目次

6　指数・対数関数

注1)

a^x	`a ^ x`
e^x	`exp(x)`
$\log_a x$	`log(a,x)`
$\log x$(自然対数)	`ln(x)`
簡略化	`simplify()`
同じ底を持つ指数関数をまとめる	`combine()`
底が e の指数関数をまとめる	`combine(,exp)`
底が e のの対数関数をまとめる	`combine(,ln)`
指数の底を e に変換する	`rewrite(,exp)`
対数の底を e に変換する	`rewrite(,ln)`
e(自然定数の底)	`E`

注2) 全体に指数・対数の計算は, 三角関数よりさらに MuPAD は苦手のようです。

6.1　指数の計算

$a > 0$ のとき，a の累乗根は，$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ を使って入力します。$a < 0$ のときは，$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ を使います。

(1) $\sqrt[3]{27}$ を求めましょう。 $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$ ですから次のように入力すると，(括弧を忘れないように注意)

- `27 ^ (1/3);`　　>> $27^{\frac{1}{3}}$

数を底に持つ指数関数の計算の簡略化は, simplify を使えます。

- `simplify(%);`　　>> 3

(2) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$ はどうでしょう?

- `2 ^ (1/4) * 8 ^ (1/4);`　　>> $2^{\frac{1}{4}}\ 8^{\frac{1}{4}}$
- `simplify(%);`　　>> $16^{\frac{1}{4}}$
- `simplify(%);`　　>> 2

$2^{\frac{1}{4}} * 8^{\frac{1}{4}} = (2 \times 8)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$ で合っています。$a < 0$ のときは，$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ を使います。

(3) $\sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{81}$ はどうでしょう？ $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$ ですから, 次のように入力します。

- `-3 ^ (1/3) + (81) ^ (1/3);`　　>> $81^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$
- `simplify(%);`　　>> $2\ 3^{\frac{1}{3}}$

注1) $e, log\ x$ は数 III で習います。

注2) exp(x) は ’exponential function’ (指数関数) の略です。また、ln は logarithm natural(自然対数) の略です。したがって，’I(大文字のアイ)’ でなく’l(小文字のエル)’ なので注意してください。また E も大文字でないといけません。simplify は特に，底か, 指数の少なくとも一方が’ 数字’ の指数関数のとき有効です。

実際，$\sqrt[3]{-3}+\sqrt[3]{81}=-\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}=2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ ですね。

指数法則；

$$\begin{cases} a^x \times a^y = a^{x+y}, a^x \div a^y = a^{x-y} \\ (a^x)^y = a^{xy} & \qquad (a>0, b>0, x, y \text{ は実数}) \\ (ab)^x = a^x\, b^x \end{cases}$$

を MuPAD で確かめてみましょう。まず指数や底が文字のときです。

- a ^ x*a ^ y; >> $a^x\ a^y$
- simplify(%); >> $a^{(x+y)}$

指数をまとめるのは combine( ) でもできます。どちらが良いのでしょう？

- (a ^ x) ^ y; >> $(a^x)^y$
- simplify(%); >> $(a^x)^y$
- combine(%); >> a^{xy}

どうやら，指数をまとめるのは combine( ) を使ったほうが良さそうです。しかし

- a ^ x*b ^ x; >> $a^x b^x$
- combine(%); >> $a^x b^x$
- simplify(%); >> $a^x b^x$

combine( ) は, 同じ底を持つ指数関数を 1 つにまとめるので，この場合は効きません。simplify(%) でもだめです。今度は，文字と数字をともに含んだ，指数計算をやらせて見ましょう。

- a ^ (3/2) ∗ a ^ (1/2); >> a^2
- (a ^ (1/3)) ^ 6; >> a^2
- a ^ 3 ∗ (1/a) ^ 3; >> 1

$a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=a^2, (a^{\frac{1}{3}})^6=a^{\frac{1}{3}\times 6}=a^2, a^3\times(\frac{1}{a})^3=(a\times\frac{1}{a})^3=1^3=1$ ですから正しいです。しかし,

- a ^ (1/3)*(1/a) ^ (1/3); >> $a^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

$a^{\frac{1}{3}}\times(\frac{1}{a})^{\frac{1}{3}}=(a\times\frac{1}{a})^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}=1$ になるはずですが, 簡単にしてくれません。これは a の範囲を設定していないためです。$a>0$ に設定してからやってみましょう。[注3)]

- assume(a > 0); >> >0
- a ^ (1/3) ∗ (1/a) ^ (1/3); >> 1

今度はうまくいきました。少なくとも指数か底の一方が数字のときは，MuPAD は指数計算をこなすようです。それ以外の場合は，余り得意ではないようです。

注3) $a<0$ のとき, MuPAD では a ^ (1/n) は虚数 n 乗根を表します。例えば, 複素数 z を $a+bi(a,b$ 実数) の形に変形する rectform(z) を使うと • rectform((−1) ^ (1/3)); >> $\frac{1}{2}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}I$ となります。

6.2　対数の計算

$\log_a x$ は log(a,x), $\log x$[注4] は ln(x) [エルエヌ エックス] と入力します。MuPAD は対数の計算（特に底が e でないとき) の計算は非常に苦手です。その前に対数の公式を復習しておきましょう。

$$\begin{cases} \log_a x = y \Longleftrightarrow x = a^y \ (\text{定義}) \\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^r = r \log_a x \\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{cases} \qquad (x > 0, y > 0, a > 0, a \fallingdotseq 1, b > 0, c > 0, c \fallingdotseq 1)$$

まず, 数字の計算からやってみましょう

- log(2, 8);　　　>> 3

$\log_2 8 = 3$ ですから正しいですね。$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$ はどうでしょうか?

