目次

8　微積分 (数 III)

注1)

極限

$\lim_{n\to\infty} a_n$	`limit(a(n), n = infinity);`
$\lim_{x\to a} f(x)$	`limit(f(x), x = a);`
$\lim_{x\to a+0} f(x)$	`limit(f(x), x = a, Right);`
$\lim_{x\to a-0} f(x)$	`limit(f(x), x = a, Left);`

微積分

微分 $f'(x)$	`diff(f(x), x)`
n 階微分 $f^{(n)}(x)$	`diff(f(x), x $n);`
不定積分 $\int f(x)dx$	`int(f(x), x)`
定積分 $\int_a^b f(x)dx$	`int(f(x), x = a .. b)`

さまざまな関数

$\sin x$	`sin(x)`
$\cos x$	`cos(x)`
$\tan x$	`tan(x)`
a^x	`a ^ x`
e^x	`exp(x)` または `E ^ x`
$\log_a x$	`log(a, x)`
$\log x$(自然対数)	`ln(x)`
π(円周率)	`PI`
e(自然定数の底)	`E`
∞(無限大)	`infinity`

注2)

8.1　極限 (数　)

8.1.1　数列の極限

MuPAD では、∞(無限大) は infinity, $-\infty$(無限小) は $-$infinity です。

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-2}$ は?　　• `limit((2 * n - 1)/(3 * n - 2), n = infinity);`　　>> $\frac{2}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n-2}$ は?　　• `limit((2 * n ^ 2 - 1)/(3 * n - 2), n = infinity);`　　>> $infinity$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2-1}{3n-2}$ は?　　• `limit((-2 * n ^ 2 - 1)/(3 * n - 2), n = infinity);`　　>> $-infinity$

$\lim_{n\to\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ は?　　• `limit((1 + 1/n)^n, n = infinity);`　　>> $exp(1)$

注1) できれば，微積分 (整式) も見てください。この章のコマンドは, 微積分 (整式) の章とほとんど同じです。

注2) diff は 'differentiate(微分する)' の略で int は 'integral(積分)' の略です。定積分で `int(f(x), x = a .. b);` の「..」マークはピリオド 2 つを続けて打ちます。 M の 2 つ右にあります。

MuPAD では，e^x を exp(x) と表すので exp(1) = $e^1 = e$. すなわち，最後の結果は e の定義式;

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$$

を表しています。

8.1.2 無限級数の和

無限級数の和も数列の極限と同様です。部分和を S_n とするとき無限級数の和は $\lim_{n\to\infty} S_n$ なので，部分和を求めた後，極限をとります。$\{a_k\}$ の第 n 項までの和は `sum(a(k), k = 1..n);` でした。[注3)] sum を使って部分和を求めてから, 極限をとります。例えば、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots \qquad \cdots(*)$$

を求めてみます。

n 項までの和; $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ だから,S_n は

- `sum((1/2) ^ (k - 1), k = 1..n);` >> $2 - 2\,(1/2)^n$

この極限をとります

- `limit(%, n = infinity);` >> 2

実際、$(*)$ は初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の和だから n 項までの和 S_n は,

$$S_n = \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって,$(*)$ の和は,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

で一致します。

8.1.3 関数の極限

関数の極限も, 数列の極限と全く同じです。$\lim_{x\to a} f(x)$ は `limit(f(x), x = a);` と入力します。

三角関数の極限です。

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ は? 　 • `limit(sin(x)/x, x = 0);` >> 1

注3) 数列の章参照。例えば sum(k ^ 2,k=1..3) は $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ を表します。

これは超有名ですね。続けて少し複雑なのをやってみます。

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1 - \sin x}$ は? • `limit(cos(x)^2/(1 - sin(x)), x = PI/2);` >> 2

実際、$\frac{\pi}{2} - x = t$ とおくと, $x \to \frac{\pi}{2}$ のとき $t \to 0$ だから、

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1 - \sin x} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0}(1 + \cos t) = 2$$

