高校生のための MuPAD

- MuPAD Light 2.0 入門 -

生越 茂樹 (おごせ しげき)

2002 年 4 月 20 日

目次

1　基本操作と，数字の操作

注1)

1.1　MuPAD の立ち上げ方 (Windows の場合)

この節だけは Windows を使っている人向けです。でも，この節以外は Mac や Linux を使っている人でも，基本的には同じだと思います。さて，スタートボタンからプログラムをたどって，'MuPAD Light' をクリックしてください。MuPAD を頻繁に使う人は，'MuPAD Light' の上で右クリックして，"コピーする" を選ぶとショートカットが作られるので，次回からはそれをクリックするだけですみます。Mac や Linux は知らないので…

1.2　入力の仕方

立ち上げると窓が開きます。'•' が点滅している右横に入力します。[注2)]
このとき必ず**半角で**入力してください。MuPAD はドイツ生まれのソフトなので，日本語のフォントは読めません。間に空白を入れても大丈夫ですが，途中で改行したいときは Shift key を押しながら，Return key を押してください。また MuPAD では大文字と小文字を区別しますから注意しましょう。さらに，残念ながら MuPAD では 1 度 Return key を押してしまった入力は変更できません。どうしても変更したいときは，cut&paste で新たに次の行に入力するしかありません。直前に出力された式を，入力したいときは, % を使います。

1.3　ファイルの保存

MuPAD で作ったファイルを保存するには，tool bar の一番左から'file' を選んで，'SaveAs' をクリックします。残念ながら MuPAD Light のでは text file としてしか保存できません。次回も同じところから再開したいときは，その text file を開いて，MuPAD の window に，cut&paste (コピーして張り付け) します。[注3)]

注1) この章の内容は，高校の教科書で言えば「実数や有理数の定義の章」みたいなもので，始めはよく解らなくとも流して読んでおけばいいです。できるだけ完全 (?) なものをという，私の精神安定剤みたいなものです。

注2) 最初の設定だと，赤色の丸に，赤色の文字になっているはずです。色を変えたいときは 窓の上の tool bar から，View ⟶ Options ⟶ Font ⟶ InputRegion とたどっていって，色を変えることが出来ます。OutputRegion では, 結果の表示の色やフォントの大きさが変わります。

注3) MuPAD Pro の方は，notebook として保存できるみたいです。(私は持っていないので, よく知りませんが...)

1.4　ヘルプの見方

Tool bar の一番右の Help から'Brouse Manual' を選択します。これは tool bar の下にある双眼鏡のマークをクリックしても大丈夫です。英語で書いてありますから，英語の勉強にもなります。

1.5　加減乗除

$a+b$	`a + b`
$a-b$	`a - b`
$a\times b$	`a * b`
$\frac{a}{b}$	`a/b`
a^n	`a ^ n`

では，まず簡単な計算からやってみましょう。
$+, -, \times, \div$, 累乗はそれぞれ $+, -, *, /, \wedge$ を使います。式を入力したら，最後を「;」で終らせ,「Enter」を押してください。[注4] 以下，計算したい数式を一番左に "?" をつけて表し，入力する式を ● の横に書きます。Enter を押すと >> の右横の式が表示されるはずですが，MuPAD Light は Windows の標準フォントしか使わないので実際に画面に表示される式は異なって見えるはずです。
【例】

計算したい数式	入力	出力
$3+\dfrac{4}{3}$ は?	● $3+4/3$;	>> $\dfrac{13}{3}$
$3-(2\times 3)$?	● $3-(2*3)$;	>> -3
2^3 は?	● $2\ \wedge\ 3$;	>> 8
2^{50} は?	● $2\ \wedge\ 50$;	>> 1125899906842624
$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ は?	● $(2/3)\ \wedge\ (-2)$;	>> $\dfrac{9}{4}$

(-2) のように括弧がいる事を忘れないでください。

$(2^3)^2$ は?	● $(2\ \wedge\ 3)\ \wedge\ 2$;	>> 64
2^{3^2} は?	● $2\ \wedge\ (3\ \wedge\ 2)$;	>> 512
$2^4\times 3$ は?	● $2\ \wedge\ 4*3$;	>> 48
$3\div 2^3$ は?	● $3/2\ \wedge\ 3$;	>> $\dfrac{3}{8}$

このように，累乗は積や商より優先します。*MuPAD* では，文字式の計算も出来ます。このとき，**乗法記号 (∗) は省略できない**ことに注意してください。

$3x+2-(2x-3)$?	● $3*x+2-(2*x-3)$;	>> $x+5$
$\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{2x}{3}$?	● $(x+2)/2-(2*x)/3$;	>> $\dfrac{-x+6}{6}$

[注4] このとき最後を「:」で終わらせると，MuPAD は計算はしますが表示はしません。

1.6 小数表示

小数表示	float( )
表示桁数をnへ変更	DIGITS:= n

いま見たように MuPAD は電卓と違い $3 + \frac{4}{3} = 4.3333333$ としません。ちゃんと正確に答えを出してくれます。でも「MuPAD を電卓のように使いたい」というときは float( ); というコマンドを使います。例えば次のようにします。

$\frac{4}{3}$ の小数表示は?	• float(4/3);	1.333333333
$\frac{40}{3}$ の小数表示は?	• float(40/3);	13.33333333
$\frac{400}{3}$ の小数表示は?	• float(400/3);	133.3333333

全部の数字の数は，10 個で同じですが，小数点の位置が移動しているのがわかりますね？実はこのような小数点表示は「浮動小数」と呼ばれます。これが float() の名前の由来です。このように MuPAD のコマンド名を覚えることによって英語の勉強にもなります?! MuPAD では最初の設定 (Default) では有効数字桁数が 10 に設定されています。これを例えば 20 に変えるには DIGITS:=20; というふうにします。[注5] このとき，’=’ ではなく’:=’ であることに注意してください。’:=’ は代入するときに使います。DIGITS:=20; は「DIGITS という変数に 20 を代入せよ。」という意味です。[注6]

有効桁数を 20 桁にするには?	• DIGITS:=20;	>> 20
$\frac{4}{3}$ の小数表示?	• float(4/3);	>> 1.3333333333333333333

MuPAD では直前の結果の式を, ’%’ を使って表します。例えば,

$1 + \frac{4}{3}$?	• 1+4/3;	>> $\frac{7}{3}$
$1 + \frac{4}{3}$ の小数表示?	• float(%);	>> 2.3333333333333333333

% は直前の結果の式;$\frac{7}{3}$ を表しています。また，以前に DIGITS:=20 と入力したのはまだ有効です。

1.7 数学定数

MuPAD では特に大切な定数の値は，次のように定まっています。[注7]

π(円周率)	PI
e(自然対数の底)	E
i(虚数単位)	I
∞(無限大)	infinity

[注5] digit は桁という意味です

[注6] これに対し単なる’=’ はプログラミングするときに，’ 判断’ のとき使います。例えば，”if x = 20 then y := 0” なんて感じです。

[注7] e,i など，もし習っていない定数があれば，それは気にしなくても良い。また，大文字と小文字の区別に注意してください。

float() は数学定数にも使えます。以下，DIGITS:=10; を入力したとします。

πの小数点表示は?	• float(PI);	>> 3.141592654
e の小数点表示は?	• float(E);	>> 2.718281829

1.8 平方根 ($\sqrt{\ \ }$) の計算

注8)

平方根	sqrt( )
平方根の単純化 (分母の有理化など)	radsimp( )
(一般の式の) 単純化	simplify( )
式の展開	expand( )

注9) 平方根は,sqrt( ) を使います。

$\sqrt{5}\sqrt{5}$は?	• sqrt(5)*sqrt(5);	>> 5
$2\sqrt{18}+\sqrt{50}$は?	• 2*sqrt(18)+sqrt(50);	>> $11\ 2^{\frac{1}{2}}$

このように結果が累乗根の形で出ます。ちなみに $a>0, n, m$ が自然数のとき, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$(定義) で $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ となります。(数　) したがってこの結果は $11\sqrt{2}$ を表しています。(11 と $2^{\frac{1}{2}}$ の間の空白に注意してください.) 次は積です。

$\sqrt{8}\sqrt{14}$は?	• sqrt(8)*sqrt(14);	>> $2\ 2^{\frac{1}{2}}\ 14^{\frac{1}{2}}$

simplify( ) を使って簡単にしてみます。

上の式を簡単にすると?	• simplify(%);	>> $2\ 28^{\frac{1}{2}}$

少しは簡単になりました。もう一度やって見ます。

上の式を簡単にせよ?	• simplify(%);	>> $4\ 7^{\frac{1}{2}}$

やっと出来ました。 $\sqrt{8}\sqrt{14} = 4\sqrt{7}$ ですから合っています。今度は分母の有理化をやってみます。

$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$は?	• 1/(2+sqrt(3));	>> $\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}+2}$

今度は，radsimp( ) を使って簡単にします。

分母を有理化すると?	• radsimp(%);	>> $2-3^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$ なので合っています。radsimp( ),simplify( ) は二重根号をはずすときにも使えます。ただこの場合 case by case でどちらを使ったほうが良いかは簡単にはいえません。

$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$は?	• sqrt(8+2*sqrt(15));	>> $2^{\frac{1}{2}}\left(15^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$
二重根号をはずすと?	• radsimp(%);	>> $2^{\frac{1}{2}}\left(15^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

注8)　この節は数　の指数関数を習ってからでも良い

注9)　sqrt は "*square root*" の略で二重根号の意味です。(ちなみに　squar は 2 乗を意味します。) simplify( ) は文字どうり「( ) 内を simple にせよ」という意味で平方根のみならず様々な変形に使えます。radsimp( ) は "simplify radicals" の略で，radical はここでは' 根' という意味です。' 過激な' という意味ではありません。 expand は ' 引っ張る', ' 伸ばす' という意味ですね。ここでは ' 展開する' という意味になります。

ぜんぜん変わっていませんね。今度は simplify( ) でやってみましょう。

二重根号をはずすと?	• simplify(%);	>> $2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{10^{\frac{1}{2}}}{2}\right)$

$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{10^{\frac{1}{2}}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ なので合っています。でも解りにくいですね。今度は次の例でやって見ます。

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}$は?	• sqrt(12-6*sqrt(3));	>> $6^{\frac{1}{2}}\left(2-3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$
二重根号をはずすと?	• simplify(%);	>> $6^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6^{\frac{1}{2}}}{2}-\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}\right)$

もう一度 $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ を入力した後で，こんどは radsimp( ) でやってみます。

二重根号をはずすと?	• radsimp(%);	>> $3-3^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=3-\sqrt{3}\cdots(*)$ なので合っています。今度は radsimp( ) のほうが良かったみたいです。でも, ちょっと面倒だし, 結果もみづらいですね。どうやら二重根号をはずすのは，MuPAD でやるのはやめた方が良いみたいです。自分でやって検算に MuPAD を使いましょう。(∗) の結果を確認するのは, 次のようにします。

$(3-\sqrt{3})^2$は?	• (3-sqrt(3)) ^ 2;	>> $(3-3^{\frac{1}{2}})^2$

展開しましょう.

上の式を展開すると?	• expand(%);	>> $12-6\,3^{\frac{1}{2}}$

確かに正しいようです。この expand( ) と simplify( ) は平方根の計算以外にもいろいろ使えます。

1.9 複素数の計算

虚数単位	I
$a+bi(a,b$ 実数) の形に直す	rectform( )
実数部分	Re( )
虚数部分	Im( )

注10)

1.9.1 複素数の計算

複素数の計算は，虚数単位 i を I と打つだけです。このとき必ず大文字の I を使ってください。

i^2は?	• `I ^ 2 ;`	>> -1
$(2+3i)^2$は?	• (2 + 3 ∗ I) ^ 2 ;	>> $-5+12I$
$\frac{-i}{2+i}$は?	• (−I)/(2 + I);	>> $-1/5-2/5I$

注10) この節は数 II の複素数を習った人向けです。rectform は, rectangular form の略で , rectangular というのは' 長方形の' とか' 四角張った' という感じの意味です。

このように $a+bi(a,b$ は実数) の形に直してくれます。[注11)]

1.9.2 $\sqrt{-a}$ $(a>0)$ の表し方。

$\sqrt{-3}$ などは $\sqrt{3}i$ でなく，$I\,3^{\frac{1}{2}}$ のようになります。また $\sqrt{-3}$ は sqrt(−3) のようにうちます。

$\sqrt{-3}$は?	• `sqrt`(−3) ;	>> $3^{\frac{1}{2}}I$
$-\sqrt{-4}$は	• `-sqrt`(−4) ;	>> $-2I$

1.10 その他の基本演算 (一部のみ)

x の切り上げ	ceil(x)
x の切り捨て	floor(x)
x の四捨五入	round(x)
x の絶対値	abs(x)
$\{x_1,x_2,\cdots\}$ の最大値	max($\mathrm{x_1,x_2,\cdots}$)
$\{x_1,x_2,\cdots\}$ の最小値	min($\mathrm{x_1,x_2,\cdots}$)
nの階乗	n!または fact(n)
${}_m\mathrm{C}_n$	binomial(m,n)
n の素因数分解	ifactor(n)
$\{n_1,n_2,\cdots\}$ の最大公約数	igcd($\mathrm{n_1,n_2,\cdots}$)
$\{n_1,n_2,\cdots\}$ の最小公倍数	ilcm($\mathrm{n_1,n_2,\cdots}$)
$m\div n$ の商	m div n
$m\div n$ の余り	m mod n

[注12)] 上の表で m,n などは整数で，x, $\mathrm{x_1}$ などは実数です。(abs は複素数にも使えます。)

3.5 の切り上げは?	• ceil(3.5);	>> 4
3.5 の切り捨ては?	• floor(3.5);	>> 3
3.5 の四捨五入は?	• round(3.5);	>> 4
-5 の絶対値は?	• abs(-5);	>> 5
$\left\{\frac{5}{2},2.4,3\right\}$ の最大値は?	• max(5/2,2.4,3);	>> 3
$\left\{\frac{5}{2},2.4,3\right\}$ の最小値は?	• min(5/2,2.4,3);	>> 2.4
5! は?	• 5!;	>> 120
${}_5\mathrm{C}_3$ は?	• binomial(5,3);	>> 10
48 の素因数分解は?	• ifactor(48);	>> $2^4\ 3$
$\{12,30,48\}$ の最大公約数は?	• igcd(12,30,48);	>> 6
$\{12,30,48\}$ の最小公倍数は?	• ilcm(12,30,48);	>> 240

注11) ただし，いつでも直してくれるわけではありません。そのような時，$a+bi(a,b$ は実数) の形に直すには rectform() を使います。

注12) ceil は' 天井'，floor は' 床',round は' 丸める' ですからそれぞれ，切り上げ, 切り捨て，四捨五入の意味を持ってもおかしくないですね。abs は'absolute value(絶対値)' の略で fact は'factorial(階乗)' の略で,binomial は 2 項係数の意味。integer は整数という意味なので，ifactor で整数の因数分解ということです。igcd は'greatest common divisor of integers',ilcm は'least common multiple of integers' の略です。div は divide の，mod は modulus の略です。

mod と div のみ使い方が異なります。

30 を 8 で割ったときの商は?	• 30 div 8;	>> 3
30 を 8 で割ったときの余りは?	• 30 mod 8;	>> 6

2　文字式の操作

2.1　整式・分数式の計算

展開	expand( )
因数分解	factor( )
単純化	simplify( )
x の多項式 $f(x)$ を x に関し整理	collect(f(x) ,x)
展開し，結果を既約分数にする。	normal( )
整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割ったときの商と剰余	divide(f(x),g(x))
多項式 f(x,y) を多項式 g(x,y) で割ったときの 商と剰余を x についての整式と見て求める。	divide(f(x),g(x),[x])

注13)

この節は特にたくさんあるので, 軽く流して見て後で必要になったら辞書代わりに使いましょう。例を見て見ましょう。

2.1.1　整式の展開・因数分解

$(x^2-4x+5)(x^2-3)$ は?　• `(x ^ 2 - 4x + 5) * (x ^ 2 - 3);`　>> $(x^2-4x+5)(x^2-3)$

展開するには expand( ) を使います。

上の式の展開は?　• `expand(%);`　>> $12x+2x^2-4x^3+x^4-15$

$(a+b+c)^2$の展開は?　• `expand((a + b + c) ^ 2);`　>> $2ab+2ac+2bc+a^2+b^2+c^2$

a に関し整理したいときは collect(,a) を使います。

a に関し整理すると?　• `collect(%, a);`　>> $2bc+a^2+b^2+c^2+a(2b+2c)$

因数分解には factor( ) を使います。

上の式の因数分解は?　• `factor(%);`　>> $(a+b+c)^2$

確かにもとの式に戻りました。いろいろ因数分解してみましょう。

x^4-8x^2-9 の因数分解は?

• `factor(x ^ 4 - 8 * x ^ 2 - 9);`　>> $(x-3)(x+3)(x^2+1)$

$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2$ の因数分解は?

• `factor(x ^ 2 + 4 * x * y + 3 * y ^ 2 + x + 5 * y - 2);`　>> $(x+3y-1)(x+y+2)$

注13)　factor は' 約数' の意味です。また collect は' 集める'，divide は' 割る' という意味ですね。

検算してみます。2 変数の場合は，次数の低い文字に関し整理するのでした。x に関し整理すると

$$x^2+4xy+3y^2+x+5y-2=x^2+(4y+1)x+(3y^2+5y-2)=x^2+(4y+1)x+(y+2)(3y-1)$$

さらに，たすぎ掛けをして $(x+3y-1)(x+y+2)$ となり一致します。実は，2 次式の場合は解の公式を使って，$ax^2+bx+c=0(a\fallingdotseq 0)$ の 2 解を α,β とするとき，

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解できます。(数　) しかし，じつは MuPAD は,5 次式以上でも (5 次以上の方程式では，解の公式は存在しない), 有理数係数の式に因数分解してくれます。

$x^5+x^4+2x^3+2x^2-3x-3$ の因数分解は?

- factor(x ^ 5 + x ^ 4 + 2 * x ^ 3 + 2 * x ^ 2 − 3 * x − 3);　　>> $(x-1)(x^2+3)(x+1)^2$

MuPAD は、解の公式を使わずに，どうやって解いているのでしょうか。われわれと同じように代入していっているのでしょうか？どうやら違うみたいです。[注14] これについては大学へ行ってから勉強してください。

2.1.2　整式の割り算

整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割ったときの商と余りは divide(f(x),g(x)) で求めます。

$2x^3-12x+9$ を $(x+3)$ で割ったときの商と余りは?

- divide(2 * x ^ 3 − 12 * x + 9, x + 3);　　>> $2x^2-6x+6,\ -9$

これは商が $2x^2-6x+6$, 余りが -9 ということです。

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 2x^2 & -6x & +6 \\ \hline
x+3 & 2x^3 & -12x & +9 \\
 & 2x^3+6x^2 & & \\ \hline
 & -6x^2-12x & & \\
 & -6x^2-18x & & \\ \hline
 & & 6x & +9 \\
 & & 6x & +18 \\ \hline
 & & & -9
\end{array}$$

2 変数の場合は, どの文字に関する式と考えるかによって結果が変わってきます。このような時は divide(f,g,[x]) のように変数を指定します。

$8x^3+y^3$ を x^2+y^2 で割ったときの商と余りを x の整式と見て計算すると?

- divide(8 * x ^ 3 + y ^ 3, x ^ 2 + y ^ 2, [x]);　　>> $8x,\ y^3-8xy^2$

$8x^3+y^3$ を x^2+y^2 で割ったときの商と余りを y の整式と見て計算すると?