- log(10, 2)+log(10, 5);　　　>> $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$

simplify, combine などやってみてもだめです。[注5]

$3 \log_8 2 = \log_8 2^3 = 1$ はどうでしょうか?

- 3log(8,2);　　　>> $3 \log(8, 2)$

やはり，simplify や combine では簡単になりません。小数近似してみましょう。

- float(%);　　　>> 1.0

1 ではなく，1.0 となっています。これは MuPAD が浮動小数点計算で 1.0 を出したということで，対数公式を使って求めたわけではありません。次は底の変換です。MuPAD は一般の底の変換は出来ませんが，rewrite(,ln) で，ln(x)= $\log_e x$ に変えることは出来ます。

- rewrite(log(3,5), ln);　　　>> $\dfrac{\ln(5)}{\ln(3)}$

これは $\log_3 5 = \frac{\log_e 5}{\log_e 3}$ ということです。

注4) $\log_e x$ のこと。底が自然対数 e のときは, 省略できる。

注5) このときは rewrite(,ln) を使って，底を e に変えます。

- rewrite(%, ln);　　　>> $\dfrac{\ln 2}{\ln 10} + \dfrac{\ln 5}{\ln 10}$

normal を使って通分します。

- normal(%);　　　>> $\dfrac{\ln 2 + \ln 5}{\ln 10}$

最後に combine を使ってまとめます。

- combine(%, ln);　　　>> 1

底が e のとき，真数をまとめるのは combine(,ln) です。

- 3*ln(2);　　>> $3\ln(2)$
- combine(%, ln);　　>> $\ln(8)$

$3\log_8 2$ は計算できませんが, 底が e のときは少しは ’ まし’ なようです。

6.3　指数・対数方程式

指数・対数方程式を解くときも solve を使います。しかし, ほとんど実用になりません。

$2^x = 8$ を解いてみましょう。解はもちろん $x = 3$ です。

- solve(2 ^ x=8);　　>> x in { 1/ln(2)*(2*I*PI*(X5)+ln(8)) — X5 in Z_ }

Z は整数の集合を表すので，$x = \frac{\log 8+2\pi i n}{\log 2}$($n$ は整数) ということですが, 複素数の解が出てきてしまいました。(大学では複素数の指数関数というのも，考えます。) 変域を実数に制限して, もう一度解いてみましょう。Type::Real というのは実数タイプの変数ということです。

- assume(x,Type::Real): solve(2 ^ x=8);　　>> $x = \dfrac{\ln(8)}{\ln(2)}$

$\frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{3\log 2}{\log 2} = 3$ なので間違いではないですが、余り簡単になりませんね。底が e のときは多少ましです。

- assume(x,Type::Real): solve(E ^ x=3);　　>> $x = \ln(3)$
- solve(ln(x)=3);　　>> $x = \exp(3)$
- solve(ln(x*(2*x+1))=0);　　>> $\left\{[x = -1], \left[x = \dfrac{1}{2}\right]\right\}$

最後の例は

$$\log x(2x+1) = 0 \iff x(2x+1) = 1 \iff 2x^2 + x - 1 = 0 \iff x = -1, x = \frac{1}{2}$$

ということです。

MuPAD は底が e のときは, 少しは方程式も解けますが，それ以外は，全くだめなようです。

6.4　桁数

桁数を求めるには, 底が 10 の対数を考えると良かったですね。[注6)]

注6)　これは僕らが 10 進数を使っているからです。もし, バビロニア人のように 60 進数を使っていれば，底が 60 の対数 (!?) を考えるわけです。バビロニア人でなくて良かった。

例題

3^{100} は何桁の数か? $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて調べよ。

【解答】

$$\log_{10} 3^{100} = 100 \log_{10} 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

したがって $3^{100} \quad 10^{47.71}$ となるから

$$10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$$

10^{47} は 48 桁の数のうち最小の数，また，10^{48} は 49 桁の数のうち最小の数だから，求める桁数は

$$48 \text{ 桁} \qquad \cdots (\text{答})$$

となりましたね。確かにそのとおりなのですが，その結果を MuPAD で確かめてみましょう。

- 3 ^ 100;　　　　>> 515377520732011331036461129765621272702107522001

数えると確かに 48 桁あります。

6.5 まとめ

MuPAD は，指数対数の分野では (三角関数と同様) グラフを描いたり，近似値を求めたり, 実際の値を求めたりするのに使ったほうがよさそうです。もし MuPAD で式を変形したり, 方程式を解いたりするのなら, 必ずグラフ (平面のグラフィックの章参照) を描いて, 交点を目で確かめることを勧めます。