目次

7　微積分 (整式)

極限 $\lim_{x\to a} f(x)$	limit(f(x),x=a)
微分 $f'(x)$	diff(f(x),x)
不定積分 $\int f(x)dx$	int(f(x),x)
定積分 $\int_a^b f(x)dx$	int(f(x),x=a . . b)

注1)

7.1　極限

$\lim_{x\to a} f(x)$ は limit(f(x),x=a) と書きます。x は省略できません。微分の定義を復習してみましょう。

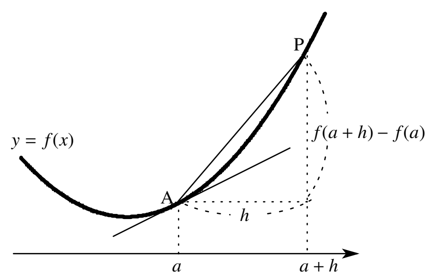
$y = f(x)$ 上に定点 A$(a, f(a))$ と動点 P$(a+h, f(a+h))$ をとると, 直線 AP の傾きは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ここで, 点 P を限りなく点 A に近づけると, 直線 AP の傾きは, 限りなく点 A における接線の傾きに限りなく近づくから点 A における接線の傾きは

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

これを，$y = f(x)$ の, $x = a$ における微分係数; $f'(a)$ と呼ぶのでした。



$f(x) = x^2$ のとき，$f'(a)$ を求めてみましょう。

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \qquad \cdots ①$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

では，MuPAD で求めてみましょう。

$f(x) = x^2$ を微分してみます。① から $f'(a)$ を求めるには, 次のように入力すればいいはずです。

- `limit(((a + h) ^ 2 − a ^ 2)/h, h = 0);`　　　　>> $2a$

確かに一致します。

注1) diff は 'differentiate(微分する)' の略で int は 'integral(積分)' の略です。また，定積分で `int(f(x), x = a . . b);` の「..」マークはピリオド 2 つを続けて打ちます。 M の 2 つ右にあります。

7.2 微分

$f(x)$ を x に関し微分するのは，diff(f(x),x) とするだけです。

$\dfrac{d}{dx}(x^3+3x^2)$ は?　　● diff(x ^ 3 + 3 * x ^ 2, x);　　>> $6x+3x^2$

$(x^3+3x^2)' = 3x^2+6x$ ですから正しいですね。でもなぜ, diff(,x) のように'x' と指定しないといけないのでしょう？

$\dfrac{d}{dx}(ax^3+bx)$ は?　　● diff(a * x ^ 3 + b * x, x);　　>> $b+3ax^2$

$\dfrac{d}{da}(ax^3+bx)$ は?　　● diff(a * x ^ 3 + b * x, a);　　>> x^3

2 番目の式は x, 3 番目の式は a に関し微分したので、結果が異なります。従って我々が指定しないと MuPAD は何をやったらいいか解りません。(a は定数とは限りませんから,a に関して微分できます。)

7.3 不定積分

$f(x)$ を x に関し不定積分するのは int(f(x),x) とします。微分と同様,'x'(変数名) は省略できません。

$\int (x^2+3)dx$ は?　　● int(x ^ 2 + 3, x);　　>> $3x+\dfrac{x^3}{3}$

$\int (x^2+3)dx = \frac{x^3}{3}+3x+C$ ですから正しいですね。MuPAD では、積分定数 C は出力されません。

$\int t^2 dt$ は?　　● int(t ^ 2, t);　　>> $\dfrac{t^3}{3}$

$\int t^2 dx$ は?　　● int(t ^ 2, x);　　>> $t^2\ x$

t^2 を t に関し積分すると $\frac{t^3}{3}$, x に関し積分すると $t^2\,x$ ですね。このように積分変数によって積分値は変わってきます。

7.4 定積分

7.4.1 基本的な定積分

$f(x)$ を x に関し $x=a$ から $x=b$ まで定積分するのは int(f(x),x=a ..b) とします。[注2)]