次は指数・対数関数の極限です。

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$ は? • `limit((E ^ h - 1)/h, h = 0);` >> 1

$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t)}{t}$ は? • `limit(ln(1 + t)/t, t = 0);` >> 1

$\lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}}$ は? • `limit((1 + t) ^ (1/t), t = 0);` >> exp(1)

$\lim_{x \to \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ は? • `limit((1 + 1/x)^x, x = infinity);` >> exp(1)

$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ は? • `limit((1 + 1/x)^x, x = -infinity);` >> exp(1)

MuPAD では $e^x = \exp(x)$ と表しますから, $\exp(1) = e^1 = e$ 。したがって，これは非常に有名な関係；

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \Longleftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

を表しています。

8.1.4 右極限・左極限

右極限, 左極限はそれぞれ $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$ とかかれ，それぞれ，"x が a より大きいほうから a に近づく (右から近づく) ときの極限" と"x が a より小さいほうから a に近づく (左から近づく) ときの極限" を表します。MuPAD ではそれぞれ次のように入力します。$\lim_{x \to a+0} f(x)$ は `limit(f(x), x = a, Right)` , $\lim_{x \to a-0} f(x)$ は `limit(f(x), x = a, Left)` です。[注4)]

では，$f(x) = \frac{x}{x-1}$ の右極限と左極限を見ましょう。

$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x - 1}$ は? • `limit(x/(x - 1), x = 1, Right);` $infinity$

$\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x - 1}$ は? • `limit(x/(x - 1), x = 1, Left);` $-infinity$

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x - 1}$ は? • `limit(x/(x - 1), x = 1);` $undefined$

注4) このように <, Left > や <, Right > などの部分は' オプション' と呼ばれます。MuPAD ではこのように後ろの部分にオプションがつくことが多いみたいです。

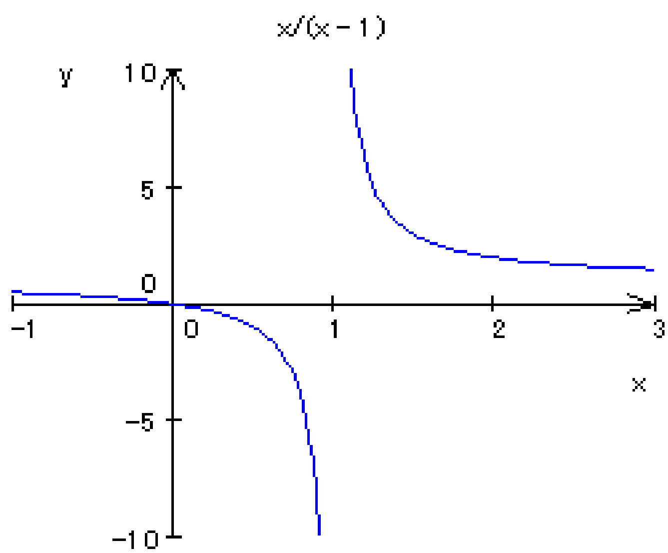
実際、$x > 1$ のとき $\frac{x}{x-1} > 0$, $x < 1$ のとき $\frac{x}{x-1} < 0$ で, かつ $x \to 1$ のとき分母の絶対値は限りなく 0 に近づくからから

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x-1} = \infty, \qquad \lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

しかし左極限と、右極限が異なるので $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$ は定義できません。
ここで MuPAD を使ってグラフを描いて見ましょう。$y = f(x)$ グラフを $a \leqq x \leqq b$ の範囲で描くには plotfunc2d(f(x),x=a..b) と入力します。y の範囲も $c \leqq y \leqq d$ に制限したいなら plotfunc2d(f(x),x=a..b,y=c..d) と入力します。[注5)] これを使って $y = \frac{x}{x-1}$ のグラフを $-1 \leqq x \leqq 3$, $-10 \leqq y \leqq 10$ の範囲で書いてみましょう。

