真ん中の a(n) は省略できないので注意してください。[注5)]

4.3.1 2項間漸化式

注3) 入力のとき，1/k(k+1) としないでください。k(k+1) 全体で割るので，括弧が必要です。または，1/k/(k+1) としても大丈夫です。

注4)

詳しく言うと，$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ のとき,$f(k) = \frac{1}{k}$ とおくと $a_k = f(k) - f(k+1)$ とかける。このとき，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \{f(k) - f(k+1)\} \\
&= \{f(1) - f(2)\} + \{f(2) - f(3)\} + \{f(3) - f(4)\} + \cdots + \{f(n) - f(n+1)\} \\
&= f(1) - f(n+1)
\end{aligned}$$

と簡単になります。 このように $a_k = f(k) - f(k+1), a_k = f(k) - f(k+2)$ など の形に書き直せなければ，(高校の範囲では) 有限個の和は求まりません。例えば, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ は，高校で使っている関数の範囲では表せません。

注5) 初項を省略すると, 一般解 (任意定数 C を含んだ解) がでます。また初項に文字を使ったり、a_0 を初項にすることも出来ます。漸化式は, a(n+1)=2*a(n),a(n)=2*a(n-1), はたまた a(n+2)=2*a(n+1) のように書いても良いですが，真ん中の a(n) を a(n+1) などと書くことは出来ません。n の代わりに k,i など他の文字を使っても大丈夫です。

例えば，(1) $a_{n+1}=2a_n, a_1=3$ は次のように定義します。

- `rec(a(n+1)=2*a(n),a(n),a(1)=3);` >> $-2a(n)+a(n+1), a(n), \{a(1)=3\}$

出力の意味は $-2a_n+a_{n+1}=0, a_1=3$ で定義される数列 $\{a_n\}$ ということです。このように (左辺)= 0 の形で出力されます。この漸化式を解くときは, 続けて solve( ) を使います。

- `solve(%);` >> $\left\{\dfrac{3\ 2^n}{2}\right\}$

または一度に次のように入力します。

- `solve (rec(a(n+1)=2*a(n),a(n),a(1)=3));` >> $\left\{\dfrac{3\ 2^n}{2}\right\}$

実際，$a_{n+1}=2a_n, a_1=3,$ は初項 3, 公比 2 の等比数列だから $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ です。約分すると同じになってますね。

(2) 今度は階差型の漸化式 $a_{n+1}=a_n+2n, a_1=1$ を解いて見ましょう。

- $\texttt{solve(rec(a(n+1) = a(n) + 2 * n, a(n), a(1) = 1));}$ >> $\{n^2-n+1\}$

実際、$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると $b_k=2k$ ですから

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+n(n-1)=n^2-n+1$$

となります。

(3) 今度は一次式型；$a_{n+1}=pa_n+q$ (p,q 定数) の漸化式; $a_{n+1}=2a_n+1, a_1=1$ を解いて見ましょう。

- $\texttt{solve(a(n + 1) = 2 * a(n) + 1, a(n), a(1) = 1);}$ >> $\{2^n-1\}$

実際，$\alpha=2\alpha+1$ の解は $\alpha=-1$ ですから, 漸化式の両辺から (-1) を引いて,

$$a_{n+1}=2a_n+1 \Longleftrightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

ゆえに，$\{a_n+1\}$ は, 初項 $a_1+1=2$, 公比 2 の等比数列となるので

$$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$
$$\therefore\ a_n=2^n-1$$

となり一致します。

(4) 今度は，分数漸化式; $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+3}$, $a_1=1$ を解いて見ましょう。

- $\texttt{rec(a(n + 1) = a(n)/(a(n) + 3), a(n), a(1) = 1) :}$ • `solve(%);`

>> $\text{solve}\left(\text{rec}\left(a(n+1)-\dfrac{a(n)}{a(n)+3}, a(n), \{a(1)=1\}\right)\right)$

ぜんぜん簡単になっていませんね。これは MuPAD が解けないということを示しています。どうも，MuPAD は分数漸化式が解けないみたいです。これは行列の n 乗が出来ないことと関係があるのでしょう。[注6] さて, これを解いてみましょう。

$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+3}$ の逆数をとって,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n+3}{a_n} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{a_n}$$

そこで $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと,

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$

これは 1 次式型ですから，$\alpha = 3\alpha + 1$ の解 $\alpha = -\frac{1}{2}$ を両辺から引くと

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$$

よって $\{b_n + \frac{1}{2}\}$ は初項 $b_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 公比 3 の等比数列となるので

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

ゆえに

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3^n - 1} \qquad \cdots(\text{答})$$

MuPAD に解けなくても, 我々は解けました。我々も捨てたものではないですね。

4.3.2 3 項間漸化式

MuPAD は,3 項間漸化式; $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ (p, q 定数) は解けます。

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ を解いてみましょう。このとき $\{\mathrm{a(1) = 1, a(2) = 2}\}$ というようにまとめるのを忘れないでください。

- $\mathtt{rec}(\mathrm{a(n+2) - 3 * a(n+1) + 2 * a(n) = 0, a(n), \{a(1) = 1, a(2) = 2\}}) :$
- solve(%); $\qquad$ >> $\left\{\frac{2^n}{2}\right\}$

となります。実際 $t^2 - 3t + 2 = 0$ の解は $t = 1, 2$ ですから漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n & \cdots ① \\ a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

[注6] 行列の n 乗に関しては, 行列の章を参照。

と変形され、①,② より

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = a_2 - 2a_1 = 0 & \cdots ①' \\ a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}(a_2 - a_1) = 2^{n-1} & \cdots ②' \end{cases}$$

となるので、②′ − ①′ より

$$a_n = 2^{n-1}$$

となり約分した式と一致します。

4.3.3 連立漸化式

注7) MuPAD は連立漸化式;

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

は解けません。解くどころか定義も出来ません。連立漸化式は，3 項間漸化式に直すことができますが，余り良い方法とはいえません。

注7) 連立漸化式は, 高校の教科書では, 扱っていない。