- divide(8 * x ^ 3 + y ^ 3, x ^ 2 + y ^ 2, [y]);　　>> $y,\ 8x^3-x^2y$

$$\begin{array}{r|lll}
 & 8x & & \\ \hline
x^2+y^2 & 8x^3 & & +y^3 \\
 & 8x^3 & +8xy^2 & \\ \hline
 & & -8xy^2 & +y^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|ll}
 & y & \\ \hline
y^2+x^2 & y^3 & +8x^3 \\
 & y^3 & +x^2y \\ \hline
 & & 8x^3-x^2y
\end{array}$$

[注14] 立命館大学の倉田氏に教えていただきました。

2.1.3 分数式の計算

分数式を簡単にしたいとき (約分・通分) は normal( ) をつかいます。結果の式は展開されて表示されます。

$\frac{x^2+3x-4}{2x^2-4x+2}$ を約分してみましょう。

- `(x ^ 2 + 3 * x - 4)/(2 * x ^ 2 - 4 * x + 2);` >> $\dfrac{3x+x^2-4}{2x^2-4x+2}$
- `normal(%);` >> $\dfrac{x+4}{2x-2}$

$\frac{3x+x^2-4}{2x^2-4x+2} = \frac{(x+4)(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{x+4}{2(x-1)}$ ですから同じです。通分のときも使えます。

$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} - \frac{3x-2}{x^2-4}$ を通分した後，約分してみましょう。

- `(2 * x - 3)/(x ^ 2 - 3 * x + 2) - (3 * x - 2)/(x ^ 2 - 4);` >> $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2} - \dfrac{3x-2}{x^2-4}$
- `normal(%);` >> $\dfrac{4-x}{x+x^2-2}$
- `factor(%);` >> $-\dfrac{x-4}{(x-1)(x+2)}$

実際，

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} - \frac{3x-2}{x^2-4} = \frac{(2x-3)(x+2)-(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = -\frac{x^2-6x+8}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$
$$= -\frac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{(x-1)\cancel{(x-2)}(x+2)} = -\frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

ですから同じです。このように normal( ) は分母・分子を展開形にします。さらに，factor( ) を使うと，分母・分子を因数分解できます。

2.2 関数の定義, 変数の代入

(式) に y という名前をつける	`y := (式)`
関数 $f(x)$ を, y という名前をつけて定義する	`y := x -> f(x)`
関数 $f(x, y)$ を, z という名前をつけて定義する	`z := (x, y) -> f(x, y)`
f という式において，x に a を代入	`subs(f, x = a)`
f という式において，x に a, y に b を代入	`subs(f, x = a, y = b)`
代入した式 f の評価	`eval(f)`
定義 f の消去 (関数, 式とも)	`delete(f)`

注15)

注15) ’=’ でなく, ’ :=’ であることに注意。’ :=’ は変数に値を代入する。またはその変数を定義するときに使う。(GIDITS:=20 などと同じ) 関数の定義の’− >’ は, 矢印 (⟶) を表している。例えば，’$x \longrightarrow x^2$’ で，’x に x^2 を対応させる関数’ という感じになる。また， subs() は substitute(代入する) の略。eval() は evaluate(評価する) の略。

2.2.1 式に名前をつける.

式に名前をつけるのは':=' を使います。例えば x+y に f という名前をつけたいならば，f:= x+y とします。式に名前をつけるのは，同じ式を繰り返し用いたいとき (いろいろなコマンドを同じ式に作用させたいとき) です。例えば，前節で $\frac{3x+x^2-4}{2x^2-4x+2}$ を normal() を使って，約分させましたがもし，simplify() を使ったらどうなるか知りたいとします。このような時は適当な名前[注16)] を使って，次のようにすると入力が楽です。

$\frac{3x+x^2-4}{2x^2-4x+2}$ に f という名前をつける。

- `bunsu := (3*x+x^2-4)/(2*x^2-4*x+2);` $>> \dfrac{3x+x^2-4}{2x^2-4x+2}$

式の名前は出力されません。これを normal() で約分してみましょう。

- `normal(bunsu);` $>> \dfrac{x+4}{2x-2}$

これは前節で normal(%) とした結果と同じです。でも次にもとの分数式を，今度は simplify() を使って簡単にしてみましょう。

- `simplify(bunsu);` $>> \dfrac{x+4}{2x-2}$

二つは，同じ結果となりました。[注17)] もしここで simplify(%) では (直前の式)= $\frac{x+4}{2x-2}$ を simplify する事になりますので，比較したことにはなりません。

2.2.2 関数に名前をつける。

[注18)] 関数を定義しておくと，グラフを描いたり，いろいろな数字を代入したい時に便利です。関数の定義は矢印 '−>' を使います。例えば $f(x) = x^2$ という関数を， nijo という名前をつけて，定義したいならば

- `nijo := x -> x^2;` $>> x \longrightarrow x^2$

2 つ以上の変数のときも同様です。x と y の関数として $\frac{x+y}{2}$ を heikin と名をつけて定義するのは，次のようにします。

- `heikin := (x,y) -> (x+y)/2;` $>> (x, y) \longrightarrow \dfrac{x+y}{2}$

2.2.3 代入

式への代入は，subs (f,x=a),subs(f,x=a,y=b) を用います。[注19)] 一方，関数 f(x) に x=a を代入したい時は，単に f(a); とするだけです。

注16) MuPAD により予約されている名前 (PI,simplify など) と，最初に数字が来る名前 (1x など),_ 以外の記号などを使った名前は定義できません。数字が後に来る場合 (x1 など) や,_を使った名前 (x_1 など) は大丈夫です。

注17) 実は約分に関しては simplify と normal は同じになることが多いみたいです。

注18) 同じ数式 $f(x)$ を，関数としても，式としても定義できます。代入したり，グラフを描いたりしたいときは関数として定義しておくと良いでしょう。一方, 前節のように $f(x)$ そのものをさらに変形したいようなときは，単に式に名前をつけておくのが良いでしょう。

注19) subs(f,x=a,y=b) は a⟶ b,b⟶c などという代入をするのでなければ,subs(f,[x=a,y=b]), subs(f,{x=a,y=b}) と書いても同じです。

$\frac{x+y}{x-y}$ を' 式' と考え, f と名前をつけて，いろいろな値を代入してみましょう。

- `f := (x + y)/(x − y);` >> $\dfrac{x+y}{x-y}$

まず x=1 を代入してみましょう。

- `subs(f, x = 1);` >> $\dfrac{1+y}{1-y}$

次は x= 0 を代入してみましょう。

- `subs(f, x = 0);` >> -1

$x = 0$ のとき, $\frac{x+y}{x-y} = \frac{y}{-y} = -1$ ですから合っています。次は,x=1,y=2 を代入してみます。

- `subs(f, x = 1, y = 2);` >> -3

文字式を代入することも出来ます。x に a^2, y に a を代入してみましょう。

- `subs(f, x = a ^ 2, y = a);` >> $\dfrac{a+a^2}{a^2-a}$ • `normal(%);` >> $\dfrac{a+1}{a-1}$

このように，代入した式は普通の式と同様に扱えます。

これに対し，関数として名前をつけると，代入は普通のコマンドとまったく同様にできます。先ほど定義した nijo := x −> x ^ 2; と heikin := (x,y) −> (x+y)/2; を使ってやってみましょう。

- `nijo(4);` >> 16
- `heikin(4, 8);` >> 6

4 の 2 乗は 16 で，4 と 8 の平均は 6 ですね。このようにまったく普通のコマンドと同じように扱えます。文字を代入することも出来ます。

- `heikin(2 * a + 3, 6 * a + 1);` >> $4a + 2$

確かに，$\frac{(2a+3)+(6a+1)}{2} = 4a + 2$ ですね。

注20)

注20) subs(f,x=a) と f(a) は，ほとんど同じですが次のような場合は違います。

- `subs(sin(x)), x = PI;` >> $sin(PI)$

このような場合は eval() を使って，評価してください。

- `eval(%);` >> 0

2.2.4 関数にするか，式にするか?

今までにも述べましたが，いろいろな変形をしたいときは式として定義し，グラフを描いたり，代入したりしたいときは関数として定義すると良いでしょう。一度，関数として定義すると，その内容は変えることができません。

- `kansu := x-> x+4-5;` $>> x \longrightarrow x+4-5$
- `simplify(%);` $>> x \longrightarrow x+4-5$

このように全く変わりません。これに対し式として定義すると

- `siki := x+4-5;` $>> x \longrightarrow x-1$

初めから簡単になっています。先に見たようにこの後の変形も自由です。

2.2.5 定義の消去

定義が残っていると，エラーのでることがあります。このような時は，delete() で定義を消去します。

- `y := x ^ 2;` $>> x^2$

このように y を定義したことを忘れて，うっかり y を含んだ式を計算させると，結果がおかしくなります。

- `expand((y+x) ^ 2);` $>> x^2+2x^3+x^4$

$y=x^2$ なので，$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ にはなりません。$(x+x^2)^2=x^4+2x^3+x^2$ になります。y の定義を消去してから，もう一度やってみましょう。

- `delete(y): expand((x+y) ^ 2);` $>> 2xy+x^2+y^2$

注21)

2.2.6 【参考】継ぎはぎ関数の定義

$f(x)=\begin{cases} x<0\ \text{のとき} & -x \\ x \geqq 0\ \text{のとき} & x^2 \end{cases}$ のような，いわゆる継ぎはぎ関数の定義には piecewise([$\mathtt{f}_1$], [$\mathtt{f}_2$], $\cdots$) を使います。例えば，上の関数を f という名前をつけて定義するには, 次のようにします。

- `f := piecewise([x < 0, - x], [0 <= x, x ^ 2]);` $>> -x$ if $x<0$, x^2 if $0 <= x$

ここで矢印 (− >) を入れて，x− >piecewise としないでください。

注21) いろいろな定義を一度に全て消去したいときは，reset(); を使います。( ) 内は空白。

2.3 【参考】変数の条件設定と変数のタイプ

$x > a$ と条件設定	`assume(x > a)`
$x \geqq a$ と条件設定	`assume(x >= a)`
$x < a$ と条件設定	`assume(x < a)`
$x \leqq a$ と条件設定	`assume(x <= a)`
$a < x < b$ と条件設定	`assume(a < x < b)`
条件 B を追加し，B との共通集合に変更	`assume(B, _and)`
条件 B を追加し，B との和集合に変更	`assume(B, _or)`
x を, Type :: *name* というタイプに設定	`assume(x, Type :: name)`
x の設定解除	`delete(x);`

タイプ	Type :: name
実数	`Type :: Real`
有理数	`Type :: Rational`
複素数	`Type :: Complex`
整数	`Type :: Integer`
偶数	`Type :: Even`
奇数	`Type :: Odd`

[注22] MuPAD では変数のタイプがいろいろあり，文字を使った計算では思った結果が出ないことがあります。例えば abs(x ∧ 2); としても x にはなってくれません。[注23] これは MuPAD のほうで, x が正の数なのか, 負の数なのか, はたまた複素数なのか解らないからです。このような時は,assume() を使って条件を設定します。

$x > 0$ と設定するには?	• `assume(x > 0);`	>> > 0
このとき, $|x|$ は?	• `abs(x);`	>> x
$x < 0$ と設定するには?	• `delete(x) : assume(x < 0);`	>> < 0
このとき, $|x|$ は?	• `abs(x);`	>> $-x$

delete() で先の条件を消去してから, 新たに条件を設定しました。[注24] 条件を追加するときは _and と _or のオプションを指定します。それぞれ前の条件との共通集合, 和集合を作ります。

- `assume(x > 0) : assume(x < 5, _and);` >>]0, 5[of Type::Real

]0,5[で $0 < x < 5$ を表します。ちなみに [0,5] で $0 \leqq x \leqq 5$ を表します。Type::Real というのは実数タイプということです。$x > 0$ と $x < 5$ の共通部分ですから $0 < x < 5$ となります。これは次のように設定したのと同じです。

- `assume(0 < x < 5);` >>]0, 5[of Type::Real

今度は和集合を見て見ます。

- `assume(x > 0) : assume(x < 5, _and);` >>]0, 5[of Type::Real

[注22] 例えば，$x \geqq 0$ は x>=0 とします。x=>0 と順序を逆にするとエラーになります。(コンピュータは頭が固い？) また他にもいろいろタイプがあります。

[注23] abs(x) で x の絶対値という意味ですね (前節参照)

[注24] 普通は delete(x) なしで，そのまま入力しても大丈夫ですが，まれにうまくいかないときがあります

に続けて次のように打ち込みます。

- $\texttt{assume}(\texttt{x} > \texttt{10}, \_\texttt{or});$ >> > 10 or $]0, 5[$ of Type::Real

これは $x > 10$ または $0 < x < 5$ という事です。

- $\texttt{assume}(\texttt{x} < \texttt{20}, \_\text{and});$ >>$]0, 5[$ $\texttt{of Type} :: \texttt{Real or}$ $]\texttt{10}, \texttt{20}[$ $\texttt{of Type} :: \texttt{Real}$

これは $0 < x < 5$ または $10 < x < 20$ という事です。

次の例として，x, y 実数のとき，$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ を考えて見ましょう。この場合は，「x,y が実数」という設定なので，先のようにやるのはちょっと面倒です。このような時は，タイプ変数 (Type::*name*) を使ってタイプを指定します。[注25)]

- $\texttt{assume}(\texttt{x}, \texttt{Type} :: \texttt{Real}) : \texttt{assume}(\texttt{y}, \texttt{Type} :: \texttt{Real});$ >> $\texttt{Type} :: \texttt{Real}$
- $\texttt{1}/(\texttt{x} + \texttt{y} * \texttt{I});$ >> $\dfrac{1}{x + \mathrm{I}y}$
- $\texttt{rectform}(\%);$ >> $\dfrac{x}{x^2 + y^2} + \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)\mathrm{I}$

z を $x + iy(x, y$ 実数) の形にするのは rectform(z) を使います。(複素数の計算の節参照) この他にもいろいろなタイプ変数があり，和集合, 共通集合の作り方も同じです。

注25) assume(x>=0): assume(x<0,_or); とすれば良いはずですが..

3　整式の方程式，不等式

方程式 $f=0$ を x に関し解く	solve(f=0,x)
不等式 $f>0$ を x に関し解く	solve(f>0,x)
連立方程式 $f=0, g=0$ を x,y に関し解く	solve({f=0,g=0},{x,y})
連立不等式 $f>0, g>0$ を x,y に関し解く	solve({f>0,g>0},{x,y})
解の小数近似 (解が $x=\cdots$ の形で求まっている時)	float( )
解の小数近似 (RootOf の形でしか求まっていない時)	map(,float)

$a>b$	a>b
$a<b$	a<b
$a \geqq b$	a>=b
$a \leqq b$	a<=b
$a \neq b$	a<>b

注26)

3.1　一元方程式

方程式の解を求める事が出来ます。solve(方程式, 未知数の指定); のように書きます。例を見て見ましょう。

$x^2-3x+2=0$ の解は?

• `solve(x ^ 2 - 3 * x + 2 = 0, x);`　　>> $\{1,2\}$

$x^2-3x+1=0$ を x に関して解くと解が $\{1,2\}$ ということです。ここで，{ } は集合を表す記号です。注27)
根号が出てくるような方程式も解けます。ただし、$\sqrt{a}$ は $a^{\frac{1}{2}}$ のように出力されます。

$2x^2-5x+1=0$ の解は?

• `solve(2 * x ^ 2 - 5 * x + 1 = 0, x) ;`　　>> $\left\{5/4-\dfrac{17^{\frac{1}{2}}}{4}, 5/4+\dfrac{17^{\frac{1}{2}}}{4}\right\}$

虚数解も出せます。虚数単位は I と示されます。$2x^2+3x+4=0$ の解は?

• `solve(2 * x ^ 2 + 3 * x + 4 = 0, x) ;`　　>> $\left\{-\dfrac{1}{4}I\,23^{\frac{1}{2}}-3/4, \dfrac{1}{4}I\,23^{\frac{1}{2}}-3/4\right\}$

上の答えはそれぞれ学校では、$\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$, $\frac{-3\pm\sqrt{23}i}{4}$ と書かれます。確かにちょっと答えは見づらいですね。

x と書くのが面倒ですか？実は 1 変数のときは、未知数の指定は省略できます。

$x^2-3x+2=0$ の解は?

• `solve(x ^ 2 - 3 * x + 2 = 0);`　　>> $\{[x=1],[x=2]\}$

注26) 3 変数以上の場合も同様。変数の指定は省略できることが多い。default では, solve(f(x),x) は平方根と虚数単位 i を使って表せる解以外は RootOf(f) の形で表す。これを n 乗根 ($n \geqq 3$) を使った解が欲しいときは，solve(f, MaxDegree=n) のように MaxDegree(最大次数) を指定する。なお，solve は三角方程式など他の方程式・不等式も解ける。(三角関数・指数対数の章参照)

注27) 解は「$x=1$ または $x=2$」で $x=1$ と $x=2$ の順序は関係ない (組み合わせ) ですね。こういう時に { } 記号を使います。これに対し順列の場合は [ ] を使います。

しかし2つ以上の変数があるときは、当然ながら省略できません。例えば，$2x+y=1$ を x に関し解くには?

- solve(x + 2 * y = 1, x) ; >> $\{1-2y\}$

$2x+y=1$ を y に関し解くには?

- solve(x + 2 * y = 1, y) ; >> $\left\{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right\}$

このようにそれぞれの文字に関し解かれます。

３次以上の方程式も同様に解けます。$x^4-x^3-2x^2+x+1=0$ の解は?

- solve(x ^ 4 - x ^ 3 - 2 * x ^ 2 + x + 1 = 0, x) ; >> $\left\{-1, 1, \frac{1}{2}-\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{1}{2}\right\}$

学校では, 因数定理を使って解きますね。$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$ とおくと,

$$f(1)=1-1-2+1+1=0,\ f(-1)=1+1-2-1+1=0$$

よって，$f(x)$ は $(x-1)$ と $(x+1)$ を因数にもつ。$f(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割って,

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-1)$$

ゆえに，$f(x)=0$ とおくと

$$x=\pm1,\ \text{または},\ x^2-x-1=0 \Longleftrightarrow x=\pm1,\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

とやればよかったですね。$5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ ですから確かに結果は一致します。

3.2　一元不等式

不等式も, 方程式と同じように解けます。ただ，≦, ≧ などはキーボードにないので <=, >= のように入力します。[注28)]

$x^2-3x+2<0$ の解は?

- solve(x ^ 2 - 3 * x + 2 < 0, x); >>]1, 2[

$x^2-3x+2 \leqq 0$ の解は?

- solve(x ^ 2 - 3 * x + 2 <= 0, x); >> [1, 2]

ここで，]1,2[は $1<x<2$,[1,2] は $1 \leqq x \leqq 2$ を表します。[注29)]

区間が無限に広い場合は infinitity(∞) と, −infinity(−∞) を使って示されます。

注28)　まちがって =< のように入力するとエラーがでます。「大切なものを先に書く」と覚えておくと良いでしょう。

注29)　]1,2[のように書いてあると，[1,2] ($1 \leqq x \leqq 2$) より区間が少し狭い感じがしますね？

$x^2 > 4$ の解は?

$$\bullet\ \texttt{solve(x ^ 2 > 4, x);}$$

x in]-infinity, -2[union]2, infinity[

union というのは和集合の意味です。ですから，$-\infty < x < -2$ または $2 < x < \infty$ ということです。ちょっと見づらいですね。

方程式では, 虚数解も自動的に出ましたが, 不等式では変数は実数に制限されます。

$x^2 + 1 < 0$ の解は?

$\bullet$ `solve(x ^ 2 + 1 < 0, x);` >> { }

これは空集合を表していて, 解なしということです。[注30] しかし，等号を含んだ不等式に関しては，MuPAD は間違いを犯します。

$x^2 - 2x + 1 \leqq 0$ の解は?

$\bullet$ `solve(x ^ 2 - 2 * x + 1 <= 0, x);` >> { }

$x^2 - 2x + 1 \leqq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 \leqq 0$ ですから, 正解は $x = 1$ のはずです。しかし MuPAD は' 解なし' といいます。このように **MuPAD も間違いを犯すので, 自分で結果を確かめることが絶対必要**です。

3.3 連立方程式

連立方程式も, 同様に解くことが出来ます。方程式をまとめて { } の中に入れるだけです。[注31]

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ の解は?

$\bullet$ `solve({x + y = 2, x - y = 0});` >> {[x = 1, y = 1]}

$\begin{cases} x + y + z = 2 & \cdots ① \\ x^2 + y^2 + y^2 = 14 & \cdots ② \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 & \cdots ③ \end{cases}$ の解は?