- `plotfunc2d(x/(x - 1), x = -1..3, y = -10..10);`

これで次のようなグラフになります。別の window が立ち上がるので，注意してください。



グラフからも,$x = 1$ に右から近づくと無限大に発散し，$x = 1$ に左から近づくと無限小に発散することが解ります。ぜひ，MuPAD を使ってどんどんグラフを描いてみてください。知識が生きたものになります。

注5) 詳しくは，グラフィックの章を参照。なお，plotfunc2d は plot(描く)+function(関数)+2d(2 次元) の略で, 平面のグラフを描くコマンドです。

8.2 微分

$f(x)$ を x に関し微分するのは，diff(f(x),x) とするだけです。

8.2.1 さまざまな関数の微分

さまざまな関数の微分を復習しておきます。

$(\sin x)'$	$\cos x$
$(\cos x)'$	$-\sin x$
$(\tan x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

$(e^x)'$	e^x
$(\log x)'$	$\frac{1}{x}$
$(x^\alpha)'$	$\alpha x^{\alpha-1}$

MuPAD で計算してみます。MuPAD では、自然定数の底 (e) は大文字の E , また $e^x = \exp(x), \log x = \ln(x)$(エルエヌ) と表されます。(指数・対数関数の項参照)

$(\sin x)'$ は?	• diff(sin(x), x);	>> $\cos(x)$
$(\cos x)'$ は?	• diff(cos(x), x);	>> $-\sin(x)$
$(\tan x)'$ は?	• diff(tan(x), x);	>> $\tan(x)^2 + 1$
$(e^x)'$ は?	• diff(exp(x), x);	>> $\exp(x)$
$(\log x)'$ は?	• diff(ln(x), x);	>> $\dfrac{1}{x}$
$(x^a)'$ は?	• diff(x ^ a, x);	>> $a\ x^{a-1}$
$(\sqrt{x})'$ は?	• diff(sqrt(x), x);	>> $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ なので全て一致します。注6)

8.3 高階微分

n 階微分 $f^{(n)}(x)$ は diff(f(x),x $ n) とします。注7)

$f(x) = x^3$ の第 2 次導関数と第 3 次導関数を求めてみます。

$f''(x)$ は?	• diff(x ^ 3, x $2);	$6x$
$f'''(x)$	• diff(x ^ 3, x $3);	6

たしかに $(x^3)' = 3x^2, (x^3)'' = (3x^2)' = 6x, (x^3)''' = (6x)'' = 6$ ですから一致します。

8.4 複雑な関数の微分

微分の公式を復習してみましょう。

和	$(u+v)' = u' + v'$
積	$(uv)' = u'v + uv'$
商	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
合成関数の微分	$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

注6) MuPAD に計算させるには、diff(tan(x),x); に続けて、rewrite(%,sincos); simplify(%); と打ちます。rewrite(f(x),sincos) は $f(x)$ を sin(x) と cos(x) を使って書き直せという意味です。

注7) ここで$ マークは一般に ' 繰り返しの回数' を意味し，例えば，• k ^ 2 $ k=1..5;　>>1,4,9,16,25 となります。

幸か不幸か, 私たちは，これらの公式を全く意識しないで簡単に微分することが出来ます。すべて diff を使うだけです。

(1) $\left(\frac{7x-6}{x^2+1}\right)'$ を求めましょう。

- `diff((7*x-6)/(x^2+1),x);` $>> \dfrac{7}{x^2+1} - \dfrac{2x(7x-6)}{(x^2+1)^2}$

通分しましょう。 続けて、normal(%) と打ちます。

- `normal(%);` $>> \dfrac{12x-7x^2+7}{2x^2+x^4+1}$

さらに分母・分子を因数分解します。

- `factor(%);` $>> -\dfrac{-12x+7x^2-7}{(x^2+1)^2}$

注8)　次は (2) $\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)'$ を求めてみましょう。

- `diff((1+sin(x))/(1-sin(x)),x);` $>> -\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+1} - \dfrac{\cos(x)(1-\sin(x))}{(\sin(x)+1)^2}$

