目次

5　三角関数

三角関数

$\sin x$	`sin(x)`
$\cos x$	`cos(x)`
$\tan x$	`tan(x)`
π(円周率)	`PI`

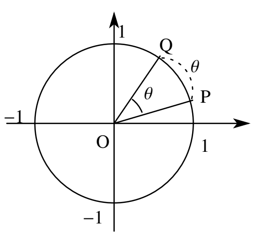
三角関数の変形

式の簡略化	`simplify()`
角を 1 つにまとめる	`combine`(,*sincos*)
$f(x)$ を sin と cos に書き直す	`rewrite(f(x)`,*sincos*)
$f(x)$ を tan に書き直す	`rewrite(f(x)`,*tan*)

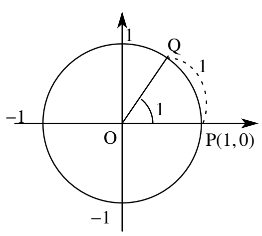
注1)

$\sin x, \cos x, \tan x$ はそれぞれ sin(x),cos(x),tan(x) となります。括弧は省略できません。ただ角度の単位はラジアン (*rad*) 単位で度 (°) ではありません。また円周率 (π) は大文字で PI と打ちます。念のためここで、1,2 年生のためにラジアンの定義を述べます。

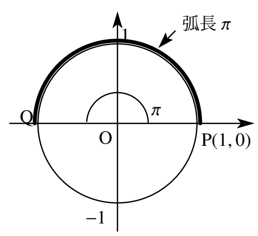
> 原点中心で半径 1 の円を考え、図 1 のように、円上に 2 点 P,Q をとるとき、
>
> ∠POQ の大きさ (ラジアン単位) = 弧 PQ の弧長



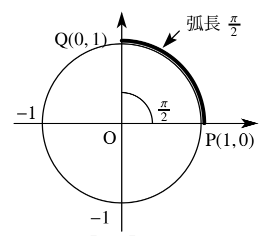
【図 1】



【図 2】



【図 3】



【図 4】

例えば,1 ラジアンは図 2 の角, また図 3,4 より $180° = \pi$ ラジアン,$90° = \dfrac{\pi}{2}$ ラジアン，同様にして，$45° = \dfrac{\pi}{4}$ ラジアン, $60° = \dfrac{\pi}{3}$ ラジアン,$270° = \dfrac{3\pi}{2}$ ラジアン, $-90° = -\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン などとなります。しかし，いちいち換算するのは面倒なので，数　を習ってからのほうが良いかもしれません。(数　では角度は全てラジアンで考える)

5.1　三角関数の値

注1)　combine は’ 散らばった変数を, まとめて 1 つにする’ という意味で，指数関数では, combine( ) を使って,$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ のような変形をします。rewrite は ’ 書き直す’ という意味で rewrite(,exp),rewrite(,ln) でそれぞれ底を e とする指数関数, 対数関数に直します (e は数　の範囲)

【例】$\sin(90°), \cos(90°), \tan(45°)$ の値を求めてみましょう。ラジアンに直すと $90° = \frac{\pi}{2}\ rad, 45° = \frac{\pi}{4}\ rad$ ですから次のようにすれば良いです。

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は?	• `sin(PI/2);`	>> 1
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は?	• `cos(PI/2);`	>> 0
$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ は?	• `tan(PI/4);`	>> 1

度に直すと、それぞれ $\sin(90°) = 1, \cos(90°) = 0, \tan(45°) = 1$ にあたります。いちいち換算するのが面倒な場合は, 自分で関数を定義すると良いです。角度を度に取るときのサインを Sin(x) とかくとすると、$x° = x \times \frac{\pi}{180}\ rad$ ですから、次のように定義すると良いでしょう。

```
Sin := x-> sin(x/180*PI);
```

これで $\sin(60°)$ を求めるには次の様にするだけです。

$\sin(60°)$ は?	• `Sin(60);`	>> $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

cos, tan に関しても同様にして、

```
Cos := x-> cos(x/180*PI);, Tan := x-> tan(x/180*PI);
```

とすると、単位が度 (°) になります。

5.2 三角方程式

次は三角方程式を解いてみましょう。solve( ) を使います。なお、単位はラジアンでやります。単位を、度 (°) にしたいときは, 答えの数字を $\frac{180}{\pi}$ 倍してください。また、問題文もラジアン単位に直さないといけません。