$\bullet$ `solve({x + y + z = 2, x ^ 2 + y ^ 2 + z ^ 2 = 14, x ^ 3 + y ^ 3 + z ^ 3 = 20});`

>> {[x = 1, y = −2, z = 3], [x = 1, y = 3, z = −2], [x = −2, y = 1, z = 3],
[x = −2, y = 3, z = 1], [x = 3, y = 1, z = −2], [x = 3, y = −2, z = 1]}

注30) 例えば，$(2i)^2 + 1 = -4 + 1 < 0$ なので $x = 2i$ なども解のはずですが, 実数解しか MuPAD は出しません。

注31) { } は集合を表します。

実際，$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ だから，①,② より，

$$2^2 = 14 + 2(xy+yz+zx) \Longleftrightarrow xy+yz+zx = -5 \qquad \cdots ④$$

$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ だから①,②,③,④ より，

$$20 - 3xyz = 2\cdot\{14-(-5)\} \Longleftrightarrow xyz = -6 \qquad \cdots ⑤$$

①, ④, ⑤より x, y, z を解に持つ方程式は

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0 \Longleftrightarrow (t-1)(t-3)(t+2) = 0 \Longleftrightarrow t = 1, 3, -2$$

よって方程式の解の集合は

$$\{x, y, z\} = \{1, 3, -2\}$$

確かに, 一致する。もう一問やってみましょう。

例題

相異なる実数 x, y が

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = 4x - 1 & \cdots ① \\ y^3 - x^2 = 4y - 1 & \cdots ② \end{cases}$$

をみたしている。

(1) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 4$ であることを示せ。

(2) x, y の値を求めよ。

まずは，学校で解くように解いて見ましょう。対称性を利用します。

【解答】

(1)① − ② より

$$(x^3 - y^3) + (x^2 - y^2) = 4(x-y) \Longleftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(x+y) = 4(x-y)$$

$x - y \fallingdotseq 0$ だから

$$x^2 + xy + y^2 + x + y = 4 \qquad \text{【証明終】}$$

(2) $x + y = u,\ xy = v$ とおくと，(1) より

$$(u^2 - v) + u = 4 \Longleftrightarrow v = u^2 + u - 4 \qquad \cdots ③$$

① + ② より

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 - (x^2 + y^2) = 4(x+y) - 2 \\ \Longleftrightarrow\ & (x+y)^3 - 3xy(x+y) - \left\{(x+y)^2 - 2xy\right\} = 4(x+y) - 2 \\ \Longleftrightarrow\ & u^3 - 3uv - (u^2 - 2v) = 4u - 2 \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

③,④ より

$$\begin{aligned} u^3 - 3u(u^2+u-4) - u^2 + 2(u^2+u-4) - 4u + 2 = 0 &\Longleftrightarrow u^3 + u^2 - 5u + 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (u-1)^2(u+3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = 1, u = -3 \end{aligned}$$

③ より u, v の値は

$$(u, v) = (1, -2) \text{ または } (-3, 2) \qquad \cdots ⑤$$

(i) $(u, v) = (1, -2) \Longleftrightarrow x + y = 1, xy = -2$ のとき,

$$(x, y) = (2, -1),\ (-1, 2)$$

(i) $(u, v) = (-3, 2) \Longleftrightarrow x + y = -3, xy = 2$ のとき,

$$(x, y) = (-2, -1),\ (-1, -2)$$

以上から求める解は

$$(x, y) = (2, -1), (-1, 2), (-2, -1), (-1, -2) \qquad \cdots (\text{答})$$

次はこれを MuPAD で解いてみます。

$$\begin{cases} x^3 - y^2 &= 4x - 1 \cdots ① \\ y^3 - x^2 &= 4y - 1 \cdots ② \end{cases} \quad \text{の解は?}$$

- `solve({x ^ 3 − y ^ 2 = 4 ∗ x − 1, y ^ 3 − x ^ 2 = 4 ∗ y − 1});`

>> $\{[x = -1, y = -2], [x = -1, y = 2],\ [x = -2, y = -1], [x = 2, y = -1],$

$[x = y, y = \text{RootOf}(\ X28)^3 - (X28)^2 - 4(X28) + 1, X28)]\}$

注32)

3.4 【参考】RootOf と MaxDegree

ここで RootOf(f,x) というのは x が f=0 の解 である事を表しています。すなわち，$x = y$, かつ, y が 3 次方程式; $y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ の解であるというのと同じです。実際，もし $x = y$ とすると, ① より $y^3 - y^2 = 4y - 1 \Longleftrightarrow y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ となります。MuPAD は，特に指定しなければ，平方根と虚数単位 i を使って表せる解以外は Roofof( ) の形で表示します。もし，n 乗根 ($n \geqq 3$) まで使った解が欲しいときは，solve(f,MaxDegree=n) のように MaxDegree=n というオプションを指定します。$y^3 - y^2 - 4y + 1 = 0$ の 3 乗根まで使った解を求めてみましょう。

- `solve(y ^ 3 − y ^ 2 − 4 ∗ y + 1 = 0, y, MaxDegree = 3);` >> 超長〜い解

結果はでましたが, 長すぎて書ききれません。別の 3 次方程式でやってみます。$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$ を解いてみます。

- solve(x ^ 3+3*x ^ 2+9*x+5=0,MaxDegree=3);

$$>> x = 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2} - 1, x = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4} - \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2} - 1 - \frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}} + \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right),$$

$$x = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{4} - \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2} - 1 + \frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}} + \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right)$$

確かに実数解が１つと, 互いに共役な複素数が２つでました。４次までは解の公式があるので, このように累乗根を使えば解は求まります。３次，４次方程式の解の公式は，超なが〜いのでここでは省略します。

注32) (X28) の括弧は, 解りやすくするために，私が入れました。(X28) というのは MuPAD が勝手に振ってくる変数名です。多分, その日,28 番目に MuPAD が利用した変数なのでしょう。

3.5　【参考】解の小数近似

先のように，超なが〜い解が出てきた時は, 小数近似をすると解の見当がつきます。解の近似値を求めるには, 解が求まっているときは float( ) を，RootOf() の形でしか求まっていないときは, map(,float) を使います。[注33] 先の方程式;$x^3+3x^2+9x+5=0$ の近似解を求めてみます。

- solve(x ^ +3*x ^ 2+9*x+5=0,MaxDegree=3);

$$>> x=4^{\frac{1}{3}}-\frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}-1, x=\frac{4^{\frac{2}{3}}}{4}-\frac{4^{\frac{1}{3}}}{2}-1-\frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}}+\frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right),$$
$$x=\frac{4^{\frac{2}{3}}}{4}-\frac{4^{\frac{1}{3}}}{2}-1+\frac{I}{2}3^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{3}}+\frac{4^{\frac{2}{3}}}{2}\right)$$

この例では，曲がりなりにも $x=\sim$ の形で解が求まっています。このような時は,float で大丈夫です。

- float(%);

>> $\{[x=-0.6725199979], [x=-1.163740001-2.465853273I], [x=-1.163740001+2.465853273I]\}$

先ほどの $y^3-y^2-4y+1=0$ の解はどうでしょうか？

- solve(y ^ 3 − y ^ 2 − 4 ∗ y + 1 = 0);　　>> y in RootOf($(X9)^3-(X9)^2-4(X9)+1, X9$)

このような時は，map を使います。

- map(%, float);　　>> y in $\{-1.699628148, 0.2391232783, 2.46050487\}$

３つとも，実数解でした。

3.6　【参考】解の範囲の指定

solve() は，虚数解も求めます。もし，実数解のみが欲しいときは，assume( ) を使って，
assume(x,Type::Real) のように指定します。[注34]

$x^2+1=0$ の実数解は?

• assume(x, Type :: Real) : • solve(x ^ 2 + 1 = 1) ;　　>> { }

これは空集合，すなわち’ 解なし’ を表します。$x^2=-1$ の解は $x=\pm i$ ですから，実数解はありません。実数指定をはずすと, どうなるでしょう？ x のタイプをはずすには,delete(x) のようにします。

• delete(x) : • solve(x ^ 2 + 1 = 1) ;　　>> $\{[x=-\mathrm{I}, x=\mathrm{I}]\}$

今度は，虚数解もでました。

注33)　maps([x,y,· · ·], コマンド) は,[x,y,· · ·] というリストに同じコマンドを作用させる。例えば，• maps([4,9,5],sqrt);>>[2,3,$5^{\frac{1}{2}}$] となる。この map() は, 集合 { } やリスト [ ] に対し使われる。また，float() は，小数近似を求めるコマンド (第 1 章参照)

注34)　assume(x,Type::Real) は”x を実数タイプの変数と仮定せよ”という意味です。実数以外にも, いろいろなタイプ指定が出来ます。(文字式の章参照)

4　数列

コマンド	意味
sum($a(k), k = 1..n$)	$\sum_{k=1}^{n} a_k$
rec(漸化式, $a(n)$, 初期条件)	漸化式の定義
solve(rec(漸化式, $a(n)$, 初期条件))	漸化式の解

注35)

4.1　数列の一般項

MuPAD では, 例えば, $\{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$ の一般項を求めるとか，初項１, 公差２の等差数列の一般項を求めるとかいうコマンドはありません。一般項が解っているときに，第 n 項を求めるのは簡単です。文字式の章で述べた関数の定義を使えば良いです。注36)

4.2　数列の和

一般項 a_k が求まっているとき, n 項までの和; $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めるには, sum(a_k,k=1..n) のようにします。

$\sum_{k=1}^{3} k^2$?　　• sum(k ^ 2, k = 1..3);　　>> 14

確かに，$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$ ですね。次は n 項までの和を求めてみましょう。

$\sum_{k=1}^{n} k^2$?　　• sum(k ^ 2, k = 1..n);　　$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$

教科書と同じような形にするのは、因数分解すれば良いですね。続けて，factor( ) を使います。

• factor(%);　　>> $1/6\, n(n + 1)(2n + 1)$

sum() で使う変数は k 以外の文字でも大丈夫です。今度は等比数列でやってみましょう。

$\sum_{i=1}^{n} 2^i$　　• sum(2 ^ i, i = 1..n)　　>> $2\, 2^n - 2$

注35) sum は和を意味します。rec は recursion formula(漸化式) の略です。recur というのは' 再び起こる（再帰する)' という意味です。直訳すると，' 再帰方程式' となります。

注36) $a_n = 2n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と解っているとき，a_{10} を求めるには, 次のようにします。

$\{a_n\}$ に suretu_a という名前をつけて定義します。

• suretu_a := n− > 2 ∗ n − 1;　　>> $n \longrightarrow 2n - 1$

n に 10 を代入します。関数として定義したので代入は楽ですね。

• suretu_a(10);　　>> 19

実際
$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 2$$
ですね。分数式の和も求まります。$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ を求めてみましょう。[注37)]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ は?

- sum(1/(k * (k + 1)), k = 1..n) >> $\dfrac{n}{n+1}$

確かめてみましょう。$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ から
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$
分数式の和は 差の形に書き直すのでした。[注38)]

4.3 漸化式

$\{a_n\}$ の漸化式は, rec(漸化式,a(n), 初期条件) のようにします。ここで初期条件というのは $a_1 = 3, a_2 = 5$ などというやつです。真ん中の a(n) は省略できないので注意してください。[注39)]

4.3.1 ２項間漸化式

注37) 入力のとき，1/k(k+1) としないでください。k(k+1) 全体で割るので，括弧が必要です。または，1/k/(k+1) としても大丈夫です。

注38)

詳しく言うと，$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ のとき,$f(k) = \frac{1}{k}$ とおくと $a_k = f(k) - f(k+1)$ とかける。このとき,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \{f(k) - f(k+1)\} \\ &= \{f(1) - f(2)\} + \{f(2) - f(3)\} + \{f(3) - f(4)\} + \cdots + \{f(n) - f(n+1)\} \\ &= f(1) - f(n+1)\end{aligned}$$
と簡単になります。 このように $a_k = f(k) - f(k+1), a_k = f(k) - f(k+2)$ など の形に書き直せなければ，(高校の範囲では) 有限個の和は求まりません。例えば, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ は，高校で使っている関数の範囲では表せません。

注39) 初項を省略すると, 一般解 (任意定数 C を含んだ解) がでます。また初項に文字を使ったり、a_0 を初項にすることも出来ます。漸化式は, a(n+1)=2*a(n),a(n)=2*a(n-1), はたまた a(n+2)=2*a(n+1) のように書いても良いですが，真ん中の a(n) を a(n+1) などと書くことは出来ません。n の代わりに k,i など他の文字を使っても大丈夫です。

例えば，(1) $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 3$ は次のように定義します。

- `rec(a(n+1)=2*a(n),a(n),a(1)=3);` $>> -2a(n) + a(n+1), a(n), \{a(1) = 3\}$

出力の意味は $-2a_n + a_{n+1} = 0, a_1 = 3$ で定義される数列 $\{a_n\}$ ということです。このように (左辺)= 0 の形で出力されます。この漸化式を解くときは, 続けて solve( ) を使います。

- `solve(%);` $>> \left\{\frac{3\ 2^n}{2}\right\}$

または一度に次のように入力します。

- `solve (rec(a(n+1)=2*a(n),a(n),a(1)=3));` $>> \left\{\frac{3\ 2^n}{2}\right\}$

実際，$a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 3$, は初項 3, 公比 2 の等比数列だから $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ です。約分すると同じになってますね。

(2) 今度は階差型の漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2n, a_1 = 1$ を解いて見ましょう。

- $\mathtt{solve(rec(a(n+1) = a(n) + 2 * n, a(n), a(1) = 1));}$ $>> \{n^2 - n + 1\}$

実際、$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると $b_k = 2k$ ですから

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$$

となります。

(3) 今度は一次式型；$a_{n+1} = pa_n + q$ (p, q 定数) の漸化式; $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$ を解いて見ましょう。

- $\mathtt{solve(a(n+1) = 2 * a(n) + 1, a(n), a(1) = 1);}$ $>> \{2^n - 1\}$

実際，$\alpha = 2\alpha + 1$ の解は $\alpha = -1$ ですから, 漸化式の両辺から (-1) を引いて,

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \iff a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

ゆえに，$\{a_n + 1\}$ は, 初項 $a_1 + 1 = 2$, 公比 2 の等比数列となるので

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$
$$\therefore\ a_n = 2^n - 1$$

となり一致します。

(4) 今度は，分数漸化式; $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+3}$, $a_1 = 1$ を解いて見ましょう。

- $\mathtt{rec(a(n+1) = a(n)/(a(n) + 3), a(n), a(1) = 1)}:$ • $\mathtt{solve(\%);}$

$>>$ solve$\left(\text{rec}\left(a(n+1) - \dfrac{a(n)}{a(n)+3}, a(n), \{a(1) = 1\}\right)\right)$

ぜんぜん簡単になっていませんね。これは MuPAD が解けないということを示しています。どうも, MuPAD は分数漸化式が解けないみたいです。これは行列の n 乗が出来ないことと関係があるのでしょう。[注40] さて, これを解いてみましょう。

$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+3}$ の逆数をとって,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{a_n}$$

そこで $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと,

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$

これは 1 次式型ですから，$\alpha = 3\alpha + 1$ の解 $\alpha = -\frac{1}{2}$ を両辺から引くと

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$$

よって $\{b_n + \frac{1}{2}\}$ は初項 $b_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 公比 3 の等比数列となるので

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

ゆえに

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3^n - 1} \qquad \cdots(答)$$

MuPAD に解けなくても, 我々は解けました。我々も捨てたものではないですね。

4.3.2　3 項間漸化式

MuPAD は,3 項間漸化式; $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ (p, q 定数) は解けます。

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ を解いてみましょう。このとき {a(1) = 1, a(2) = 2} というようにまとめるのを忘れないでください。

- rec(a(n + 2) − 3 ∗ a(n + 1) + 2 ∗ a(n) = 0, a(n), {a(1) = 1, a(2) = 2}) :
- solve(%); $>> \left\{\frac{2^n}{2}\right\}$

となります。実際 $t^2 - 3t + 2 = 0$ の解は $t = 1, 2$ ですから漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n & \cdots ① \\ a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

[注40] 行列の n 乗に関しては, 行列の章を参照。

と変形され、①,② より

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = a_2 - 2a_1 = 0 & \cdots ①' \\ a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}(a_2 - a_1) = 2^{n-1} & \cdots ②' \end{cases}$$

となるので、②′ − ①′ より

$$a_n = 2^{n-1}$$

となり約分した式と一致します。

4.3.3　連立漸化式

注41) MuPAD は連立漸化式;

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

は解けません。解くどころか定義も出来ません。連立漸化式は，3 項間漸化式に直すことができますが，余り良い方法とはいえません。

注41) 連立漸化式は, 高校の教科書では, 扱っていない。

5　三角関数

三角関数

$\sin x$	sin(x)
$\cos x$	cos(x)
$\tan x$	tan(x)
π(円周率)	`PI`

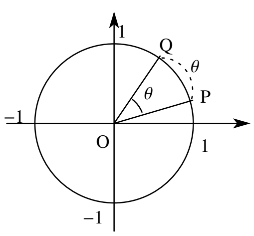
三角関数の変形

式の簡略化	`simplify`()
角を１つにまとめる	`combine`(,*sincos*)
$f(x)$ を sin と cos に書き直す	`rewrite(f(x)`,*sincos*)
$f(x)$ を tan に書き直す	`rewrite(f(x)`,*tan*)

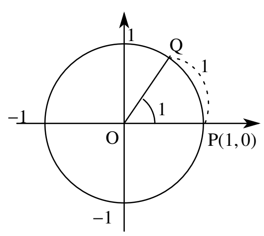
注42)

$\sin x, \cos x, \tan x$ はそれぞれ sin(x),cos(x),tan(x) となります。括弧は省略できません。ただ角度の単位はラジアン (rad) 単位で度 (°) ではありません。また円周率 (π) は大文字で PI と打ちます。念のためここで、1,2 年生のためにラジアンの定義を述べます。

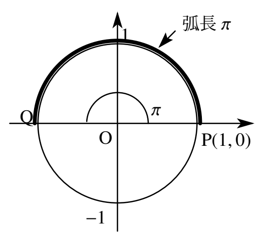
> 原点中心で半径 1 の円を考え、図 1 のように、円上に 2 点 P,Q をとるとき、
>
> ∠POQ の大きさ (ラジアン単位) = 弧 PQ の弧長



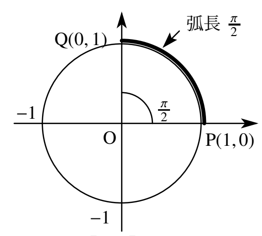
【図 1】



【図 2】



【図 3】



【図 4】

例えば,1 ラジアンは図 2 の角, また図 3,4 より $180° = \pi$ ラジアン,$90° = \dfrac{\pi}{2}$ ラジアン，同様にして，$45° = \dfrac{\pi}{4}$ ラジアン, $60° = \dfrac{\pi}{3}$ ラジアン,$270° = \dfrac{3\pi}{2}$ ラジアン, $-90° = -\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン などとなります。しかし，いちいち換算するのは面倒なので，数　を習ってからのほうが良いかもしれません。(数　では角度は全てラジアンで考える)

5.1　三角関数の値

注42)　combine は’散らばった変数を, まとめて 1 つにする’という意味で，指数関数では, combine( ) を使って,$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ のような変形をします。rewrite は ’書き直す’という意味で rewrite(,exp),rewrite(,ln) でそれぞれ底を e とする指数関数, 対数関数に直します (e は数　の範囲)

【例】$\sin(90°), \cos(90°), \tan(45°)$ の値を求めてみましょう。ラジアンに直すと $90° = \frac{\pi}{2}\ rad, 45° = \frac{\pi}{4}\ rad$ ですから次のようにすれば良いです。

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は?	• `sin(PI/2);`	>> 1
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は?	• `cos(PI/2);`	>> 0
$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ は?	• `tan(PI/4);`	>> 1

度に直すと、それぞれ $\sin(90°) = 1, \cos(90°) = 0, \tan(45°) = 1$ にあたります。いちいち換算するのが面倒な場合は, 自分で関数を定義すると良いです。角度を度に取るときのサインを Sin(x) とかくとすると、$x° = x \times \frac{\pi}{180}\ rad$ ですから、次のように定義すると良いでしょう。

```
Sin := x-> sin(x/180*PI);
```

これで $\sin(60°)$ を求めるには次の様にするだけです。

$\sin(60°)$ は?	• `Sin(60);`	>> $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

cos, tan に関しても同様にして、

```
Cos := x-> cos(x/180*PI);, Tan := x-> tan(x/180*PI);
```

とすると、単位が度 (°) になります。

5.2 三角方程式

次は三角方程式を解いてみましょう。solve( ) を使います。なお、単位はラジアンでやります。単位を、度 (°) にしたいときは, 答えの数字を $\frac{180}{\pi}$ 倍してください。また、問題文もラジアン単位に直さないといけません。

(1) $\sin(x) = 1$ の解は?	• `solve(sin(x),x);`	>> $1/2 * PI + 2 * X1 * PI \mid X1\ in\ Z\_$

Z は整数の集合を表します。(おそらく，世界中共通の習慣) したがって $\sin(x) = 1$ の解が $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$(n は整数) ということです。x の範囲を指定したいときは assume( )[注43] を使って先に指定します。

(2) $\sin(x) = 1 (0 \leqq x < 2\pi)$ の解を求めるときは次の様になります。

• `assume(0 <= x < 2*PI);`	>> `[0, 2*PI[ of Type::Real`

[0,2*PI[は,0 より大きく 2π より小さいことを，最後の”of Type::Real”は実数タイプの変数であることを表しています。[注44] さて x の範囲が限定されました。今度はどんな解になるでしょうか？

• solve(sin(x)=1,x);	>> $\frac{\pi}{2}$
• unassume(x);	

[注43] assume は’ 仮定せよ’ という意味ですね。変数の条件を指定するときに使います。詳しくは第 2 章「文字式の処理」を参照。
[注44] 方程式不等式の章参照

予想どうり解は $\frac{\pi}{2}$ だけになりました。ここで unassume(x); としないと x の範囲がずーと $0 \leqq x < 2\pi$ に制限されたままになります。[注45] 逆に言うと、変域が $0 \leqq x < 2\pi$ の問題が続けてあるときは　unassume(x); をやらないほうが良いです。例えば続けて

(3) $\cos(x) = 1(0 \leqq x < 2\pi)$ を解くときは次の様にやるだけです。

- `solve(cos(x) = 1, x);` >> 0

次は角度の単位が度 (°) となっている問題を解いて見ましょう。問題文もラジアン単位に直さないといけなかったですね。

(4) $\sin(x + 60°) = \frac{1}{2}$ $(0 \leqq x < 360°)$ の解は?