factor で, 通分と因数分解をします。

- `factor(%);` $>> \dfrac{(-2)\cos(x)}{(\sin(x)+1)^2}$

結果を確かめて見ましょう。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' &= \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1-\sin x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}\\ &= \frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}\\ &= -\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}\end{aligned}$$

確かに一致しました。商の微分公式を使って解きましたが,MuPAD では, それを全く意識する必要はないです。[注9)]

8.5　不定積分

$f(x)$ を x に関し不定積分するのは int(f(x),x) とします。ただし，MuPAD では積分定数 C は表示されません。さまざまな関数の積分を復習しておきます。

$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\log\lvert x\rvert + C$
$\int x^\alpha dx (\alpha \fallingdotseq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\tan x + C$

注8)　実は factor(); は通分もやってくれるので normal(%);とfactor(%); の代わりに factor(%); だけでも同じです。

注9)　したがって特に微分法を習い始めの人は，必ず自分の手でも計算できるようにしておいてください。これは積分に関しても同様です。

MuPAD で計算してみます。

$\int e^x dx$ は? • `int(exp(x), x);` $\exp(x)$

$\int \frac{1}{x} dx$ は? • `int(1/x, x);` >> $\ln(x)$

$\ln(x) = \log(x), \exp(x) = e^x$ でしたから合っています。三角関数に移りましょう。

$\int \sin x dx$ は? • `int(sin(x), x);` >> $-\cos(x)$

$\int \cos x dx$ は? • `int(cos(x), x);` >> $\sin(x)$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ は? • `int(1/cos(x) ^ 2, x);` >> $\frac{2\sin(2x)}{2\cos(2x)+1}$

最後の式は, $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ となる筈なので、$\tan x$ を使って書き直します。

• `rewrite(%, tan);` >> $\dfrac{4\tan x}{(1+\tan(x)^2)\left\{\dfrac{2(1-\tan(x)^2)}{1+\tan(x)^2}+2\right\}}$

normal を使って約分します。

• `normal(%);` >> $\tan x$

やっと一致しました。次はやや複雑な式の不定積分をやってみましょう。

$\int \cos^2 x dx$ は? • `int(cos(x)^2, x);` >> $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$

$\int \sin 2x \cos x dx$ は? • `int(sin(2 * x) * cos(x), x);` >> $-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(3x)}{6}$

実際、$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ だから

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

また、積和の公式より $\sin 2x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ だから

$$\int \sin 2x \cos x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos x}{2} + C$$

ですから, 一致します。この他，MuPAD では置換積分や部分積分をやることも出来ますが，それは後の節に廻します。

8.6 定積分

これは答えを簡単にする必要が余りないので、扱いは，比較的簡単です。

$\int_0^{\pi} \sin x dx$ は?	• `int(sin(x), x = 0..PI);`	>> 2
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ は?	• `int(cos(x), x = 0..PI/2);`	>> 1
$\int_0^1 e^x dx$ は?	• `int(E^x, x = 0..1);`	>> exp(1) − 1
$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ は?	• `int(1/x, x = 1..2);`	>> ln(2)
$\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$ は?	• `int(E ^ x - E ^ (-x), x = -1..1);`	>> $\exp(1) - \frac{1}{\exp(-1)}$
簡単にすると?	• `simplify(%);`	>> 0
$\int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx$ は?	• `int(x/(x ^ 2 - 6 * x + 8), x = 6..8);`	>> 3ln(4) − 2ln(2) − ln(6)
まとめると?	• `combine(%, ln);`	>> $\ln\frac{8}{3}$