(1) $\sin(x) = 1$ の解は? • `solve(sin(x),x);` >> $1/2 * PI + 2 * X1 * PI \mid X1\ in\ Z\_$

Z は整数の集合を表します。(おそらく，世界中共通の習慣) したがって $\sin(x) = 1$ の解が $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$(n は整数) ということです。x の範囲を指定したいときは assume( ) 注2) を使って先に指定します。

(2) $\sin(x) = 1 (0 \leqq x < 2\pi)$ の解を求めるときは次の様になります。

• `assume(0 <= x < 2*PI);` >> `[0,2*PI[ of Type::Real`

[0,2*PI[は,0 より大きく 2π より小さいことを，最後の”of Type::Real”は実数タイプの変数であることを表しています。注3) さて x の範囲が限定されました。今度はどんな解になるでしょうか？

• solve(sin(x)=1,x); >> $\frac{\pi}{2}$

• unassume(x);

注2) assume は’ 仮定せよ’ という意味ですね。変数の条件を指定するときに使います。詳しくは第 2 章「文字式の処理」を参照。

注3) 方程式不等式の章参照

予想どうり解は $\frac{\pi}{2}$ だけになりました。ここで unassume(x); としないと x の範囲がずーと $0 \leqq x < 2\pi$ に制限されたままになります。[注4] 逆に言うと、変域が $0 \leqq x < 2\pi$ の問題が続けてあるときは unassume(x); をやらないほうが良いです。例えば続けて

(3) $\cos(x) = 1 (0 \leqq x < 2\pi)$ を解くときは次の様にやるだけです。

- `solve(cos(x) = 1, x);` >> 0

次は角度の単位が度 (°) となっている問題を解いて見ましょう。問題文もラジアン単位に直さないといけなかったですね。

(4) $\sin(x + 60^\circ) = \frac{1}{2}$ $(0 \leqq x < 360^\circ)$ の解は?

$60^\circ = \frac{1}{3}\pi, 360^\circ = 2\pi$ (rad) だから

$$\sin(x + 60^\circ) = \frac{1}{2}\ (0 \leqq x < 360^\circ) \Longleftrightarrow \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\ (0 \leqq x < 2\pi)$$

ラジアンに直ったので, MuPAD で次のようにします。

- `solve(sin(x + PI/3) = 1/2, x);` >> $\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

確かに、

$$\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\ (0 \leqq x < 2\pi) \Longleftrightarrow x + \frac{1}{3}\pi = \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \Longleftrightarrow x = 90^\circ, 330^\circ$$

で正しいです。やっぱり，度で考えるのは面倒ですね。**以下，単位は全てラジアンとします。**

MuPAD は $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を利用した方程式も解きます。次は,

(5) $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ を解いてみましょう。変域を設定してから解きます。

- assume(0 <=x<2*PI); >> `[0, 2 * PI[ of Type :: Real`
- solve(2*cos(x) ^ 2+5*sin(x)+1=0); >> $\left\{\left[x = \frac{7\pi}{6}\right], \left[x = \frac{11\pi}{6}\right]\right\}$

実際，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ だから,

$$2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 3) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2},\ \sin x = 3$$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ だから

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6}$$

となり一致しました。

しかし合成公式を使う方程式は解けません。また連立方程式は解けないみたいです。例えば, MuPAD は

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \qquad や \qquad \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$$

は解けません。

[注4] unassume(x) の代わりに，delete(x) でも良いです

5.3 三角不等式

三角不等式は *MuPAD* はどうも解けないみたいです。残念。

5.4 加法定理

まず加法定理を書かせて見ましょう。expand( )[注5)] を使います。

- expand(sin(x+y));　　$>> \cos(y)\sin(x)+\cos(x)\sin(y)$
- expand(cos(x+y));　　$>> \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

逆変形は simplify( ), または combine(,*sincos*) [注6)] を使います。

- `simplify(sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin(y));`　　$>> \sin(x+y)$
- `simplify(cos(x) * cos(y) - sin(x) * sin(y));`　　$>> \cos(x+y)$
- `combine(sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin(y), sincos);`　　$>> \sin(x+y)$
- `combine(cos(x) * cos(y) - sin(x) * sin(y), sincos);`　　$>> \cos(x+y)$