$60° = \frac{1}{3}\pi, 360° = 2\pi\ (rad)$ だから

$$\sin(x + 60°) = \frac{1}{2}\ (0 \leqq x < 360°) \Longleftrightarrow \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\ (0 \leqq x < 2\pi)$$

ラジアンに直ったので, MuPAD で次のようにします。

- `solve(sin(x + PI/3) = 1/2, x);` >> $\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

確かに、

$$\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\ (0 \leqq x < 2\pi) \Longleftrightarrow x + \frac{1}{3}\pi = \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \Longleftrightarrow x = 90°, 330°$$

で正しいです。やっぱり，度で考えるのは面倒ですね。**以下，単位は全てラジアンとします。**

MuPAD は $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を利用した方程式も解きます。次は,

(5) $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0\ (0 \leqq x < 2\pi)$ を解いてみましょう。変域を設定してから解きます。

- assume(0 <=x<2*PI); >> `[0, 2 * PI[ of Type :: Real`
- solve(2*cos(x) ^ 2+5*sin(x)+1=0); >> $\left\{\left[x = \frac{7\pi}{6}\right], \left[x = \frac{11\pi}{6}\right]\right\}$

実際，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ だから,

$$2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 3) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2},\ \sin x = 3$$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ だから

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6}$$

となり一致しました。

しかし合成公式を使う方程式は解けません。また連立方程式は解けないみたいです。例えば, MuPAD は

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \qquad や \qquad \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$$

は解けません。

[注45] unassume(x) の代わりに，delete(x) でも良いです

5.3 三角不等式

三角不等式は *MuPAD* はどうも解けないみたいです。残念。

5.4 加法定理

まず加法定理を書かせて見ましょう。expand( )[注46] を使います。

- expand(sin(x+y)); >> $\cos(y)\sin(x)+\cos(x)\sin(y)$
- expand(cos(x+y)); >> $\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

逆変形は simplify( ), または combine(,*sincos*) [注47] を使います。

- `simplify`(`sin`(x) ∗ `cos`(y) + `cos`(x) ∗ `sin`(y)); >> $\sin(x+y)$
- `simplify`(`cos`(x) ∗ `cos`(y) − `sin`(x) ∗ `sin`(y)); >> $\cos(x+y)$
- `combine`(`sin`(x) ∗ `cos`(y) + `cos`(x) ∗ `sin`(y), `sincos`); >> $\sin(x+y)$
- `combine`(`cos`(x) ∗ `cos`(y) − `sin`(x) ∗ `sin`(y), `sincos`); >> $\cos(x+y)$

倍角公式も expand( ) を使います。

- `expand`(`sin`(2 ∗ x)); >> $2\cos(x)\sin(x)$
- `expand`(`cos`(2 ∗ x)); >> $\cos(x)^2-\sin(x)^2$

逆変形は simplify( ), または combine(,*sincos*) を使います。

- `simplify`(2 ∗ `sin`(x) ∗ `cos`(y)); >> $\sin(2x)$
- `simplify`(`cos`(x) ^ 2 − `sin`(x) ^ 2); >> $\cos(2x)$
- `combine`(2 ∗ `sin`(x) ∗ `cos`(y), `sincos`); >> $\sin(2x)$
- `combine`(`cos`(x) ^ 2 − `sin`(x) ^ 2, `sincos`); >> $\cos(2x)$

合成はどうも出来ないみたいです。$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ なども解けません。[注48]

5.5 三角関数の変形

三角関数には, 同値な変形がたくさんあり，しかもどの変形が良いかは case by case です。したがって, MuPAD の得意とするところではありません。三角関数の書き換えには, combine(,sincos), rewrite(,*sincos*), rewrite(,*tan*),simplify( ) などがあります。

注46) 整式の展開のときにつかいましたね。

注47) combine は, • `combine`($a^x \times a^y$); >> a^{x+y} のように，’ 指数を 1 つにまとめる’ のが基本の働きです。

注48) 実は，MuPAD は $z=x+iy$ (x,y 実数) の偏角 *arg z* を求める arg(x,y) というコマンドはあるので，それを使えば, 三角関数を合成するプログラムは, 簡単に作れます。自分でやってみてください。

$$\begin{cases} \text{combine}(\ f(x), sincos) & \longrightarrow \text{角を出来るだけ１つにまとめる} \\ \text{rewrite}(\ f(x), sincos) & \longrightarrow \sin \text{と} \cos \text{を使って書き直す。} \\ \text{rewrite}(\ f(x), tan) & \longrightarrow \tan \text{を使って書き直す。} \end{cases}$$

combine に関しては前節で見たので，rewrite と simplify を見てみましょう。

- simplify(1 + 1/ tan(x) ^ 2); $\quad >> \dfrac{1}{\tan(x)^2} + 1$

simplify ではぜんぜん簡単になりませんね。rewrite を使って，sin と cos に直してみましょう。

- rewrite(1 + 1/ tan(x) ^ 2); $\quad >> \dfrac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + 1$

これで，sin と cos の式に直りました。簡単にするには simplify( ) を使いましょう。

- simplify(%); $\quad >> \dfrac{1}{\cos(x)^2}$

逆に tan に直してみましょう。

- rewrite(1/ cos(x) ^ 2); $\quad >> \dfrac{\left((\tan \frac{x}{2})^2 + 1\right)^2}{\left(1 - \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2\right)^2} \qquad \cdots ①$

このように $\tan \frac{x}{2}$ の式に直ります。一般に，

$$\cos x = \cos 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

よって，分母・分子を $\cos^2 \frac{x}{2}$ で割ると

$$\cos x = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

これで① の式が正しいことが解りました。

注49)

注49)

$\sin x$ も同様にして，

$$\sin x = \sin 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

すなわち $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \qquad \cdots (\text{公式})$$

このように，$\sin x, \cos x$ は $\tan \frac{x}{2}$ の分数式に直ります。

今度は $\sin^2 x + \cos^2 x$ を簡単にさせて見ます。

- rewrite(sin(x) ^ 2 + cos(x) ^ 2); >> $\sin(x)^2 + \cos(x)^2$

rewrite ではぜんぜん簡単になりませんね。もうすでに sin と cos に直っているので当然です。simplify を使って，簡単にしてみましょう。

- simplify(sin(x) ^ 2 + cos(x) ^ 2); >> 1

今度は簡単になりました。ふー。

5.6 まとめ

いままで見てきたように, 三角関数の変形は MuPAD の余り得意とするところではないみたいです。皆さんなら $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なんて瞬間にでますよね?? 三角関数は (指数関数・対数関数と同様) グラフを描いたり，近似値を求めたりするのに使ったほうがよさそうです。もし MuPAD で式を変形したり, 方程式を解いたりするのなら，必ずグラフ (平面のグラフィックの章参照) を描いて, 交点を目で確かめることを勧めます。

6 指数・対数関数

注50)

a^x	`a ^ x`
e^x	`exp(x)`
$\log_a x$	`log(a,x)`
$\log x$(自然対数)	`ln(x)`
簡略化	`simplify()`
同じ底を持つ指数関数をまとめる	`combine()`
底が e の指数関数をまとめる	`combine(,exp)`
底が e のの対数関数をまとめる	`combine(,ln)`
指数の底を e に変換する	`rewrite(,exp)`
対数の底を e に変換する	`rewrite(,ln)`
e(自然定数の底)	`E`

注51) 全体に指数・対数の計算は, 三角関数よりさらに MuPAD は苦手のようです。

6.1 指数の計算

$a > 0$ のとき，a の累乗根は，$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ を使って入力します。$a < 0$ のときは，$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ を使います。

(1) $\sqrt[3]{27}$ を求めましょう。 $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$ ですから次のように入力すると，(括弧を忘れないように注意)

- `27 ^ (1/3);` >> $27^{\frac{1}{3}}$

数を底に持つ指数関数の計算の簡略化は, simplify を使えます。

- `simplify(%);` >> 3

(2) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$ はどうでしょう?

- `2 ^ (1/4) * 8 ^ (1/4);` >> $2^{\frac{1}{4}}\ 8^{\frac{1}{4}}$
- `simplify(%);` >> $16^{\frac{1}{4}}$
- `simplify(%);` >> 2

$2^{\frac{1}{4}} * 8^{\frac{1}{4}} = (2 \times 8)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$ で合っています。$a < 0$ のときは，$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ を使います。

(3) $\sqrt[3]{-3} + \sqrt[3]{81}$ はどうでしょう？ $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$ ですから, 次のように入力します。

- `-3 ^ (1/3) + (81) ^ (1/3);` >> $81^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}$
- `simplify(%);` >> $2\ 3^{\frac{1}{3}}$

注50) e, $\log x$ は数 III で習います。

注51) exp(x) は 'exponential function' (指数関数) の略です。また、ln は logarithm natural(自然対数) の略です。したがって，'I(大文字のアイ)' でなく'l(小文字のエル)' なので注意してください。また E も大文字でないといけません。simplify は特に，底か, 指数の少なくとも一方が' 数字' の指数関数のとき有効です。

実際，$\sqrt[3]{-3}+\sqrt[3]{81}=-\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}=2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ ですね。

指数法則；
$$\begin{cases} a^x\times a^y=a^{x+y}, a^x\div a^y=a^{x-y} \\ (a^x)^y=a^{xy} \\ (ab)^x=a^x\,b^x \end{cases} \qquad (a>0,b>0,x,y \text{ は実数})$$
を MuPAD で確かめてみましょう。まず指数や底が文字のときです。

- a ^ x*a ^ y; >> $a^x\ a^y$
- simplify(%); >> $a^{(x+y)}$

指数をまとめるのは combine( ) でもできます。どちらが良いのでしょう？

- (a ^ x) ^ y; >> $(a^x)^y$
- simplify(%); >> $(a^x)^y$
- combine(%); >> a^{xy}

どうやら，指数をまとめるのは combine( ) を使ったほうが良さそうです。しかし

- a ^ x*b ^ x; >> a^xb^x
- combine(%); >> a^xb^x
- simplify(%); >> a^xb^x

combine( ) は, 同じ底を持つ指数関数を 1 つにまとめるので，この場合は効きません。simplify(%) でもだめです。今度は，文字と数字をともに含んだ，指数計算をやらせて見ましょう。

- a ^ (3/2) ∗ a ^ (1/2); >> a^2
- (a ^ (1/3)) ^ 6; >> a^2
- a ^ 3 ∗ (1/a) ^ 3; >> 1

$a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=a^2, (a^{\frac{1}{3}})^6=a^{\frac{1}{3}\times 6}=a^2, a^3\times(\frac{1}{a})^3=(a\times\frac{1}{a})^3=1^3=1$ ですから正しいです。しかし，

- a ^ (1/3)*(1/a) ^ (1/3); >> $a^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

$a^{\frac{1}{3}}\times(\frac{1}{a})^{\frac{1}{3}}=(a\times\frac{1}{a})^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}=1$ になるはずですが, 簡単にしてくれません。これは a の範囲を設定していないためです。$a>0$ に設定してからやってみましょう。[注52)]

- assume(a > 0); >> > 0
- a ^ (1/3) ∗ (1/a) ^ (1/3); >> 1

今度はうまくいきました。少なくとも指数か底の一方が数字のときは，MuPAD は指数計算をこなすようです。それ以外の場合は，余り得意ではないようです。

注52) $a<0$ のとき, MuPAD では a ^ (1/n) は虚数 n 乗根を表します。例えば，複素数 z を $a+bi(a,b$ 実数) の形に変形する rectform(z) を使うと • rectform((−1) ^ (1/3)); >> $\frac{1}{2}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}I$ となります。

6.2　対数の計算

$\log_a x$ は log(a,x), $\log x$[注53] は ln(x) [エルエヌ エックス] と入力します。MuPAD は対数の計算（特に底が e でないとき) の計算は非常に苦手です。その前に対数の公式を復習しておきましょう。

$$\begin{cases} \log_a x = y \iff x = a^y \ (\text{定義}) \\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^r = r \log_a x \\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{cases} \qquad (x > 0, y > 0, a > 0, a \fallingdotseq 1, b > 0, c > 0, c \fallingdotseq 1)$$

まず, 数字の計算からやってみましょう

- log(2, 8);　　　　>> 3

$\log_2 8 = 3$ ですから正しいですね。$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$ はどうでしょうか?

- log(10, 2)+log(10, 5);　　　　>> $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$

simplify, combine などやってみてもだめです。[注54]

$3 \log_8 2 = \log_8 2^3 = 1$ はどうでしょうか?

- 3log(8,2);　　　　>> $3 \log(8, 2)$

やはり，simplify や combine では簡単になりません。小数近似してみましょう。

- float(%);　　　　>> 1.0

1 ではなく，1.0 となっています。これは MuPAD が浮動小数点計算で 1.0 を出したということで，対数公式を使って求めたわけではありません。次は底の変換です。MuPAD は一般の底の変換は出来ませんが, rewrite(,ln) で，ln(x)= $\log_e x$ に変えることは出来ます。

- rewrite(log(3,5), ln);　　　　>> $\dfrac{\ln(5)}{\ln(3)}$

これは $\log_3 5 = \frac{\log_e 5}{\log_e 3}$ ということです。

注53)　$\log_e x$ のこと。底が自然対数 e のときは, 省略できる。

注54)　このときは rewrite(,ln) を使って，底を e に変えます。

- rewrite(%, ln);　　　　>> $\dfrac{\ln 2}{\ln 10} + \dfrac{\ln 5}{\ln 10}$

normal を使って通分します。

- normal(%);　　　　>> $\dfrac{\ln 2 + \ln 5}{\ln 10}$

最後に combine を使ってまとめます。

- combine(%, ln);　　　　>> 1

底が e のとき，真数をまとめるのは combine(,ln) です。

- 3*ln(2); >> $3\ln(2)$
- combine(%, ln); >> $\ln(8)$

$3\log_8 2$ は計算できませんが, 底が e のときは少しは ' まし' なようです。

6.3 指数・対数方程式

指数・対数方程式を解くときも solve を使います。しかし, ほとんど実用になりません。

$2^x = 8$ を解いてみましょう。解はもちろん $x = 3$ です。

- solve(2 ^ x=8); >> x in { 1/ln(2)*(2*I*PI*(X5)+ln(8)) — X5 in Z_ }

Z は整数の集合を表すので，$x = \frac{\log 8 + 2\pi i n}{\log 2}$($n$ は整数) ということですが, 複素数の解が出てきてしまいました。(大学では複素数の指数関数というのも，考えます。) 変域を実数に制限して, もう一度解いてみましょう。Type::Real というのは実数タイプの変数ということです。

- assume(x,Type::Real): solve(2 ^ x=8); >> $x = \dfrac{\ln(8)}{\ln(2)}$

$\frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{3\log 2}{\log 2} = 3$ なので間違いではないですが、余り簡単になりませんね。底が e のときは多少ましです。

- assume(x,Type::Real): solve(E ^ x=3); >> $x = \ln(3)$
- solve(ln(x)=3); >> $x = \exp(3)$
- solve(ln(x*(2*x+1))=0); >> $\left\{[x = -1], \left[x = \dfrac{1}{2}\right]\right\}$

最後の例は

$$\log x(2x+1) = 0 \Longleftrightarrow x(2x+1) = 1 \Longleftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1, x = \frac{1}{2}$$

ということです。

MuPAD は底が e のときは, 少しは方程式も解けますが，それ以外は，全くだめなようです。

6.4 桁数

桁数を求めるには, 底が 10 の対数を考えると良かったですね。[注55)]

注55) これは僕らが 10 進数を使っているからです。もし, バビロニア人のように 60 進数を使っていれば，底が 60 の対数 (!?) を考えるわけです。バビロニア人でなくて良かった。

例題

3^{100} は何桁の数か? $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて調べよ。

【解答】

$$\log_{10} 3^{100} = 100 \log_{10} 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

したがって 3^{100} 　 $10^{47.71}$ となるから

$$10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$$

10^{47} は 48 桁の数のうち最小の数，また，10^{48} は 49 桁の数のうち最小の数だから，求める桁数は

$$48 \text{ 桁} \qquad \cdots(\text{答})$$

となりましたね。確かにそのとおりなのですが，その結果を MuPAD で確かめてみましょう。

- 3 ^ 100; 　　>> 515377520732011331036461129765621272702107522001

数えると確かに 48 桁あります。

6.5 まとめ

MuPAD は，指数対数の分野では (三角関数と同様) グラフを描いたり，近似値を求めたり, 実際の値を求めたりするのに使ったほうがよさそうです。もし MuPAD で式を変形したり, 方程式を解いたりするのなら, 必ずグラフ (平面のグラフィックの章参照) を描いて, 交点を目で確かめることを勧めます。

7　微積分 (整式)

極限 $\lim_{x \to a} f(x)$	limit(f(x),x=a)
微分 $f'(x)$	diff(f(x),x)
不定積分 $\int f(x)dx$	int(f(x),x)
定積分 $\int_a^b f(x)dx$	int(f(x),x=a . . b)

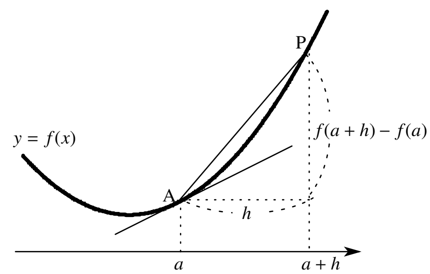
注56)

7.1　極限

$\lim_{x \to a} f(x)$ は limit(f(x),x=a) と書きます。x は省略できません。微分の定義を復習してみましょう。

$y = f(x)$ 上に定点 A$(a, f(a))$ と動点 P$(a+h, f(a+h))$ をとると, 直線 AP の傾きは

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



ここで, 点 P を限りなく点 A に近づけると, 直線 AP の傾きは, 限りなく点 A における接線の傾きに限りなく近づくから点 A における接線の傾きは

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

これを，$y = f(x)$ の, $x = a$ における微分係数; $f'(a)$ と呼ぶのでした。

$f(x) = x^2$ のとき，$f'(a)$ を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \qquad \cdots ① \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a \end{aligned}$$

では，MuPAD で求めてみましょう。

$f(x) = x^2$ を微分してみます。① から $f'(a)$ を求めるには, 次のように入力すればいいはずです。

- `limit(((a + h) ^ 2 − a ^ 2)/h, h = 0);`　　　　>> $2a$

確かに一致します。

注56) diff は 'differentiate(微分する)' の略で int は 'integral(積分)' の略です。また，定積分で `int(f(x), x = a . . b);` の「..」マークはピリオド 2 つを続けて打ちます。 M の 2 つ右にあります。

7.2　微分

$f(x)$ を x に関し微分するのは，diff(f(x),x) とするだけです。

$\dfrac{d}{dx}(x^3 + 3x^2)$ は?　　• `diff(x ^ 3 + 3 * x ^ 2, x);`　　>> $6x + 3x^2$

$(x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x$ ですから正しいですね。でもなぜ, diff(,x) のように'x' と指定しないといけないのでしょう？

$\dfrac{d}{dx}(ax^3 + bx)$ は?　　• `diff(a * x ^ 3 + b * x, x);`　　>> $b + 3ax^2$

$\dfrac{d}{da}(ax^3 + bx)$ は?　　• `diff(a * x ^ 3 + b * x, a);`　　>> x^3

2 番目の式は x, 3 番目の式は a に関し微分したので、結果が異なります。従って我々が指定しないとMuPAD は何をやったらいいか解りません。(a は定数とは限りませんから,a に関して微分できます。)

7.3　不定積分

$f(x)$ を x に関し不定積分するのは int(f(x),x) とします。微分と同様,'x'(変数名) は省略できません。

$\displaystyle\int (x^2 + 3)dx$ は?　　• `int(x ^ 2 + 3, x);`　　>> $3x + \dfrac{x^3}{3}$

$\int (x^2 + 3)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + C$ ですから正しいですね。MuPAD では、積分定数 C は出力されません。