実際,

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \Big[\sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_0^1 e^x dx = \Big[e^x \Big]_0^1 = e - 1 \qquad \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \Big[\log x \Big]_1^2 = \log 2$$

$$\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx = \Big[e^x + e^{-x} \Big]_{-1}^1 = (e + e^{-1}) - (e^{-1} + e) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx &= \int_6^8 \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-2} \right) dx = 2\Big[\log|x-4| \Big]_6^8 - \Big[\log|x-2| \Big]_6^8 \\ &= 2(\log 4 - \log 2) - (\log 6 - \log 4) \\ &= 2\log 2 - (\log 2 + \log 3) + 2\log 2 = 3\log 2 - \log 3 = \log\tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

MuPAD では e^x, $\log x$ はそれぞれ exp(x),ln(x) とかかれるので, 一致します。また，最後の 2 つの例のように，さらに簡単になるかもしれないので注意してください。simplify (式の簡略化), combine(,ln) ($\log x$ の項をまとめる), normal (通分), factor(因数分解) などを使って簡単にしてみましょう。また float(小数表示) を使うのも答えの見当をつけるのに役立ちます。

MuPAD は 置換積分・部分積分が必要な積分も簡単に解きます。同じく int を使うだけです。

$\int_1^e \frac{\sin(\pi \log x)}{x} dx$ は?	• `int(sin(PI * ln(x))/x, x = 1..E);`	>> $\frac{2}{\pi}$
$\int_1^e x^2 \log x dx$ は?	• `int(x ^ 2 * ln(x), x = 1..E);`	>> $\frac{2\exp(3)}{9} + \frac{1}{9}$

確かめましょう。$\pi\log x = t$ とおくと, $\frac{\pi}{x}dx = dt$, $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & e \\ \hline t & 0 & \to & \pi \end{array}$

$$\int_1^e \frac{\sin(\pi\log x)}{x}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

また,

$$\int_1^e x^2\log x dx = \int_1^e \Big(\frac{x^3}{3}\Big)'\log x dx = \Big[\frac{x^3}{3}\log x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \Big[\frac{x^3}{9}\Big]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

となり，確かに一致します。注10)

8.7 絶対値のついた積分

$|x|$(x の絶対値) は MuPAD では abs(x) と表します。しかし，MuPAD は整式の場合と異なり, いつでも正しい答えを与えるわけではありません。

$\int_0^\pi \lvert\cos x\rvert dx$ は?	• `int(abs(cos(x)), x = 0..PI);`	>> 2
$\int_0^{2\pi} \lvert\sin x + \cos x\rvert dx$ は?	• `int(abs(sin(x) + cos(x)), x = 0..2 * PI);`	>> $4\ 2^{\frac{1}{2}}$
$\int_0^{2\pi} \lvert 3\sin x + 2\cos x\rvert dx$ は?	• `int(abs(3 * sin(x) + 2 * cos(x)), x = 0..2 * PI);`	>> 0

実際やってみると、

$$\int_0^\pi |\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi(-\cos x)dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2$$

次の積分です。$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ だから, $x + \frac{\pi}{4} = t$ とおくと，$dx = dt$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2\pi \\ \hline t & \frac{\pi}{4} & \to & 2\pi + \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi}|\sin x + \cos x|dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi+\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}|\sin t|dt$$

ところが $\sin t$ の周期は 2π だから

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi+\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}|\sin t|dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin t|dt = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sin t dt = 2\sqrt{2}\Big[-\cos t\Big]_0^\pi = 4\sqrt{2}$$

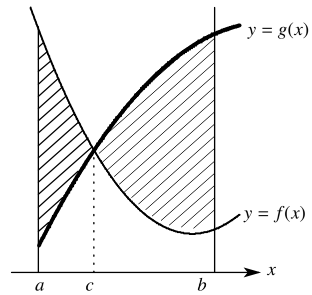
となり上の二つは一致しますが，明らかに最後の積分は間違っています。(2 番目の積分と同様に計算すると, $4\sqrt{13}$ になるはずです。) 注11) したがって, 絶対値がついている積分においては，結果を確かめたほうが良いでしょう。