$\int_1^2 (x^2+3)dx$ の値は?　　● int(x ^ 2 + 3, x = 1..2);　　>> 16/3

注2)　$\sum_{k=1}^{n} a_k$ (a_kを $k=1$ から $k=n$ まで加える) は sum(a_k, k = 1..n) でした。(数列の章参照) それと似ていますね。

実際、

$$\int_1^2 (x^2+3)dx = \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{16}{3}$$

なので正しいですね。

$\displaystyle\int_1^x (t^2+3)dt$ の値は? • `int(t ^ 2 + 3, t = 1..x);` >> $3x+\dfrac{x^3}{3}-10/3$

続けて x に関し微分してみましょう。

• `diff(%, x);` >> x^2+3

実際,

$$\int_1^x (t^2+3)dt = \left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^x = \left(\frac{x^3}{3}+3x\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{x^3}{3}+3x-\frac{10}{3}$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+3x-\frac{10}{3}\right) = x^2+3$$

となり一致します。これは

(定理) $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

の例ですね。

7.4.2 $\frac{1}{6}$ 公式

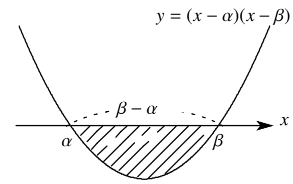
公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

この公式を私は $\frac{1}{6}$ 公式と呼んでいます。これを使うと 2 次関数と直線で囲まれた面積がすぐ求まるので重宝します。例えば, $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた面積を S とすると,

$$S = \int_\alpha^\beta \{-(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

となります。



まずこの公式を MuPAD を使って出してみましょう。

- `int((x - a) * (x - b), x = a..b);` $>> \dfrac{b^3}{3}-\dfrac{a^3}{3}+ab^2-a^2b-\dfrac{a^2(-a-b)}{2}+\dfrac{b^2(-a-b)}{2}$

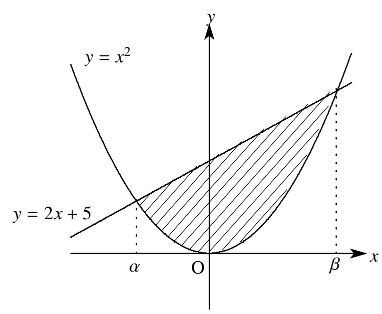
続けて因数分解します。

- factor(%); $>> -\dfrac{1}{6}(-1+b)^3$

確かに, 一致しました。次はこの公式の応用です。

例題

$y=x^2$ と $y=2x+5$ で囲まれる面積 S を求めよ。



【解答】

$x^2=2x+5$ とおくと

$$x^2-2x-5=0 \Longleftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$$

$\alpha=1-\sqrt{6},\beta=1+\sqrt{6}$ とおくと，$x^2-2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解されるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta (2x+5-x^2)dx = -\int_\alpha^\beta (x^2-2x-5)dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\left\{(1+\sqrt{6})-(1-\sqrt{6})\right\}^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3 = 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

となります。これを公式を使わずに，MuPAD で検算してみましょう。

- `int(2 * x + 5 - x ^ 2, x = 1 - sqrt(6)..1 + sqrt(6));`

  $>> 10\,6^{\frac{1}{2}}+(6^{\frac{1}{2}}+1)^2-\dfrac{(6^{\frac{1}{2}}+1)^3}{3}-(1-6^{\frac{1}{2}})^2+\dfrac{(1-6^{\frac{1}{2}})^3}{3}$

続けて，展開します。

- expand(%); $>> 8\,6^{\frac{1}{2}}$

$8\,6^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{6}$ だから一致しました。

7.5　絶対値のついた積分

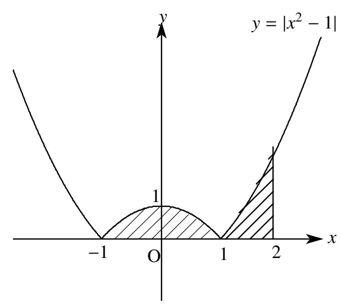
MuPAD では, abs(x) で x の絶対値が求まります。[注3)]