$\displaystyle\int t^2 dt$ は?　　• `int(t ^ 2, t);`　　>> $\dfrac{t^3}{3}$

$\displaystyle\int t^2 dx$ は?　　• `int(t ^ 2, x);`　　>> $t^2\ x$

t^2 を t に関し積分すると $\frac{t^3}{3}$, x に関し積分すると $t^2\,x$ ですね。このように積分変数によって積分値は変わってきます。

7.4　定積分

7.4.1　基本的な定積分

$f(x)$ を x に関し $x = a$ から $x = b$ まで定積分するのは int(f(x),x=a ..b) とします。[注57)]

$\displaystyle\int_1^2 (x^2 + 3)dx$ の値は?　　• `int(x ^ 2 + 3, x = 1..2);`　　>> 16/3

注57)　$\sum_{k=1}^{n} a_k$ (a_kを $k = 1$ から $k = n$ まで加える) は sum(a_k, k = 1..n) でした。(数列の章参照) それと似ていますね。

実際、

$$\int_1^2 (x^2+3)dx = \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+6\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{16}{3}$$

なので正しいですね。

$\displaystyle\int_1^x (t^2+3)dt$ の値は?　　• `int(t ^ 2 + 3, t = 1..x);`　　>> $3x+\dfrac{x^3}{3}-10/3$

続けて x に関し微分してみましょう。

• `diff(%, x);`　　>> x^2+3

実際,

$$\int_1^x (t^2+3)dt = \left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^x = \left(\frac{x^3}{3}+3x\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{x^3}{3}+3x-\frac{10}{3}$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+3x-\frac{10}{3}\right) = x^2+3$$

となり一致します。これは

$$\text{(定理)} \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

の例ですね。

7.4.2 $\frac{1}{6}$ 公式

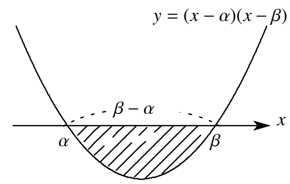
公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

この公式を私は $\frac{1}{6}$ 公式と呼んでいます。これを使うと 2 次関数と直線で囲まれた面積がすぐ求まるので重宝します。例えば, $y = (x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた面積を S とすると,

$$S = \int_\alpha^\beta \{-(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

となります。



まずこの公式を MuPAD を使って出してみましょう。

- `int((x − a) ∗ (x − b), x = a..b);` $\quad$ >> $\dfrac{b^3}{3}-\dfrac{a^3}{3}+ab^2-a^2b-\dfrac{a^2(-a-b)}{2}+\dfrac{b^2(-a-b)}{2}$

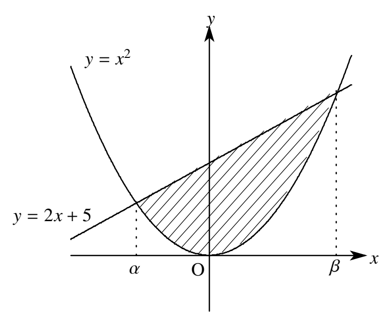
続けて因数分解します。

- factor(%); $\quad$ >> $-\dfrac{1}{6}(-1+b)^3$

確かに, 一致しました。次はこの公式の応用です。

例題

$y=x^2$ と $y=2x+5$ で囲まれる面積 S を求めよ。



【解答】

$x^2=2x+5$ とおくと

$$x^2-2x-5=0 \Longleftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$$

$\alpha=1-\sqrt{6}, \beta=1+\sqrt{6}$ とおくと，$x^2-2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解されるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta (2x+5-x^2)dx = -\int_\alpha^\beta (x^2-2x-5)dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\left\{(1+\sqrt{6})-(1-\sqrt{6})\right\}^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3 = 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

となります。これを公式を使わずに，MuPAD で検算してみましょう。

- `int(2 ∗ x + 5 − x ^ 2, x = 1 − sqrt(6)..1 + sqrt(6));`

  >> $10\,6^{\frac{1}{2}}+(6^{\frac{1}{2}}+1)^2-\dfrac{(6^{\frac{1}{2}}+1)^3}{3}-(1-6^{\frac{1}{2}})^2+\dfrac{(1-6^{\frac{1}{2}})^3}{3}$

続けて，展開します。

- expand(%); $\quad$ >> $8\,6^{\frac{1}{2}}$

$8\,6^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{6}$ だから一致しました。

7.5　絶対値のついた積分

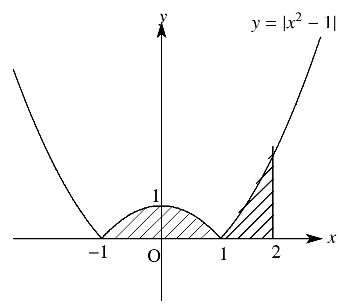
MuPAD では, abs(x) で x の絶対値が求まります。[注58)]

$I = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - 1| dx$ を求めてみましょう。

- int(abs(x ^ 2 − 1)) , x = −1..2);　　　　>> $\dfrac{8}{3}$

実際，$|x^2 - 1| \geqq 0$ だから，I は右図の面積と一致して,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right) + \left(\frac{8}{3}-2\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right) \\ &= \frac{8}{3} \qquad \text{ですね。} \end{aligned}$$



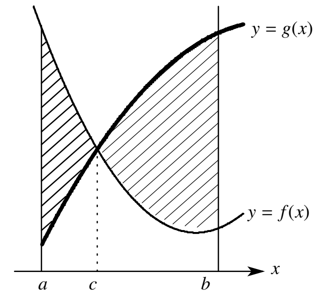
7.6　面積

右図のように $a \leqq x \leqq c$ で $g(x) \leqq f(x)$, $c \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq g(x)$ のとき，$x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた領域の面積の和を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{a}^{c}\{f(x)-g(x)\}dx + \int_{c}^{b}\{g(x)-f(x)\}dx \\ &= \int_{a}^{c}|f(x)-g(x)|dx + \int_{c}^{b}|f(x)-g(x)|dx \\ &= \int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx \end{aligned}$$

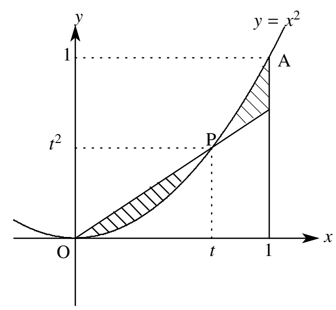
であるから，面積は $|f(x) - g(x)|$ の積分で与えられる。

[注58)] (第一章参照) 例えば，• abs(−5);　>> 5 となります。



例題

点 P は 曲線 $y = x^2$ 上を原点 O から点 A(1, 1) まで動く。このとき，直線 OP, 曲線 $y = x^2$ および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S が最小となるのは P がどの位置にあるときか。その点 P の座標を求めよ。



まずは MuPAD を使わないでやってみます。

【解答】

仮定より，$P(t, t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおける。このとき，直線 OP の式は $y = tx$ となるから，

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 |tx - x^2| dx \\
&= \int_0^t (tx - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - tx) dx \\
&= \Big[\frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^t + \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{tx^2}{2}\Big]_t^1 \\
&= \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3}\right) - 0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2}\right) \\
&= \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{d}{dt}S = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{1}{3}$	↘	極小	↗	$\frac{1}{6}$

表より，S が最小になる t の値は

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき，点 P の座標は

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \qquad \cdots(答)$$

次は MuPAD で解いてみましょう。絶対値は abs で求まるのでしたね。

まず，t の変域を $0 \leqq t \leqq 1$ にします。

- `assume(0 <= t <= 1);` >> [0, 1] of Type::Real

絶対値をつけて積分します。

- `int(t * x - x ^ 2), x = 0..1);`

$$>> \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}$$

前の $S(t)$ の結果と一致します。t に関して微分して

- diff(%),t); >> $t^2 - \frac{1}{2}$

$S'(t) = 0$ の解を求めます。

- solve(%); >> $\left[t = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}\right]$

本当は，増減表，またはグラフを描かないと，$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値をとるとはいえません。しかし, 検算には使えます。

7.7 まとめ

MuPAD は微積分に関しては, 非常に強力な武器になります。しかし, 前の例題でもそうですが点 P の座標を $P(t, t^2)$ とおいて，直線 OP の式; $y = tx$ を出すのは, 我々が自分でやるしかありません。ある点を通る接線の式を求めるのも，我々がやるしかないのです。しかし, 三角関数や指数・対数関数の取り扱いと比べれば，非常に実用的といえます。また，グラフに関しては「平面のグラフィックの章」を参照してください。MuPAD を使うととても簡単にグラフをかけます。

8 微積分 (数 III)

注59)

極限

$\lim_{n\to\infty} a_n$	`limit(a(n), n = infinity);`
$\lim_{x\to a} f(x)$	`limit(f(x), x = a);`
$\lim_{x\to a+0} f(x)$	`limit(f(x), x = a, Right);`
$\lim_{x\to a-0} f(x)$	`limit(f(x), x = a, Left);`

微積分

微分 $f'(x)$	`diff(f(x), x)`
n 階微分 $f^{(n)}(x)$	`diff(f(x), x $n);`
不定積分 $\int f(x)dx$	`int(f(x), x)`
定積分 $\int_a^b f(x)dx$	`int(f(x), x = a .. b)`

さまざまな関数

$\sin x$	`sin(x)`
$\cos x$	`cos(x)`
$\tan x$	`tan(x)`
a^x	`a ^ x`
e^x	`exp(x)` または `E ^ x`
$\log_a x$	`log(a, x)`
$\log x$(自然対数)	`ln(x)`
π(円周率)	`PI`
e(自然定数の底)	`E`
∞(無限大)	`infinity`

注60)

8.1 極限 (数)

8.1.1 数列の極限

MuPAD では、∞(無限大) は infinity, $-\infty$(無限小) は $-$infinity です。

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-2}$ は? • `limit((2 * n - 1)/(3 * n - 2), n = infinity);` >> $\frac{2}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n-2}$ は? • `limit((2 * n ^ 2 - 1)/(3 * n - 2), n = infinity);` >> $infinity$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2-1}{3n-2}$ は? • `limit((-2 * n ^ 2 - 1)/(3 * n - 2), n = infinity);` >> $-infinity$

$\lim_{n\to\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ は? • `limit((1 + 1/n)^n, n = infinity);` >> $exp(1)$

注59) できれば，微積分 (整式) も見てください。この章のコマンドは, 微積分 (整式) の章とほとんど同じです。

注60) diff は 'differentiate(微分する)' の略で int は 'integral(積分)' の略です。定積分で `int(f(x), x = a .. b);` の「..」マークはピリオド 2 つを続けて打ちます。 M の 2 つ右にあります。

MuPAD では，e^x を exp(x) と表すので exp(1) = $e^1 = e$. すなわち，最後の結果は e の定義式;

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$$

を表しています。

8.1.2　無限級数の和

無限級数の和も数列の極限と同様です。部分和を S_n とするとき無限級数の和は $\lim_{n\to\infty} S_n$ なので，部分和を求めた後，極限をとります。$\{a_k\}$ の第 n 項までの和は `sum(a(k), k = 1..n);` でした。[注61] sum を使って部分和を求めてから, 極限をとります。例えば、

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots \qquad \cdots(*)$$

を求めてみます。

n 項までの和; $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ だから,S_n は

- `sum((1/2) ^ (k - 1), k = 1..n);`　　>> $2 - 2\,(1/2)^n$

この極限をとります

- `limit(%, n = infinity);`　　>> 2

実際、$(*)$ は初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の和だから n 項までの和 S_n は,

$$S_n = \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって,$(*)$ の和は,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

で一致します。

8.1.3　関数の極限

関数の極限も, 数列の極限と全く同じです。$\lim_{x\to a} f(x)$ は `limit(f(x), x = a);` と入力します。

三角関数の極限です。

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ は?　　• `limit(sin(x)/x, x = 0);`　　>> 1

[注61] 数列の章参照。例えば sum(k ^ 2,k=1..3) は $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ を表します。

これは超有名ですね。続けて少し複雑なのをやってみます。

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin x}$ は? • `limit(cos(x)^2/(1 - sin(x)), x = PI/2);` >> 2

実際、$\frac{\pi}{2}-x=t$ とおくと, $x\to\frac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ だから、

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin x} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos^2 t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0}(1+\cos t) = 2$$

次は指数・対数関数の極限です。

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$ は? • `limit((E ^ h - 1)/h, h = 0);` >> 1

$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t}$ は? • `limit(ln(1 + t)/t, t = 0);` >> 1

$\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は? • `limit((1 + t) ^ (1/t), t = 0);` >> exp(1)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$ は? • `limit((1 + 1/x)^x, x = infinity);` >> exp(1)

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$ は? • `limit((1 + 1/x)^x, x = -infinity);` >> exp(1)

MuPAD では $e^x=\exp(x)$ と表しますから, $\exp(1)=e^1=e$ 。したがって，これは非常に有名な関係；

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \Longleftrightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \Longleftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

を表しています。

8.1.4　右極限・左極限

右極限, 左極限はそれぞれ $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ とかかれ，それぞれ，”x が a より大きいほうから a に近づく (右から近づく) ときの極限” と”x が a より小さいほうから a に近づく (左から近づく) ときの極限” を表します。MuPAD ではそれぞれ次のように入力します。$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ は `limit(f(x), x = a, Right)` , $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ は `limit(f(x), x = a, Left)` です。[注62)]
では，$f(x)=\frac{x}{x-1}$ の右極限と左極限を見ましょう。

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}$ は? • `limit(x/(x - 1), x = 1, Right);` $infinity$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}$ は? • `limit(x/(x - 1), x = 1, Left);` $-infinity$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$ は? • `limit(x/(x - 1), x = 1);` $undefined$

注62) このように <, Left > や <, Right > などの部分は’ オプション’ と呼ばれます。MuPAD ではこのように後ろの部分にオプションがつくことが多いみたいです。

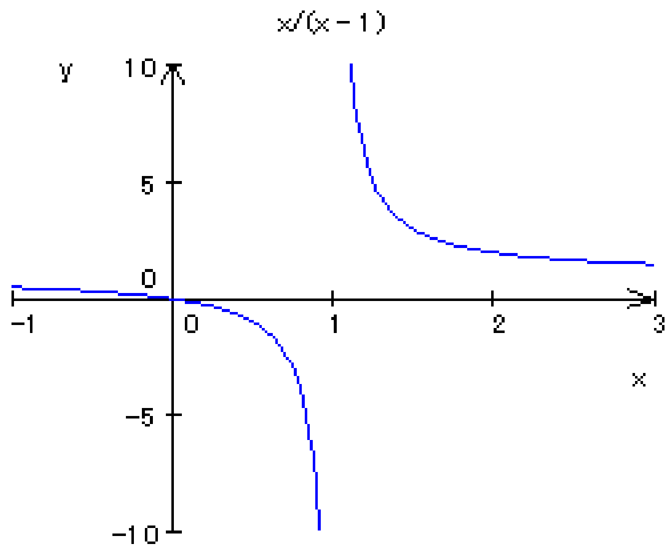
実際、$x>1$ のとき $\frac{x}{x-1}>0$, $x<1$ のとき $\frac{x}{x-1}<0$ で, かつ $x\to 1$ のとき分母の絶対値は限りなく 0 に近づくからから

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}=\infty, \qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}=-\infty$$

しかし左極限と、右極限が異なるので $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$ は定義できません。
ここで MuPAD を使ってグラフを描いて見ましょう。$y=f(x)$ グラフを $a\leqq x\leqq b$ の範囲で描くには plotfunc2d(f(x),x=a..b) と入力します。y の範囲も $c\leqq y\leqq d$ に制限したいなら plotfunc2d(f(x),x=a..b,y=c..d) と入力します。[注63] これを使って $y=\frac{x}{x-1}$ のグラフを $-1\leqq x\leqq 3,\ -10\leqq y\leqq 10$ の範囲で書いてみましょう。

- `plotfunc2d(x/(x - 1), x = -1..3, y = -10..10);`

これで次のようなグラフになります。別の window が立ち上がるので，注意してください。



グラフからも,$x=1$ に右から近づくと無限大に発散し，$x=1$ に左から近づくと無限小に発散することが解ります。ぜひ，MuPAD を使ってどんどんグラフを描いてみてください。知識が生きたものになります。

注63) 詳しくは，グラフィックの章を参照。なお，plotfunc2d は plot(描く)+function(関数)+2d(2 次元) の略で, 平面のグラフを描くコマンドです。

8.2 微分

$f(x)$ を x に関し微分するのは，diff(f(x),x) とするだけです。

8.2.1 さまざまな関数の微分

さまざまな関数の微分を復習しておきます。

$(\sin x)'$	$\cos x$
$(\cos x)'$	$-\sin x$
$(\tan x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

$(e^x)'$	e^x
$(\log x)'$	$\frac{1}{x}$
$(x^\alpha)'$	$\alpha x^{\alpha-1}$

MuPAD で計算してみます。MuPAD では、自然定数の底 (e) は大文字の E , また $e^x = \exp(x), \log x = \ln(x)$(エルエヌ) と表されます。(指数・対数関数の項参照)

$(\sin x)'$は?	• diff(sin(x), x);	>> $\cos(x)$
$(\cos x)'$は?	• diff(cos(x), x);	>> $-\sin(x)$
$(\tan x)'$は?	• diff(tan(x), x);	>> $\tan(x)^2 + 1$
$(e^x)'$は?	• diff(exp(x), x);	>> $\exp(x)$
$(\log x)'$は?	• diff(ln(x), x);	>> $\dfrac{1}{x}$
$(x^a)'$は?	• diff(x ^ a, x);	>> $a\ x^{a-1}$
$(\sqrt{x})'$は?	• diff(sqrt(x), x);	>> $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ なので全て一致します。[注64)]

8.3 高階微分

n 階微分 $f^{(n)}(x)$ は diff(f(x),x \$ n) とします。[注65)]

$f(x) = x^3$ の第 2 次導関数と第 3 次導関数を求めてみます。

$f''(x)$ は?	• diff(x ^ 3, x \$2);	$6x$
$f'''(x)$	• diff(x ^ 3, x \$3);	6

たしかに $(x^3)' = 3x^2, (x^3)'' = (3x^2)' = 6x, (x^3)''' = (6x)'' = 6$ ですから一致します。

8.4 複雑な関数の微分

微分の公式を復習してみましょう。

和	$(u+v)' = u' + v'$
積	$(uv)' = u'v + uv'$
商	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
合成関数の微分	$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

注64) MuPAD に計算させるには、diff(tan(x),x); に続けて、rewrite(%,sincos); simplify(%); と打ちます。rewrite(f(x),sincos) は $f(x)$ を sin(x) と cos(x) を使って書き直せという意味です。

注65) ここで\$ マークは一般に ' 繰り返しの回数' を意味し，例えば，• k ^ 2 \$ k=1..5;　>>1,4,9,16,25 となります。

幸か不幸か, 私たちは，これらの公式を全く意識しないで簡単に微分することが出来ます。すべて diff を使うだけです。

(1) $\left(\frac{7x-6}{x^2+1}\right)'$ を求めましょう。

- `diff((7*x-6)/(x^2+1),x);` $\qquad$ >> $\dfrac{7}{x^2+1}-\dfrac{2x(7x-6)}{(x^2+1)^2}$

通分しましょう。 続けて、normal(%) と打ちます。

- `normal(%);` $\qquad$ >> $\dfrac{12x-7x^2+7}{2x^2+x^4+1}$

さらに分母・分子を因数分解します。

- `factor(%);` $\qquad$ >> $-\dfrac{-12x+7x^2-7}{(x^2+1)^2}$

注66) 次は (2) $\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)'$ を求めてみましょう。

- `diff((1+sin(x))/(1-sin(x)),x);` $\qquad$ >> $-\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+1}-\dfrac{\cos(x)(1-\sin(x))}{(\sin(x)+1)^2}$

factor で, 通分と因数分解をします。

- `factor(%);` $\qquad$ >> $\dfrac{(-2)\cos(x)}{(\sin(x)+1)^2}$

結果を確かめて見ましょう。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' &= \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1-\sin x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}\\ &= \frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}\\ &= -\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}\end{aligned}$$

確かに一致しました。商の微分公式を使って解きましたが,MuPAD では, それを全く意識する必要はないです。[注67)]

8.5　不定積分

$f(x)$ を x に関し不定積分するのは int(f(x),x) とします。ただし，MuPAD では積分定数 C は表示されません。さまざまな関数の積分を復習しておきます。

$\int e^x dx$	e^x+C
$\int \frac{1}{x}dx$	$\log\lvert x\rvert+C$
$\int x^\alpha dx (\alpha \fallingdotseq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

$\int \sin x dx$	$-\cos x+C$
$\int \cos x dx$	$\sin x+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\tan x+C$