注10) 部分積分・置換積分を MuPAD でやることもできます。後の節を見てください。
注11) これは $3\sin x + 2\cos x = 0$ の解が，簡単に表せないことと関係があると思われます。(解は $2\pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$, と$\pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$)

8.8 面積

右図のように $a \leqq x \leqq c$ で $g(x) \leqq f(x)$, $c \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq g(x)$ のとき，$x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた領域の面積の和を S とすると，

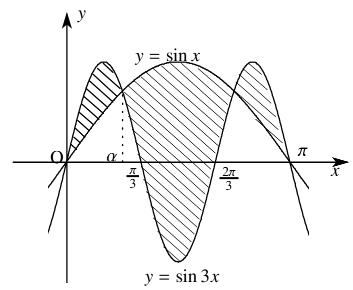
$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\}dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)|dx + \int_c^b |f(x) - g(x)|dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \end{aligned}$$



であるから，面積は $|f(x) - g(x)|$ の積分で与えられる。

例題

二つの曲線 $C_1 : y = \sin x (0 \leqq x \leqq \pi), C_2 : y = \sin 3x (0 \leqq x \leqq \pi)$ によって囲まれる面積 S を求めよ。



まず,MuPAD でやってみます。$S = \int_0^\pi |\sin 3x - \sin x|dx$ ですから次のように入力します。

- `int(abs(sin(3 * x) - sin(x)), x = 0..PI);` $\quad$ >> $\dfrac{8\,2^{\frac{1}{2}}}{3} - \dfrac{4}{3}$

次は手計算でやって見ます。

【解答】

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ における交点の x 成分を α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ とおくと，3 倍角の公式より

$$\sin\alpha = \sin 3\alpha \iff \sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \iff 4\sin^3\alpha - 2\sin\alpha = 0$$
$$\iff \sin\alpha\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ だから

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \alpha = \frac{\pi}{4}$$

C_1, C_2 は直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に関し対称だから

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_0^{\alpha}(\sin 3x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \sin 3x)dx \\
&= \Big[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cos 3\alpha + \cos\alpha\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + 0 - \left(\frac{1}{3}\cos 3\alpha - \cos\alpha\right) \\
&= -\frac{2}{3}\cos 3\alpha + 2\cos\alpha - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\cos\frac{3\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}
\end{aligned}$$

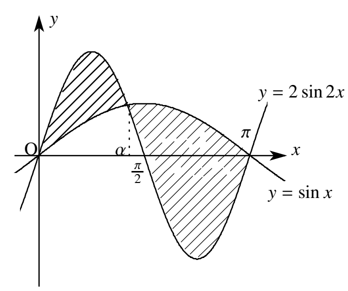
よって

$$S = 2\left(\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$

一致しました。[注12)] 次はどうでしょう？

例題

二つの曲線 $C_1: y = \sin x (0 \leqq x \leqq \pi), C_2: y = \sin 2x (0 \leqq x \leqq \pi)$ によって囲まれる面積 S を求めよ。



まず,MuPAD でやってみます。$S = \int_0^{\pi}|\sin x - 2\sin 2x|dx$ ですから次のように入力します。

- `int(abs(sin(x) - 2 * sin(2 * x)), x = 0..PI);` >> 2

次は手計算でやって見ます。

【解答】 $0 < x < \pi$ における交点の x 成分を α $(0 < \alpha < \pi)$ とおくと，倍角公式より

$$\sin\alpha = 2\sin 2\alpha \Longleftrightarrow \sin\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha \Longleftrightarrow \sin\alpha(1 - 4\cos\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\alpha}(2\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - 2\sin 2x)dx \\
&= \Big[-\cos 2x + \cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[-\cos x + \cos 2x\Big]_{\alpha}^{\pi} \\
&= (-\cos 2\alpha + \cos\alpha) - 0 + 2 - (\cos 2\alpha - \cos\alpha) \\
&= -2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 2 = -2(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos\alpha + 2
\end{aligned}$$