$I = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - 1| dx$ を求めてみましょう。

- `int(abs(x ^ 2 − 1)) , x = −1..2);`　　　　>> $\dfrac{8}{3}$

実際, $|x^2 - 1| \geqq 0$ だから, I は右図の面積と一致して,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \{-(x^2-1)\} dx + \int_{1}^{2} (x^2-1) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{1}^{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} \qquad \text{ですね。} \end{aligned}$$



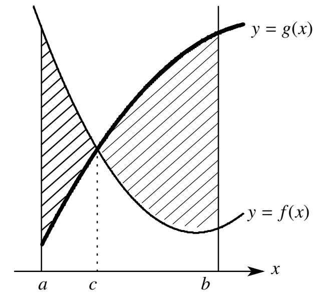
7.6　面積

右図のように $a \leqq x \leqq c$ で $g(x) \leqq f(x)$, $c \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq g(x)$ のとき, $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた領域の面積の和を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{a}^{c} \{f(x) - g(x)\} dx + \int_{c}^{b} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{a}^{c} |f(x) - g(x)| dx + \int_{c}^{b} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

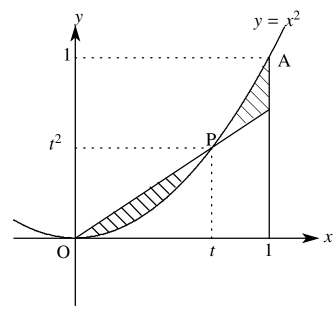
であるから, 面積は $|f(x) - g(x)|$ の積分で与えられる。

注3)　(第一章参照) 例えば, ● abs(−5);　>> 5 となります。



例題

点 P は 曲線 $y = x^2$ 上を原点 O から点 A(1, 1) まで動く。このとき，直線 OP, 曲線 $y = x^2$ および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S が最小となるのは P がどの位置にあるときか。その点 P の座標を求めよ。



まずは MuPAD を使わないでやってみます。

【解答】

仮定より，$\mathrm{P}(t, t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおける。このとき，直線 OP の式は $y = tx$ となるから，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 |tx - x^2| dx \\
&= \int_0^t (tx - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - tx) dx \\
&= \left[\frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{tx^2}{2}\right]_t^1 \\
&= \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3}\right) - 0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2}\right) \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{d}{dt} S = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{1}{3}$	↘	極小	↗	$\frac{1}{6}$

表より，S が最小になる t の値は

$$
t = \frac{1}{\sqrt{2}}
$$

このとき，点 P の座標は

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \qquad \cdots(答)$$

次は MuPAD で解いてみましょう。絶対値は abs で求まるのでしたね。

まず，t の変域を $0 \leqq t \leqq 1$ にします。

- `assume(0 <= t <= 1);` >> [0, 1] of Type::Real

絶対値をつけて積分します。

- `int(t * x - x ^ 2), x = 0..1);`

$$>> \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}$$

前の $S(t)$ の結果と一致します。t に関して微分して

- diff(%),t); >> $t^2 - \frac{1}{2}$

$S'(t) = 0$ の解を求めます。

- solve(%); >> $\left[t = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}\right]$

本当は，増減表，またはグラフを描かないと，$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値をとるとはいえません。しかし, 検算には使えます。

7.7 まとめ

MuPAD は微積分に関しては, 非常に強力な武器になります。しかし, 前の例題でもそうですが点 P の座標を $P(t, t^2)$ とおいて，直線 OP の式; $y = tx$ を出すのは, 我々が自分でやるしかありません。ある点を通る接線の式を求めるのも，我々がやるしかないのです。しかし, 三角関数や指数・対数関数の取り扱いと比べれば，非常に実用的といえます。また，グラフに関しては「平面のグラフィックの章」を参照してください。MuPAD を使うととても簡単にグラフをかけます。