倍角公式も expand( ) を使います。

- `expand(sin(2 * x));`　　$>> 2\cos(x)\sin(x)$
- `expand(cos(2 * x));`　　$>> \cos(x)^2-\sin(x)^2$

逆変形は simplify( ), または combine(,*sincos*) を使います。

- `simplify(2 * sin(x) * cos(y));`　　$>> \sin(2x)$
- `simplify(cos(x) ^ 2 - sin(x) ^ 2);`　　$>> \cos(2x)$
- `combine(2 * sin(x) * cos(y), sincos);`　　$>> \sin(2x)$
- `combine(cos(x) ^ 2 - sin(x) ^ 2, sincos);`　　$>> \cos(2x)$

合成はどうも出来ないみたいです。$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ なども解けません。[注7)]

5.5 三角関数の変形

三角関数には, 同値な変形がたくさんあり，しかもどの変形が良いかは case by case です。したがって, MuPAD の得意とするところではありません。三角関数の書き換えには, combine(,sincos), rewrite(,*sincos*), rewrite(,*tan*),simplify( ) などがあります。

注5) 整式の展開のときにつかいましたね。

注6) combine は, • `combine(a^x × a^y);`　$>> a^{x+y}$ のように，’ 指数を 1 つにまとめる’ のが基本の働きです。

注7) 実は，MuPAD は $z=x+iy$ (x,y 実数) の偏角 *arg z* を求める arg(x,y) というコマンドはあるので，それを使えば, 三角関数を合成するプログラムは, 簡単に作れます。自分でやってみてください。

$$\begin{cases} \text{combine}(\ f(x), sincos) & \longrightarrow \text{角を出来るだけ１つにまとめる} \\ \text{rewrite}(\ f(x), sincos) & \longrightarrow \sin\ \text{と}\ \cos\ \text{を使って書き直す。} \\ \text{rewrite}(\ f(x), tan) & \longrightarrow \tan\ \text{を使って書き直す。} \end{cases}$$

combine に関しては前節で見たので，rewrite と simplify を見てみましょう。

- simplify(1 + 1/ tan(x) ^ 2); $\qquad$ >> $\dfrac{1}{\tan(x)^2} + 1$

simplify ではぜんぜん簡単になりませんね。rewrite を使って，sin と cos に直してみましょう。

- rewrite(1 + 1/ tan(x) ^ 2); $\qquad$ >> $\dfrac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + 1$

これで，sin と cos の式に直りました。簡単にするには simplify( ) を使いましょう。

- simplify(%); $\qquad$ >> $\dfrac{1}{\cos(x)^2}$

逆に tan に直してみましょう。

- rewrite(1/ cos(x) ^ 2); $\qquad$ >> $\dfrac{\left((\tan\frac{x}{2})^2+1\right)^2}{\left(1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right)^2}$ $\qquad \cdots$①

このように $\tan\frac{x}{2}$ の式に直ります。一般に，

$$\cos x = \cos 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

よって，分母・分子を $\cos^2\frac{x}{2}$ で割ると

$$\cos x = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

これで① の式が正しいことが解りました。

注8)

注8)

$\sin x$ も同様にして，

$$\sin x = \sin 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

すなわち $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \qquad \cdots(\text{公式})$$

このように，$\sin x, \cos x$ は $\tan\frac{x}{2}$ の分数式に直ります。

今度は $\sin^2 x + \cos^2 x$ を簡単にさせて見ます。

- rewrite(sin(x) ^ 2 + cos(x) ^ 2); >> $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$

rewrite ではぜんぜん簡単になりませんね。もうすでに sin と cos に直っているので当然です。simplify を使って，簡単にしてみましょう。

- simplify(sin(x) ^ 2 + cos(x) ^ 2); >> 1

今度は簡単になりました。ふー。

5.6 まとめ

いままで見てきたように, 三角関数の変形は MuPAD の余り得意とするところではないみたいです。皆さんなら $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なんて瞬間にでますよね?? 三角関数は (指数関数・対数関数と同様) グラフを描いたり，近似値を求めたりするのに使ったほうがよさそうです。もし MuPAD で式を変形したり, 方程式を解いたりするのなら，必ずグラフ (平面のグラフィックの章参照) を描いて, 交点を目で確かめることを勧めます。