注12) この計算を，Maple という数学ソフトでやると $-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ となり一致しない。この問題に関しては MuPAD のほうが優れていることになる。

$\cos\alpha = \frac{1}{4}$ だから

$$S = -4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 = \frac{17}{4}$$

一致しません! **このように交点の x 成分が数字で表されないときは，MuPAD では間違いが起こるときがあります。**[注13)]

8.9 【参考】置換積分・部分積分

MuPAD で置換積分をするには intlib(integral library) を使います。ライブラリーというのは、もちろん図書館といういみで、普段使われないコマンドを ' 貯蔵' してあります。普段は stdlib(standard library; 標準ライブラリ) だけをメモリーにロードして、computer のリソースを節約しています。次の表で hold(); は式の展開を一時停止するコマンドで、hold() がないと、すでに積分された式を置換積分することになってしまいます。また、hold で止めていた演算を再開するのは eval(); 不定積分された式に変数を代入するのは subs(); です。[注14)]

$\int f(x)dx$ を $x = g(t)$ で置換積分	`intlib :: changevar(hold(int)(f(x), x), x = g(t));`
$\int_a^b f(x)dx$ を $x = g(t)$ で置換積分	`intlib :: changevar(hold(int)(f(x), x = a ..b), x = g(t));`
$\int f(x)g'(x)dx$ とみて, 部分積分	`intlib :: byparts(hold(int)(f(x) * g'(x), x), g'(x));`
$\int_a^b f(x)g'(x)dx$ とみて, 部分積分	`intlib :: byparts(hold(int)(f(x) * g'(x), x = a ..b), g'(x));`

[注15)]

8.9.1 置換積分 (不定積分)

$\int f(x)dx$ を $x = g(t)$ と置換積分するのは intlib::changevar(hold(int)(f(x),x),x=g(t)) とします。hold によって積分はまだ実行されていません。置換積分の実行は eval です。実行された積分を x の式に直すのは, `subs( , )` を使います。$\displaystyle\int x(1-x)^5 dx$ を $1 - x = t$ と置換してみます。

- `intlib :: changevar(hold(int)(x * (1 - x) ^ 5, x), 1 - x = t);` >> $int(t^6 - t^5, t)$;

hold があるので, t を使って書き直されただけです。$1 - x = t$ とおくと, $\int x(1-x)^5 dx = \int(t^6 - t^5)dt$ と置換積分できることを表しています。この置換積分を実行するには eval を使います。

- `eval(%);` >> $\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6}$

これで t の式に不定積分されました。もし x の式に直したいなら,subs(,) を使います

- `subs(%, t = 1 - x);` >> $\frac{(1-x)^7}{7} - \frac{(1-x)^6}{6}$

注13) ちなみに, 同じ問題を Maple で解かせても同じ間違いをします。$\cos x$ の逆関数 $\cos^{-1} x = \arccos x$ を利用して int(2*sin(2*x)−sin(x),x=0..arccos(1/4))+ int(sin(x)−2*sin(2*x),x=arccos(1/4))..PI) としてもうまくいきません。もしどうしても MuPAD で解きたいならば int(2*sin(2*x)−sin(x),x=0..a)+ int(sin(x)−2*sin(2*x),x=a..PI) としてから手動で やると良いでしょう。

注14) changevar(),bypart(),eval(),subs() はそれぞれ、change variable(変数を変換),integration by parts(部分積分), evaluate(評価する),substitute(置換・代入する) の略です。subs(f,x=a) で f に x=a を代入します。