注66) 実は factor(); は通分もやってくれるので normal(%);とfactor(%); の代わりに factor(%); だけでも同じです。

注67) したがって特に微分法を習い始めの人は，必ず自分の手でも計算できるようにしておいてください。これは積分に関しても同様です。

MuPAD で計算してみます。

$\int e^x dx$ は? • `int(exp(x), x);` $\exp(x)$

$\int \frac{1}{x} dx$ は? • `int(1/x, x);` >> $\ln(x)$

$\ln(x) = \log(x), \exp(x) = e^x$ でしたから合っています。三角関数に移りましょう。

$\int \sin x dx$ は? • `int(sin(x), x);` >> $-\cos(x)$

$\int \cos x dx$ は? • `int(cos(x), x);` >> $\sin(x)$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ は? • `int(1/cos(x) ^ 2, x);` >> $\frac{2\sin(2x)}{2\cos(2x)+1}$

最後の式は, $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ となる筈なので、$\tan x$ を使って書き直します。

• `rewrite(%, tan);` >> $\frac{4\tan x}{(1+\tan(x)^2)\left\{\frac{2(1-\tan(x)^2)}{1+\tan(x)^2}+2\right\}}$

normal を使って約分します。

• `normal(%);` >> $\tan x$

やっと一致しました。次はやや複雑な式の不定積分をやってみましょう。

$\int \cos^2 x dx$ は? • `int(cos(x)^2, x);` >> $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$

$\int \sin 2x \cos x dx$ は? • `int(sin(2 * x) * cos(x), x);` >> $-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\cos(3x)}{6}$

実際、$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ だから

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

また、積和の公式より $\sin 2x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ だから

$$\int \sin 2x \cos x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos x}{2} + C$$

ですから, 一致します。この他, MuPAD では置換積分や部分積分をやることも出来ますが, それは後の節に廻します。

8.6 定積分

これは答えを簡単にする必要が余りないので、扱いは，比較的簡単です。

$\int_0^{\pi} \sin x dx$ は?	• `int(sin(x), x = 0..PI);`	>> 2
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ は?	• `int(cos(x), x = 0..PI/2);`	>> 1
$\int_0^1 e^x dx$ は?	• `int(E^x, x = 0..1);`	>> exp(1) − 1
$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ は?	• `int(1/x, x = 1..2);`	>> ln(2)
$\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$ は?	• `int(E ^ x - E ^ (-x), x = -1..1);`	>> $\exp(1) - \frac{1}{\exp(-1)}$
簡単にすると？	• `simplify(%);`	>> 0
$\int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx$ は?	• `int(x/(x ^ 2 - 6 * x + 8), x = 6..8);`	>> 3ln(4) − 2ln(2) − ln(6)
まとめると？	• `combine(%, ln);`	>> $\ln\frac{8}{3}$

実際,

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_0^1 e^x dx = \Big[e^x\Big]_0^1 = e - 1 \qquad \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \Big[\log x\Big]_1^2 = \log 2$$

$$\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_{-1}^1 = (e + e^{-1}) - (e^{-1} + e) = 0$$

$$\begin{aligned}\int_6^8 \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx &= \int_6^8 \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right) dx = 2\Big[\log|x-4|\Big]_6^8 - \Big[\log|x-2|\Big]_6^8 \\ &= 2(\log 4 - \log 2) - (\log 6 - \log 4) \\ &= 2\log 2 - (\log 2 + \log 3) + 2\log 2 = 3\log 2 - \log 3 = \log\tfrac{8}{3}\end{aligned}$$

MuPAD では $e^x, \log x$ はそれぞれ exp(x),ln(x) とかかれるので, 一致します。また，最後の 2 つの例のように，さらに簡単になるかもしれないので注意してください。simplify (式の簡略化), combine(,ln) ($\log x$ の項をまとめる), normal (通分), factor(因数分解) などを使って簡単にしてみましょう。また float(小数表示) を使うのも答えの見当をつけるのに役立ちます。

MuPAD は 置換積分・部分積分が必要な積分も簡単に解きます。同じく int を使うだけです。

$\int_1^e \frac{\sin(\pi \log x)}{x} dx$ は?	• `int(sin(PI * ln(x))/x, x = 1..E);`	>> $\frac{2}{\pi}$
$\int_1^e x^2 \log x dx$ は?	• `int(x ^ 2 * ln(x), x = 1..E);`	>> $\frac{2\exp(3)}{9} + \frac{1}{9}$

確かめましょう。$\pi\log x = t$ とおくと, $\frac{\pi}{x}dx = dt$, $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & e \\ \hline t & 0 & \to & \pi \end{array}$

$$\int_1^e \frac{\sin(\pi\log x)}{x}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

また,

$$\int_1^e x^2\log x dx = \int_1^e \Big(\frac{x^3}{3}\Big)'\log x dx = \Big[\frac{x^3}{3}\log x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \Big[\frac{x^3}{9}\Big]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

となり，確かに一致します。[注68)]

8.7 絶対値のついた積分

$|x|$(x の絶対値) は MuPAD では abs(x) と表します。しかし，MuPAD は整式の場合と異なり, いつでも正しい答えを与えるわけではありません。

$\int_0^\pi \lvert\cos x\rvert dx$ は?	• `int(abs(cos(x)), x = 0..PI);`	>> 2
$\int_0^{2\pi} \lvert\sin x + \cos x\rvert dx$ は?	• `int(abs(sin(x) + cos(x)), x = 0..2 * PI);`	>> $4\ 2^{\frac{1}{2}}$
$\int_0^{2\pi} \lvert 3\sin x + 2\cos x\rvert dx$ は?	• `int(abs(3 * sin(x) + 2 * cos(x)), x = 0..2 * PI);`	>> 0

実際やってみると、

$$\int_0^\pi |\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x)dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2$$

次の積分です。$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ だから, $x + \frac{\pi}{4} = t$ とおくと, $dx = dt$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2\pi \\ \hline t & \frac{\pi}{4} & \to & 2\pi + \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x|dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi+\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}|\sin t|dt$$

ところが $\sin t$ の周期は 2π だから

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi+\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}|\sin t|dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin t|dt = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sin t dt = 2\sqrt{2}\Big[-\cos t\Big]_0^\pi = 4\sqrt{2}$$

となり上の二つは一致しますが，明らかに最後の積分は間違っています。(2 番目の積分と同様に計算すると, $4\sqrt{13}$ になるはずです。) [注69)] したがって, 絶対値がついている積分においては，結果を確かめたほうが良いでしょう。

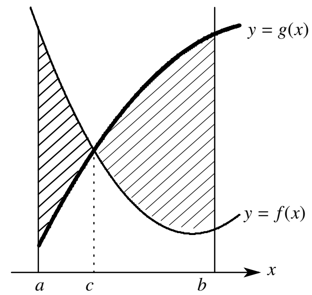
注68) 部分積分・置換積分を MuPAD でやることもできます。後の節を見てください。

注69) これは $3\sin x + 2\cos x = 0$ の解が，簡単に表せないことと関係があると思われます。(解は $2\pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$, と $\pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$)

8.8 面積

右図のように $a \leqq x \leqq c$ で $g(x) \leqq f(x)$, $c \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq g(x)$ のとき，$x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた領域の面積の和を S とすると，

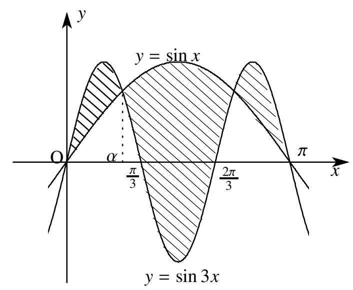
$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\}dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)|dx + \int_c^b |f(x) - g(x)|dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \end{aligned}$$



であるから，面積は $|f(x) - g(x)|$ の積分で与えられる。

例題

二つの曲線 $C_1 : y = \sin x (0 \leqq x \leqq \pi), C_2 : y = \sin 3x (0 \leqq x \leqq \pi)$ によって囲まれる面積 S を求めよ。



まず,MuPAD でやってみます。$S = \int_0^\pi |\sin 3x - \sin x|dx$ ですから次のように入力します。

- `int(abs(sin(3 * x) - sin(x)), x = 0..PI);` $\quad$ >> $\dfrac{8\,2^{\frac{1}{2}}}{3} - \dfrac{4}{3}$

次は手計算でやって見ます。

【解答】

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ における交点の x 成分を α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ とおくと，3 倍角の公式より

$$\sin\alpha = \sin 3\alpha \iff \sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \iff 4\sin^3\alpha - 2\sin\alpha = 0$$

$$\iff \sin\alpha\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ だから

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \alpha = \frac{\pi}{4}$$

C_1, C_2 は直線 $x = \frac{\pi}{2}$ に関し対称だから

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_0^{\alpha}(\sin 3x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \sin 3x)dx \\
&= \Big[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(-\frac{1}{3}\cos 3\alpha + \cos\alpha\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + 0 - \left(\frac{1}{3}\cos 3\alpha - \cos\alpha\right) \\
&= -\frac{2}{3}\cos 3\alpha + 2\cos\alpha - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\cos\frac{3\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}
\end{aligned}$$

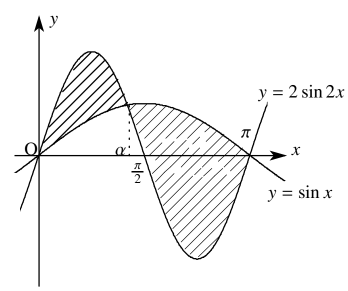
よって

$$S = 2\left(\frac{4\sqrt{2} - 2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2} - 4}{3}$$

一致しました。[注70] 次はどうでしょう?

例題

二つの曲線 $C_1 : y = \sin x (0 \leqq x \leqq \pi), C_2 : y = \sin 2x (0 \leqq x \leqq \pi)$ によって囲まれる面積 S を求めよ。



まず,MuPAD でやってみます。$S = \int_0^{\pi} |\sin x - 2\sin 2x| dx$ ですから次のように入力します。

- `int(abs(sin(x) - 2 * sin(2 * x)), x = 0..PI);` >> 2

次は手計算でやって見ます。

【解答】 $0 < x < \pi$ における交点の x 成分を α $(0 < \alpha < \pi)$ とおくと,倍角公式より

$$\sin\alpha = 2\sin 2\alpha \Longleftrightarrow \sin\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha \Longleftrightarrow \sin\alpha(1 - 4\cos\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\alpha}(2\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - 2\sin 2x)dx \\
&= \Big[-\cos 2x + \cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[-\cos x + \cos 2x\Big]_{\alpha}^{\pi} \\
&= (-\cos 2\alpha + \cos\alpha) - 0 + 2 - (\cos 2\alpha - \cos\alpha) \\
&= -2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 2 = -2(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos\alpha + 2
\end{aligned}$$

[注70] この計算を,Maple という数学ソフトでやると $-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ となり一致しない。この問題に関しては MuPAD のほうが優れていることになる。

$\cos\alpha = \frac{1}{4}$ だから

$$S = -4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 = \frac{17}{4}$$

一致しません! **このように交点の x 成分が数字で表されないときは，MuPAD では間違いが起こるときがあります。** 注71)

8.9 【参考】置換積分・部分積分

MuPAD で置換積分をするには intlib(integral library) を使います。ライブラリーというのは、もちろん図書館といういみで、普段使われないコマンドを ' 貯蔵' してあります。普段は stdlib(standard library; 標準ライブラリ) だけをメモリーにロードして、computer のリソースを節約しています。次の表で hold(); は式の展開を一時停止するコマンドで、hold() がないと、すでに積分された式を置換積分することになってしまいます。また、hold で止めていた演算を再開するのは eval(); 不定積分された式に変数を代入するのは subs(); です。注72)

$\int f(x)dx$ を $x = g(t)$ で置換積分	intlib :: changevar(hold(int)(f(x), x), x = g(t));
$\int_a^b f(x)dx$ を $x = g(t)$ で置換積分	intlib :: changevar(hold(int)(f(x), x = a ..b), x = g(t));
$\int f(x)g'(x)dx$ とみて, 部分積分	intlib :: byparts(hold(int)(f(x) * g′(x), x), g′(x));
$\int_a^b f(x)g'(x)dx$ とみて, 部分積分	intlib :: byparts(hold(int)(f(x) * g′(x), x = a ..b), g′(x));

注73)

8.9.1 置換積分 (不定積分)

$\int f(x)dx$ を $x = g(t)$ と置換積分するのは intlib::changevar(hold(int)(f(x),x),x=g(t)) とします。hold によって積分はまだ実行されていません。置換積分の実行は eval です。実行された積分を x の式に直すのは, subs(,) を使います。$\displaystyle\int x(1-x)^5 dx$ を $1 - x = t$ と置換してみます。

- intlib :: changevar(hold(int)(x * (1 − x) ^ 5, x), 1 − x = t); >> $int(t^6 - t^5, t)$;

hold があるので, t を使って書き直されただけです。$1 - x = t$ とおくと, $\int x(1-x)^5 dx = \int (t^6 - t^5)dt$ と置換積分できることを表しています。この置換積分を実行するには eval を使います。

- eval(%); >> $\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6}$

これで t の式に不定積分されました。もし x の式に直したいなら,subs(,) を使います

- subs(%, t = 1 − x); >> $\frac{(1-x)^7}{7} - \frac{(1-x)^6}{6}$

注71) ちなみに, 同じ問題を Maple で解かせても同じ間違いをします。$\cos x$ の逆関数 $\cos^{-1} x = \arccos x$ を利用して int(2*sin(2*x)−sin(x),x=0..arccos(1/4))+ int(sin(x)−2*sin(2*x),x=arccos(1/4))..PI) としてもうまくいきません。もしどうしても MuPAD で解きたいならば int(2*sin(2*x)−sin(x),x=0..a)+ int(sin(x)−2*sin(2*x),x=a..PI) としてから手動で やると良いでしょう。

注72) changevar(),bypart(),eval(),subs() はそれぞれ、change variable(変数を変換),integration by parts(部分積分), evaluate(評価する),substitute(置換・代入する) の略です。subs(f,x=a) で f に x=a を代入します。

注73) hold(); の括弧の位置を変えて、intlib :: changevar(hold(int(f(x), x)), x = g(t)); などとしても大丈夫です。

8.9.2 置換積分 (定積分)

今度は定積分です。(1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^5 dx$ を $1-x=t$ と置換してみます。

- $\texttt{intlib :: changevar(hold(int)(x * (1 - x) ^ 5, x = 0 ..1), 1 - x = t);}$ >> $int(t^6 - t^5, t = 1..0);$

$1-x=t$ とおくと, $\int_0^1 x(1-x)^5 dx = \int_1^0 (t^6 - t^5) dt$ を表しています。変域が自動的に変わりました。eval() で値が求まります。

- $eval(\%);$ >> $\dfrac{1}{42}$

次は (2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ を $x = \tan t$ とおいて求めてみます。

- $\texttt{intlib :: changevar(hold(int)(1/(1 + x ^ 2), x = 0..1), x = tan(t));}$ >> $int(1, t = 0..PI/4);$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt$ となることを示しています。eval を使って積分を実行します。

- $\texttt{eval(\%);}$ >> $\dfrac{PI}{4}$

実際、$x = \tan t$ とおくと, $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 t}} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dt = \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

8.9.3 部分積分

最後は部分積分です。2 つ目の引数を適切に選ばないともとの式より複雑になります。
(1) $\int x \cos x dx$ の部分積分をやってみます。$\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx$ と見て積分するには、第 2 引数を $\cos x$ とします。

- $\texttt{intlib :: byparts(hold(int)(x * cos(x), x), cos(x));}$ >> $x\sin(x) - int(sin(x), x)$

$\int x \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx$ を表しています。部分積分されました。eval で 2 つ目の積分を実行します。

- $eval(\%);$ >> $\cos(x) + x\sin(x)$

実際、

$$\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int (x)' \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

で正しいです。しかし、$\int x \cos x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cos x dx$ と見て積分すると

- $\texttt{intlib :: byparts(hold(int)(x * cos(x), x), x);}$ >> $\dfrac{x^2 \cos(x)}{2} - int\left(-\dfrac{x^2 \sin(x)}{2}, x\right)$

となりもとの式より複雑です。

(2) $I = \int e^x \sin x\, dx$ を部分積分してみます。$\int e^x \sin x\, dx = \int (e^x)' \sin x\, dx$ と見て積分すると,

- `I := intlib::byparts(hold(int)(exp(x)*sin(x), x), exp(x));`

  $>> \exp(x) * \sin(x) - \mathtt{int}(\exp(x)\cos(x), x)$

これは,$I = \int e^x \sin x\, dx = \int (e^x)' \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$ となることを表していて，確かに部分積分されました。eval() で評価してみると

- `eval(%);` $>> \dfrac{\sin(x)\exp(x)}{2} - \dfrac{\cos(x)\exp(x)}{2}$

いきなり答えが求まってしまいました！考えてみると，当たり前ですね。

8.9.4 まとめ

MuPAD は，微積分は非常に得意としています。絶対値がなく，積分区間が,0, $\frac{1}{2}$,π などの数字で与えられているときは, , たぶん正解を出してくると思います。しかし，絶対値があったり，積分区間が関数になっているときは, 間違いの起こる可能性が高いので注意が必要です。

でも, 高校生の段階では，MuPAD で計算するだけでなく自分の手でまず計算できるようにすることが, もっと大事です。MuPAD はあくまでも, 勉強の刺激として，または結果の検算として使ったほうがいいでしょう。

9　平面のグラフ

$y = f(x)$ のグラフ ($a \leqq x \leqq b$)	plotfunc2d(f(x), x = a ..b)
$y = f(x)$ のグラフ ($a \leqq x \leqq b$)	plot :: Function2d(f(x), x = a ..b)
$f(x, y) = 0$ のグラフ ($a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$)	plot :: implicit(f(x, y), x = a ..b, y = c ..d)
媒介変数表示のグラフ ($a \leqq t \leqq b$)	plot :: Curve2d([x(t), y(t)], t = a ..b)
極座標 $(r, \theta) = (f(t), g(t))$ のグラフ ($a \leqq t \leqq b$)	plot :: polar([f(t), g(t)]t = a ..b)

注74)　MuPAD ではいろいろな形で表されたグラフを描くことが出来ます。特に $y = f(x)$ のグラフを描く plotfunc2d は簡単で，たくさんのグラフを一緒に描くことが出来ます。そのうえ，MuPAD は，違った描写法で描かれたグラフを一緒に描写することも出来ます。さらに，いろいろなオプションがあり、グラフの描写の様子を細かく指定することが出来ます。詳しくは，各節を見てください。

9.1　$y = f(x)$ のグラフ

$y = f(x)$ のグラフを，$a \leqq x \leqq b$ の範囲で描くのは plotfunc2d(); を次のようにしてつかいます。注75)

```
plotfunc2d( f(x), x = a ..b);
```

y の範囲も $c \leqq y \leqq d$ のように指定したいときは次のようにします。

```
plotfunc2d( f(x), x = a ..b, y = c ..d);
```

2 つ以上のグラフを重ねて描きたいときは, コンマで区切るだけです。

```
plotfunc2d( f(x), g(x) , x = a ..b);
```

scene option をつけるのは，次のようにコンマで区切って指定します。2 つ以上の scene option をつけるときは, コンマで区切って指定します。

```
plotfunc2d(option, f(x), x = a ..b);
plotfunc2d(option1, option2, ··· , f(x), x = a ..b);
```

scene option というのは全体の描写を決めるオプションで, 主なものとしては Scaling, Ticks, BackGround, ForeGround, Axes, Arrows などあり，それぞれの値を Scaling=*Constrained* (実際のスケールで表示), Ticks=[20, 10] (x 軸方向の目盛りを 20 個，y 軸方向の目盛りを 10 個刻む), Title=”2 ji kansuu”(2 ji kansuu というタイトルをつける) のように (名前)=(値) のように指定します。とてもたくさんの種類の指定が出来ますが，私が良く使うのは Scaling=Constrained ぐらいで，たまに，Ticks ,Title も使うくらいです。オプションに関しては, 最後の節に簡単な表にしていますので, 詳しくはそちらを見てください。注76)

注74)　plot::〜 の形のコマンドは plot(plot::〜) のように plot() と組み合わせて使う。

注75)　plotfunc2d は, plot+function+2d(2 次元の関数のグラフのプロット) の意味。また，plot::Function2d() のほうはグラフの色を変えたり，違う座標系で描かれたグラフを重ねるときに使います。後の節 (違う座標系で描かれたグラフを重ね合わせの章) で, 参考として扱います。

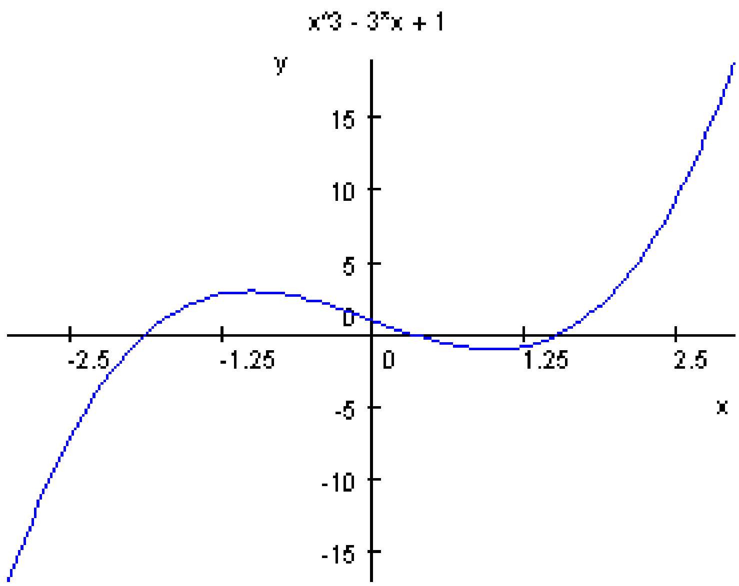
注76)　MuPAD の Help では，scene option は f(x) の前につけることになっていますが, 実際は plotfunc2d(f(x), x = a ..b, option); のように，後につけても大丈夫でした。その他のオプションとして plot option といって Color(グラフの色),Grid(パラメータの刻み数) など，個々のグラフの描写の仕方を指定するオプションもあり, これらはつける位置が異なります。しかし，plotfunc2d では plot option は, Grid しか指定できません。

9.1.1 $y = f(x)$ のプロットの基本

(1) 多項式のグラフ
整関数 (多項式) のグラフで基本を習得しましょう。
$y = x^3 - 3x + 1(-3 \leqq x \leqq 3)$ のグラフ

$$\bullet\ \mathtt{plotfunc2d}(\mathtt{x}\ \wedge\ 3 - 3 * \mathtt{x} + 1, \mathtt{x} = -3..3);$$

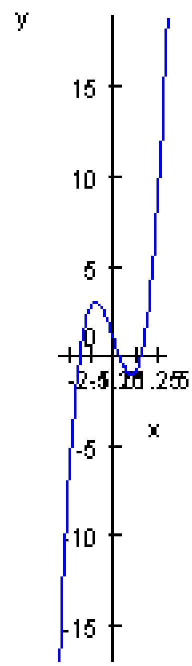
と打ちます。すると, 別の window が開き次のようなグラフが見えるはずです。



もし window が開かないときは，スタートボタンの右のほうに"Graphics-Vcam···" というボタンが見えるはずです。これをクリックしてください。さて，いつも教科書で見ているグラフより y 軸方向につぶれて見えますね。これは MuPAD が自動的に y 軸方向の目盛り (Scale) を変更して書いているためです。(y 軸の '15' という目盛りで解ります。)
オプションで Scaling=Constrained [注77] と指定してみます。

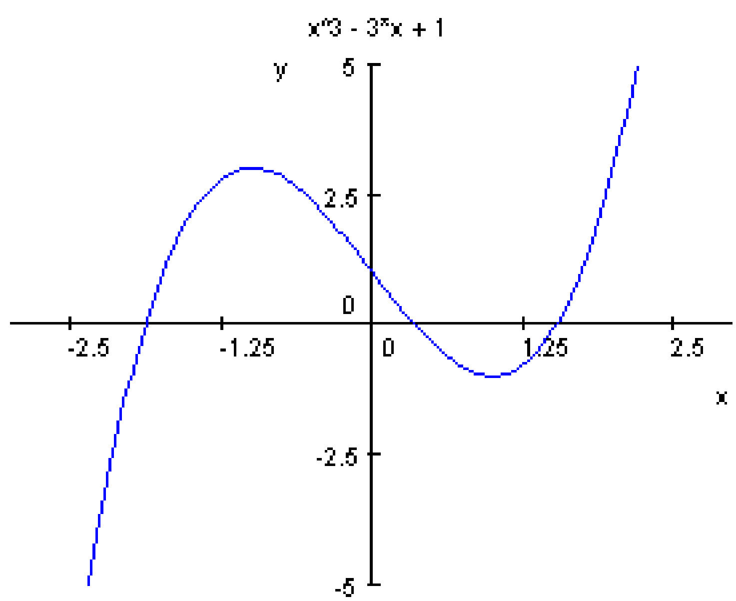
$$\bullet\ \mathtt{plotfunc2d}(\mathtt{Scaling} = \mathtt{Constrained}, \mathtt{x}\ \wedge\ 3 - 3 * \mathtt{x} + 1, \mathtt{x} = -3..3);$$

[注77] Constrained と指定すると x, y 軸方向の目盛りのとり方が同じになります。Unconstrained と指定すると、MuPAD が自動的に目盛りを変更します。初期値では Unconstrained になっています。ちなみに'constrain' とは ' 抑制する，押さえつける' という意味なので，Scaling=Constrained とは,MuPAD の scaling 機能を抑制するということなのでしょうか？



これが本当の姿ですが、少し見づらいですね。今度は，y 軸方向の変域も $-5 \leqq y \leqq 5$ に指定してみます。

• `plotfunc2d(x ^ 3 - 3 * x + 1, x = -3..3, y = -5..5);`

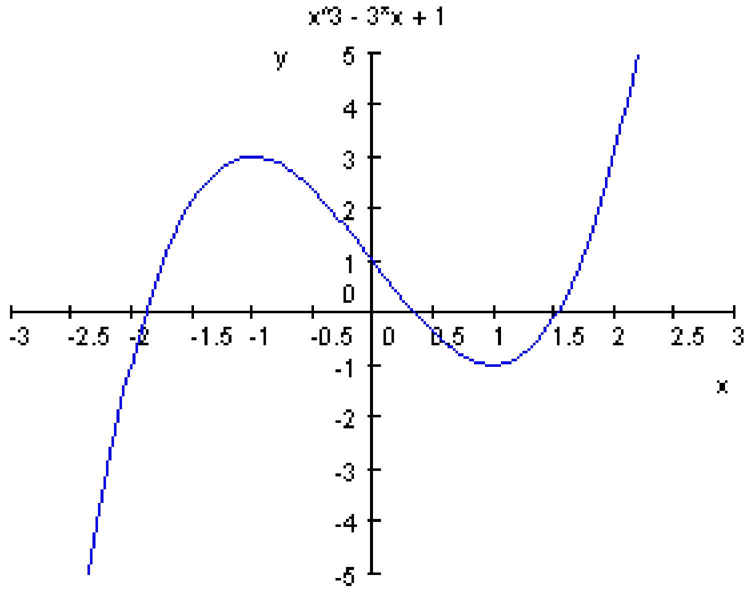


$-3 \leqq x \leqq 3$ かつ $-5 \leqq y \leqq 5$ の範囲しか表示されません。y 軸方向に拡大したいときはこのように y の範囲も指定するといいでしょう。最後に、微分を使って結果を確かめて見ましょう。$f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおくと,$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

ちょっとグラフの目盛り刻みが大きすぎてよく解りませんね。このような時は Ticks [注78] を使って, `Ticks` = [n_x, n_y]、または `Ticks` = n ($n_x = n_y = n$ のとき) と指定します。n が大きいほど刻みの数が増えます。

• `plotfunc2d(Ticks = 10, x ^ 3 − 3 * x + 1, x = −3..3, y = −5..5);`



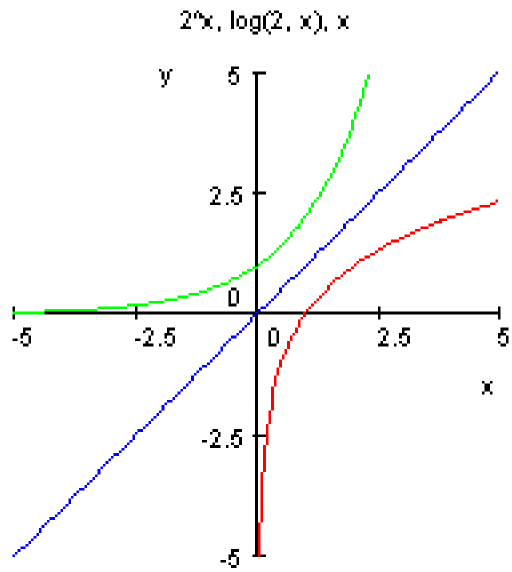
これで極値をグラフから読み取れます。どうやら合っているみたいです。他の関数でも, いろいろ”自分で”やってみましょう。(昔から自分（微分) の事は自分でやれといいます。これは, 有名なジョーク? です。)

(2) 指数・対数関数のグラフ

指数・対数関数のグラフも描いてみましょう。$a^x, e^x, \log_a x, \log x$ は MuPAD では, それぞれ `a ^ x`, `E ^ x`(または `exp(x)`), `log(a, x)`, `ln(x)` でしたね。$y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = x$ のグラフを一度に描いてみます。グラフを重ねて描くのは, 単に関数をコンマで区切って書くだけです。また, Scaling=Constrained にして x, y 軸方向の目盛りを同じにします。

• `plotfunc2d(Scaling = Constrained, 2^x, log(2, x), x, x = −5..5, y = −5..5);`

[注78] tick というのは時計の tick,tick(チクタク) と同じで’ 刻み’ という意味です。



$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ のグラフが直線 $y = x$ に関し対称となっていることが解ります。

9.1.2 自分で関数を作る

次は三角関数のグラフ (単位は度) を描きましょう。しかし、MuPAD では角度の単位はラジアンになってしまうので、自分で新しく関数を定義しなくてはいけません。[注79] $y = f(x)$ と新しい関数を定義するには `y := x- > f(x);` とします。$->$ は , 矢印 「→」を表していて、x に $f(x)$ を対応させるという感じです。さて，$180° = \pi$ ラジアンだから f(x)=Sin(x)(単位は度) を MuPAD の sin(x)(ラジアン単位) を使って定義すると $\mathtt{Sin}(x) = \sin\left(\frac{x}{180} \times \pi\right)$. よって

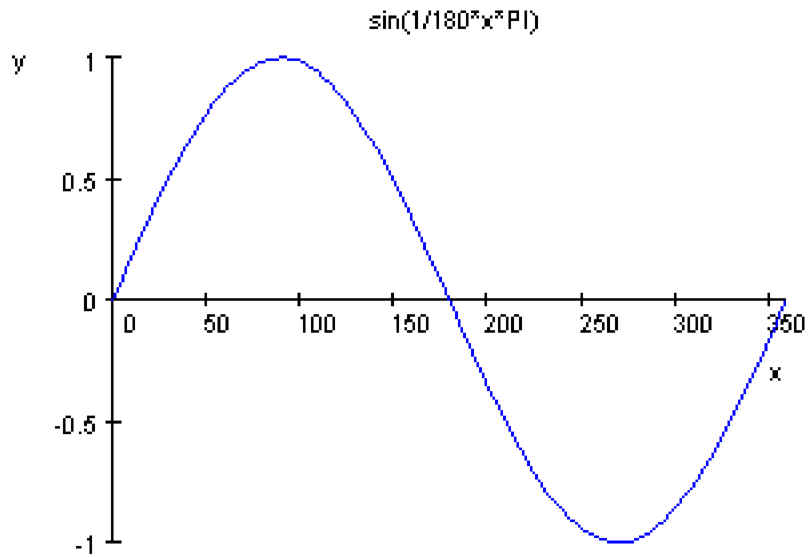
• `Sin := x- > sin(x/180 * PI);` `>> x- > sin(x/180 * PI)`

これを使って y=Sin(x)(0°≦ x ≦ 360°) を描くには

• `plotfunc2d(Sin(x), x = 0..360);`

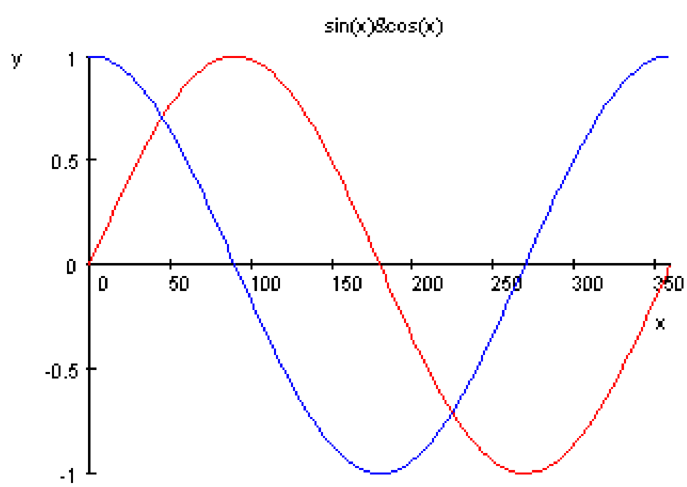
と打つだけです。

注79) ラジアンは数　で習う。三角関数の章参照。また, 関数の定義については, 文字式の取り扱いの章を参照



今度は Scale をいじる必要はなさそうです。しかしグラフの上部をみると, タイトルが sin(x/180 ∗ PI) となっています。これがいやならば、Title Option で Title=”タイトル名” のように指定し, タイトルを変えます。このとき ” ”のように囲むのを忘れないようにしましょう。ここでは ”sin(x)&cos(x)” というタイトルにします。[注80] ついでに $y = \cos(x)(0° \leqq x \leqq 360°)$ のグラフと重ねて書いて見ます。コンマで区切って書くだけでしたね。

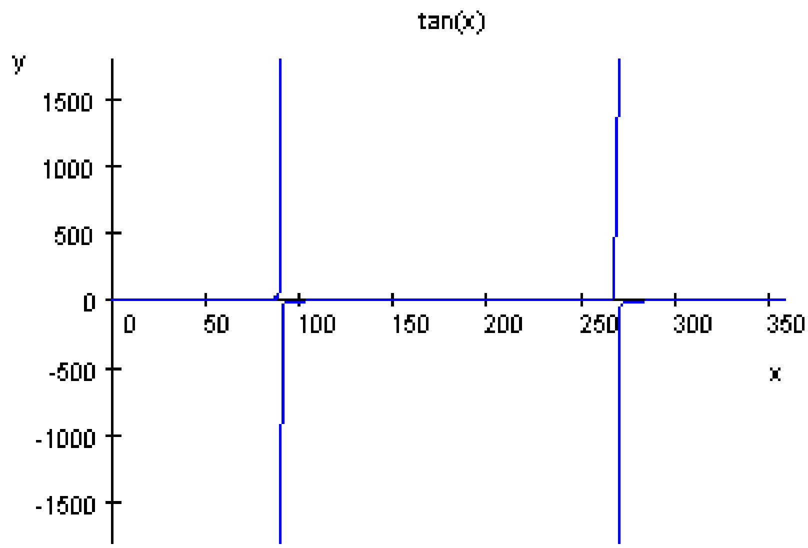
- Cos := x− > cos(x/180 ∗ PI);
- plotfunc2d(Title = ”sin(x)&cos(x)”, Sin(x), Cos(x), x = 0..360);



次は $\tan(x)(0° \leqq x \leqq 360°)$ のグラフです。”tan(x)” というタイトルをつけました。

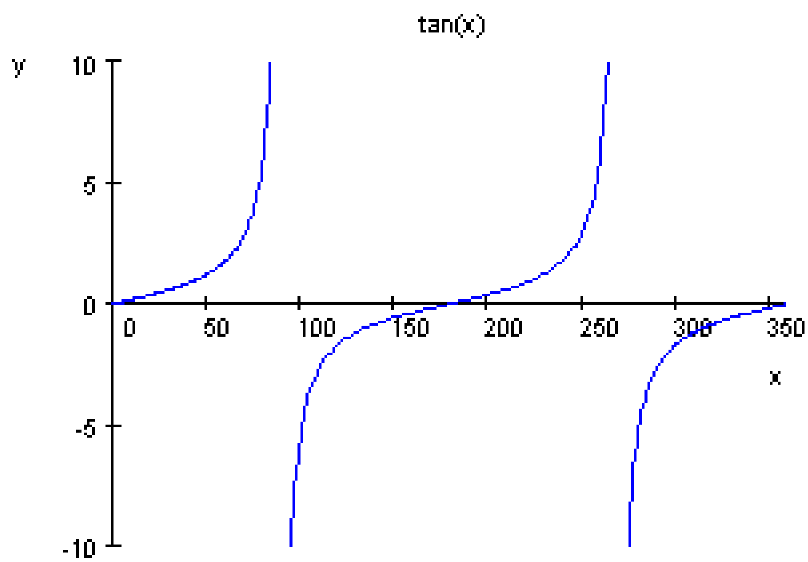
- Tan := x− > tan(x/180 ∗ PI);
- plotfunc2d(Title = ”tan(x)”, Tan(x), x = 0..360);

注80) ” ”で囲むのは中が文章 (string) 型のデータであるという意味でコンピュータの世界では良く使われます。” ”の中は何を書いてもエラーにはなりません。” kono naka ha jiyuu desu... ”



$x \to 90^\circ$ のとき $\tan(x) \to \pm\infty$ となるので、グラフは y 軸方向に画面を突き抜けてしまいます。y 軸方向の拡大は y の変域を指定すればよかったですね。$-10 \leqq y \leqq 10$ に指定します。

• `plotfunc2d(Title = "tan(x)", Tan(x), x = 0..360, y = -10..10);`



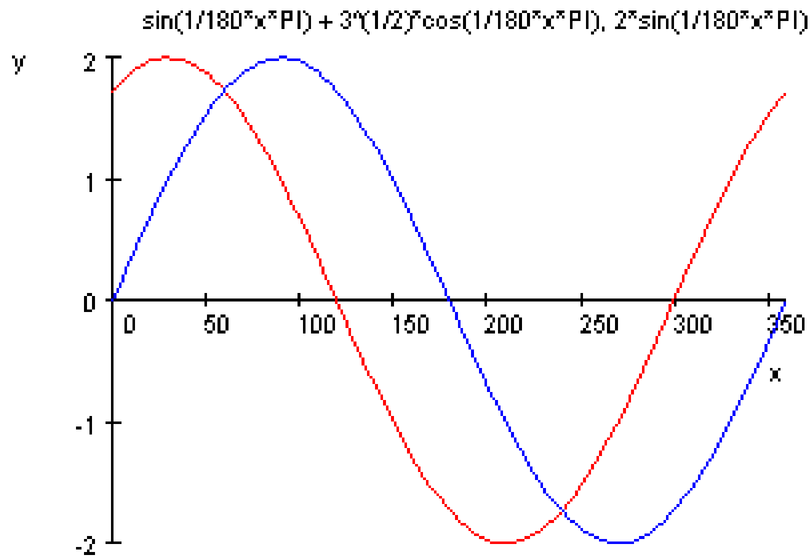
今度はうまくいきました。

三角関数の合成はうまく出来ませんでしたが、(三角関数の章参照) グラフは描けるはずです。

$$\sin x + \sqrt{3}\cos(x) = 2\sin(x + 60^\circ)$$

ですから、$y = 2\sin x$ と $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ のグラフを同時に描いてみましょう。

• `plotfunc2d(Sin(x) + sqrt(3) * Cos(x), 2 * Sin(x), x = 0..360);`



赤色のグラフと x 軸との交点の 1 つが $(300, 0)$ になっているので, $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ のグラフは $y = 2\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-60°$ 平行移動したグラフとなっていることがわかります。

9.1.3 継ぎはぎ関数のグラフ

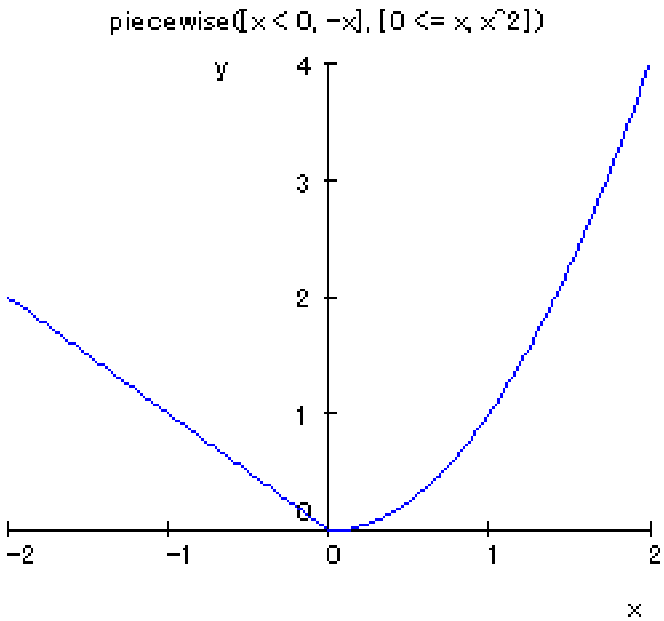
$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ のとき,} & -x \\ x \geqq 0 \text{ のとき,} & x^2 \end{cases}$$

のような，いわゆる継ぎはぎ関数の定義には piecewise($[f_1], [f_2], \cdots$) を使います。[注81] 例えば，上の関数を f という名前をつけて定義するには, 次のようにします。