注15) hold(); の括弧の位置を変えて、`intlib :: changevar(hold(int(f(x), x)), x = g(t));` などとしても大丈夫です。

8.9.2 置換積分 (定積分)

今度は定積分です。(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5dx$ を $1-x=t$ と置換してみます。

- `intlib` :: `changevar`(`hold`(`int`)(`x` $*$ (1 − `x`) `^ 5`, `x` = `0` ..1), 1 − `x` = `t`); $\quad$ >> $int(t^6-t^5, t=1..0)$;

$1-x=t$ とおくと, $\int_0^1 x(1-x)^5dx=\int_1^0(t^6-t^5)dt$ を表しています。変域が自動的に変わりました。eval() で値が求まります。

- $eval(\%)$; $\quad$ >> $\dfrac{1}{42}$

次は (2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ を $x=\tan t$ とおいて求めてみます。

- `intlib` :: `changevar`(`hold`(`int`)(1/(1 + `x ^ 2`), `x` = `0`..1), `x` = `tan`(`t`)); $\quad$ >> $int(1, t=0..PI/4)$;

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dt$ となることを示しています。eval を使って積分を実行します。

- `eval`(%); $\quad$ >> $\dfrac{PI}{4}$

実際、$x=\tan t$ とおくと, $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{4}\end{array}$, $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\cos^2 t$ であるから、

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cancel{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos^2 t}}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dt=\Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

8.9.3 部分積分

最後は部分積分です。2 つ目の引数を適切に選ばないともとの式より複雑になります。
(1) $\int x\cos x dx$ の部分積分をやってみます。$\int x\cos xdx=\int x(\sin x)'dx$ と見て積分するには、第 2 引数を $\cos x$ とします。

- `intlib` :: `byparts`(`hold`(`int`)(`x` $*$ `cos`(`x`), `x`), `cos`(`x`)); $\quad$ >> $x\sin(x)-int(sin(x),x)$

$\int x\sin xdx=x\sin x-\int\sin xdx$ を表しています。部分積分されました。eval で 2 つ目の積分を実行します。

- $eval(\%)$; $\quad$ >> $\cos(x)+x\sin(x)$

実際、

$$\int x\cos xdx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int(x)'\sin xdx=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x$$

で正しいです。しかし、$\int x\cos xdx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cos xdx$ と見て積分すると

- `intlib` :: `byparts`(`hold`(`int`)(`x` $*$ `cos`(`x`), `x`), `x`); >> $\dfrac{x^2\cos(x)}{2}-int\left(-\dfrac{x^2\sin(x)}{2},x\right)$

となりもとの式より複雑です。

(2) $I=\int e^x \sin x\,dx$ を部分積分してみます。$\int e^x \sin x\,dx = \int (e^x)' \sin x\,dx$ と見て積分すると，

- `I := intlib::byparts(hold(int)(exp(x)*sin(x),x),exp(x));`
  >> $\exp(x)*\sin(x) - \mathrm{int}(\exp(x)\cos(x), x)$

これは,$I=\int e^x \sin x\,dx = \int (e^x)' \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$ となることを表していて，確かに部分積分されました。eval() で評価してみると

- `eval(%);` >> $\frac{\sin(x)\exp(x)}{2} - \frac{\cos(x)\exp(x)}{2}$

いきなり答えが求まってしまいました！考えてみると，当たり前ですね。

8.9.4 まとめ

MuPAD は，微積分は非常に得意としています。絶対値がなく，積分区間が,0, $\frac{1}{2}$,π などの数字で与えられているときは, , たぶん正解を出してくると思います。しかし，絶対値があったり，積分区間が関数になっているときは, 間違いの起こる可能性が高いので注意が必要です。

でも, 高校生の段階では，MuPAD で計算するだけでなく自分の手でまず計算できるようにすることが, もっと大事です。MuPAD はあくまでも, 勉強の刺激として，または結果の検算として使ったほうがいいでしょう。