- f := piecewise([x < 0, −x], [0 <= x, x ^ 2]); >> $-x$ if $x < 0$, x^2 if $0 <= x$

ここで矢印 (− >) を入れて，x− >piecewise としないでください。また，MuPAD では <, >, ≦, ≧ はそれぞれ <, >, <=, >= となるのでした。さて，この関数のグラフを,$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲で描いてみましょう。

- `plotfunc2d(f(x), x = -2..2);`



9.1.4 Grid option

ここからは，数 III のグラフです。**この後の節では, $\sin x, \cos x$ の角度の単位はラジアン (*rad*) とします。** 数 III のグラフでは, 普通に描くとグラフが滑らかにならずに,' ぎざぎざ' になることがあります。このような時は Grid option を使って Grid=n(n は自然数) と指定します。n が大きいほどグラフが滑らかになります。Grid option を使うときは, コンマで区切って次のように入力します。[注82]

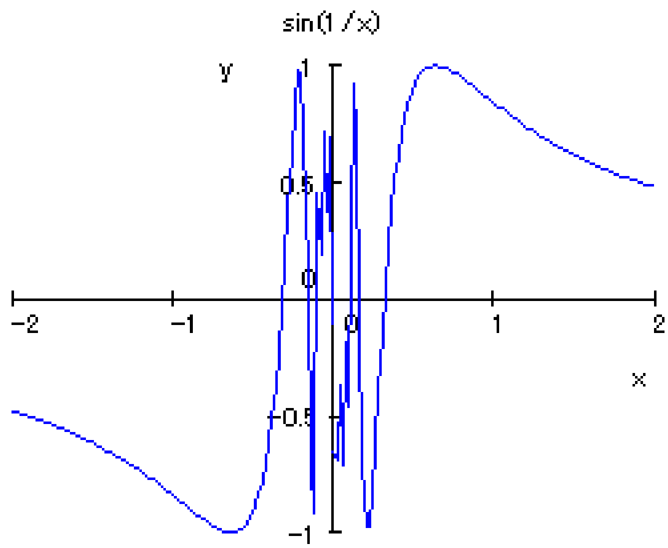
`plotfunc2d( f(x), x = a ..b, Grid = n);`

[注81] piecewise=piece+wise で piece は「一片，断片」という意味，wise は「〜の点では」という意味で moneywise, timewise などのように使います。「利口な」という意味ではありません。念のため。

[注82] grid というのは格子という意味です。MuPAD がグラフを描くとき，全ての x 成分に関する $f(x)$ の値を計算することは出来ません。いくつかの代表的な数字に対する値を計算し，それによって得られる点をつなげています。n が増えると, そのような点

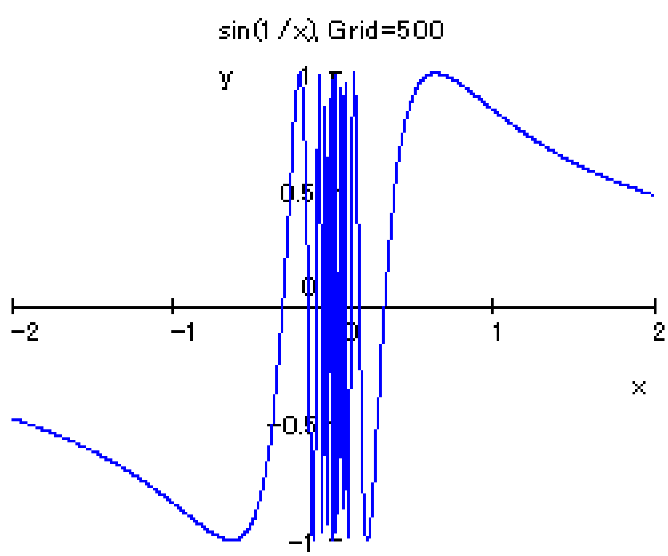
では、$y = \sin\frac{1}{x}(-2 \leqq x \leqq 2, x \fallingdotseq 0)$ のグラフを描いてみましょう。

- `plotfunc2d(sin(1/x), x = -2..2);`



このようにぎざぎざになっています。次は Grid=500 と指定してやって見ましょう。Title もつけておきました。

- `plotfunc2d(Title = "sin(1/x), Grid = 500", sin(1/x), x = -2..2, Grid = 500);`



だいぶ滑らかになりました。

の個数が増えます。最初の設定 (default) では,Grid=100 です。MuPAD の Help では，grid option は f(x) の後につけることになっていますが, 実際は `plotfunc2d(Grid = n, f(x), x = a ..b);` のように，前につけても大丈夫でした。

$\sin\frac{1}{x} = \pm 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = (2n \pm \frac{1}{2})\pi \Longleftrightarrow x = \frac{1}{(2n\pm\frac{1}{2})\pi}$ (n は整数) ですから $x = 0$ の近くでは無数に -1 と 1 の値をとり振動します。また，$x = 0$ のときは, 関数は定義されませんが MuPAD は気にしないようです。

9.1.5　様々な $y = f(x)$ のグラフ (数　)

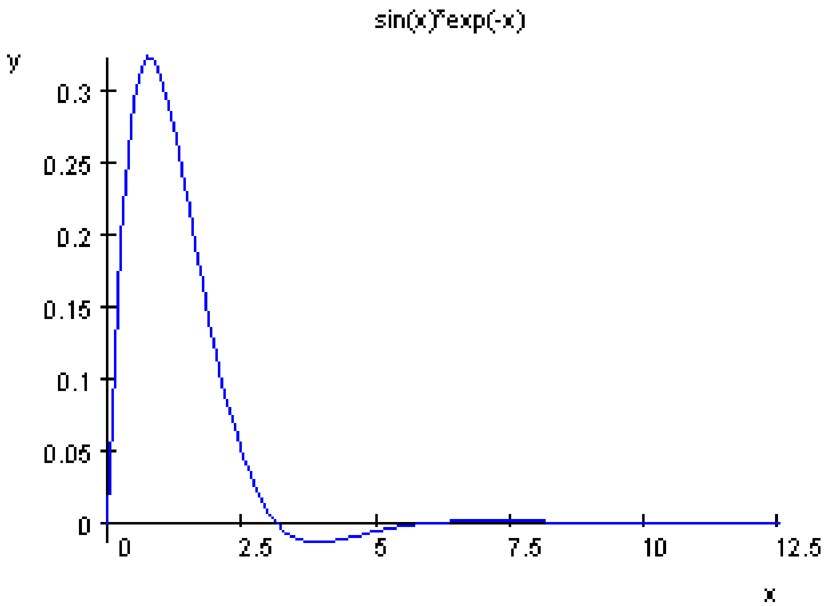
この節では, どんどんグラフを描いていきます。

例題 1

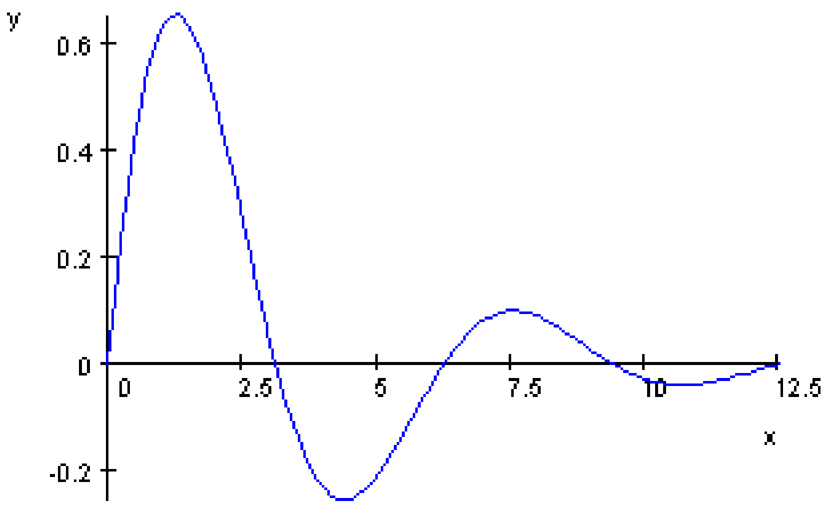
$y = e^{-x}\sin x (0 \leqq x \leqq 4\pi)$ のグラフの概略を描け。

$y = e^{-x}\sin x (0 \leqq x \leqq 4\pi)$ のグラフを描いてみましょう。横軸の単位はラジアンですが，$2\pi, 3\pi$ などと表示されませんから π　3.14 を使って，自分で換算する必要があります。

• plotfunc2d(exp(−x) ∗ sin(x), x = 0..4 ∗ PI);



残念ながら,π　3.14 を横軸の単位にとることはできません。でも 4π　$4 \times 3.14 = 12.56$ ですから少なくとも定義域はあっています。しかし $x > 6$ ではほとんど潰れています。e^{-x} は非常に速く小さくなるので，この様になります。y 軸方向に拡大しようとして y の変域を指定してみても，余りにつぶれ方が速いので，うまくいきません。ところが，このグラフは教科書などで見ると



のようなグラフになっていますが, これは実は $y = e^{-0.3x}\sin x$ のグラフです。指数が $0.3x$ となっているので、$x = 4\pi$　12.5 の近くでもつぶれていません。教科書などでは解りやすいようにデフォルメしてある訳です。

なお, 上下に描いたグラフは $y = \pm e^{-0.3x}$ のグラフです。$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ だから

$$-e^{-kx} \leqq e^{-kx}\sin(x) \leqq e^{-kx}$$

ここで左側等号は $\sin(x) = -1 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi,$ のとき成立するので $x = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ のとき $y = -e^{-kx}$ のグラフと $y = e^{-kx}\sin x$ のグラフは接します。また、$x = \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$ のとき $y = e^{-kx}$ のグラフと $y = e^{-kx}\sin x$ のグラフは接します。(上図)

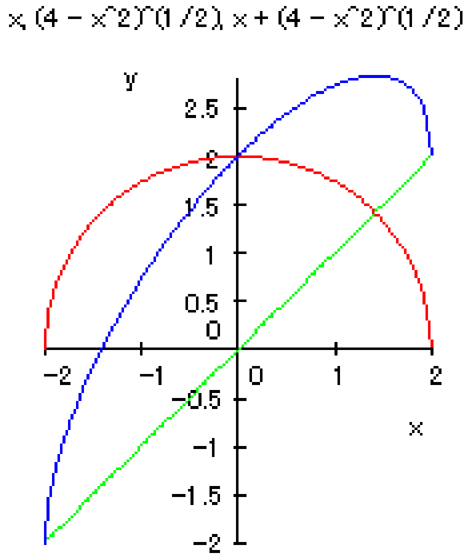
例題 2

$y = x$ のグラフと $y = \sqrt{4 - x^2}$ のグラフを利用して，$y = x + \sqrt{4 - x^2}(-2 \leqq x \leqq 2)$ のグラフを描け。

$y = \sqrt{4 - x^2}$ は半円を表し，$y = x$ は直線を表すので，2 つのグラフの y 成分を加えていけば, 微分しなくともグラフの概形は解ります。MuPAD を使って,3 つのグラフを一度に描いてみましょう。なお, Scaling=Constrained を使って実寸法で表示し，Ticks=[5,10] を使って，x 軸方向の目盛りを 5, y 軸方向の目盛りを 10 に変えてあります。

```
• plotfunc2d(Scaling = Constrained, Ticks = [5, 10],
    x, sqrt(4 - x ^ 2), x + sqrt(4 - x ^ 2), x = -2..2);
```

グラフは次のようになります。



増減を調べなくてもグラフが描けるような例のみを扱ってきましたが，今度は微分が必要なグラフです。

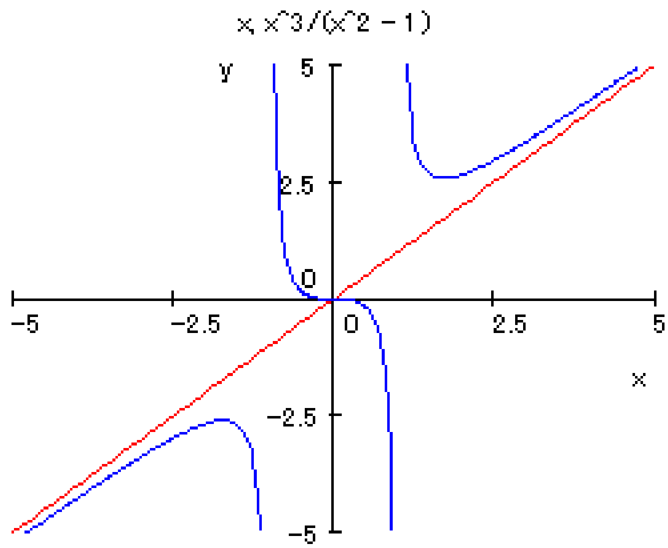
例題 3

$y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ の増減をしらべてグラフを描け。また $y = x$ のグラフとの関係を調べよ。

とりあえず，MuPAD で,$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフをまとめて描きましょう。

- `plotfunc2d(x, x ^ 3/(x ^ 2 - 1), x = -5..5, y = -5..5);`

次のようになります。



手計算で，結果を確認しておきましょう。

定義域は $x \neq \pm 1$. このとき,

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

y' の分母は常に正なので,$f'(x)$ の符号は分子の符号と一致する。よって増減表は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty \mid \infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid \infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	∞

また割り算を実行して

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$ だから， $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \{f(x) - x\} = 0$ よって,$x \to \pm\infty$ のとき,$y = f(x)$ は $y = x$ に限りなく近づく。
($y = x$ は漸近線)

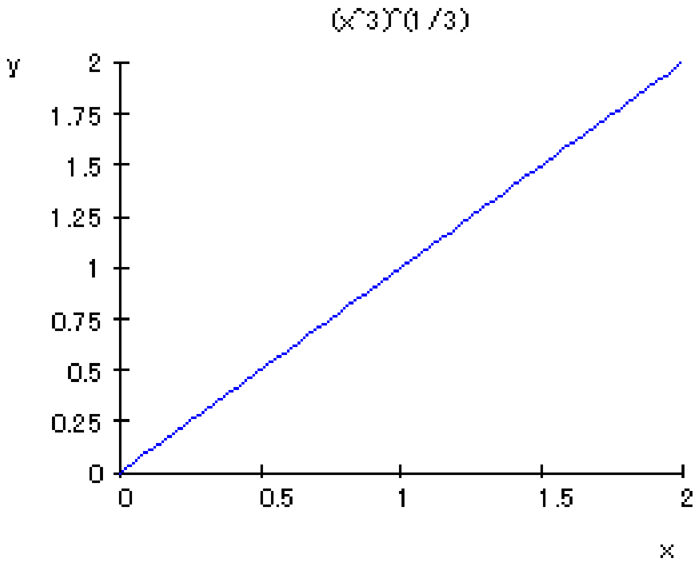
確かに正しいようです。

例題 4

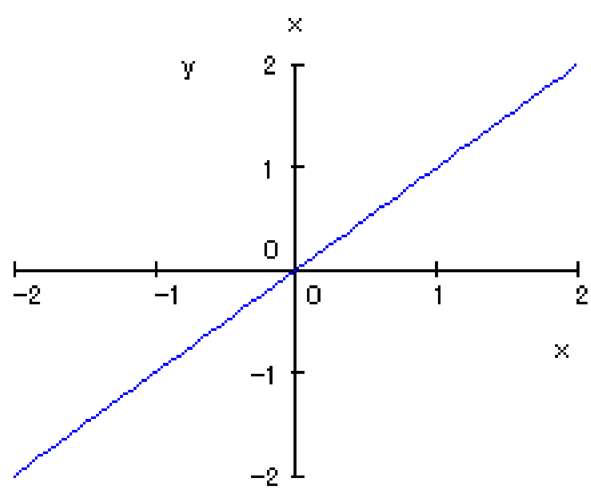
$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のグラフを MuPAD で描け。

次のようにするとどうでしょう？

• `plotfunc2d((x ^ 3) ^ (1/3), x = -2..2);`



これだと上図のように $x \geqq 0$ の範囲でしか図示されません。しかし, 実際は x が実数のとき $\sqrt{x^3} = x$ が成



なぜでしょう？ MuPAD では，$a > 0$ のとき，$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ と表しました。しかし, $a < 0$ のときは $\sqrt[3]{a}$ は a の虚数 3 乗根を現してしまいます。[注83] この例では，$x < 0$ のとき $x^3 < 0$ となるので，$x^{\frac{1}{3}}$ は $x < 0$ でプロットできません。

[注83] 例えば • `rectform((-1) ^ (1/3));` >> $\frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} I$ になります。ちなみに，rectform は $p + qi$ $(p, q$ 実数$)$ の形にするコマンドでした。

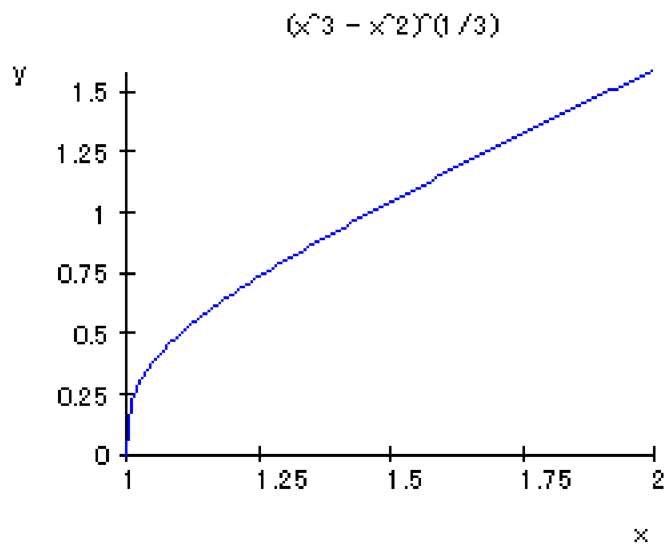
例題 5

$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の増減をしらべてグラフを描け。また漸近線も求めよ。

とりあえず，MuPAD で,$y = f(x)$ のグラフを描きましょう。MuPAD で $a > 0$ のとき，a の 3 乗根は $a^{\frac{1}{3}}$ と表しました。しかし, 今度は $x^3 - 3x$ が常に正ではないので注意が必要です。

• plotfunc2d((x ^ 3 − x ^ 2) ^ (1/3), x = −2..2);

しかし、これでは下図のようになってしまいます。



これは MuPAD が $x^3 - x^2 < 0$ の区間をプロットしていないからです。MuPAD では $a < 0$ のとき，$\sqrt[3]{a}$ で虚数 3 乗根をもとめてしまうので $x^3 - x^2 < 0$ となる区間ではプロットできません。
そこで,

$$\sqrt[3]{a} = \begin{cases} a^{\frac{1}{3}} & (a > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a = 0 \text{ のとき}) \\ -(-a)^{\frac{1}{3}} & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{例}\ ; \begin{cases} \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \\ \sqrt[3]{-8} = -(8^{\frac{1}{3}}) = -2 \end{cases}$$

を使います。$x^3 - x^2 = x^2(x - 1) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \leqq 0 \Longleftrightarrow x \leqq 1$ ですから次のように継ぎはぎ関数で定義すると良いでしょう。

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2} = \begin{cases} (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}} & (x > 1 \text{ のとき}) \\ -(x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} & (x < 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

したがって MuPAD では次のようになります。($x = 0$ のときの定義は, 省略できます)

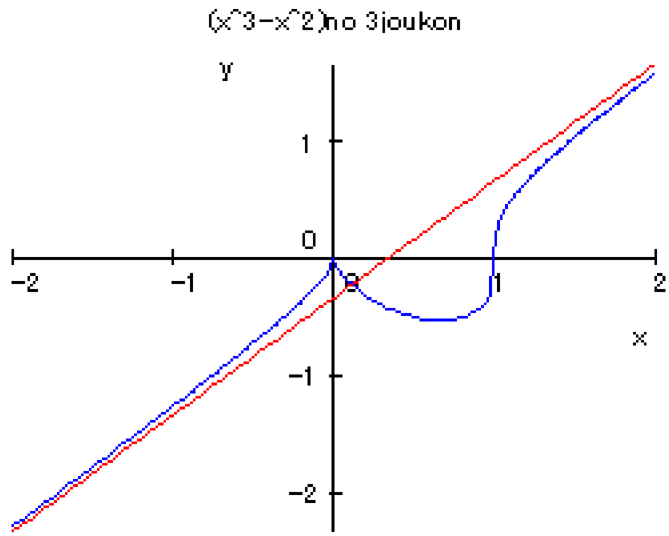
• f := piecewise([x >= 1, (x ^ 3 − x ^ 2) ^ (1/3)], [x < 1, −(x ^ 2 − x ^ 3) ^ (1/3)]);

>> piecewise((−x ^ 2 + x ^ 3)$^{\frac{1}{3}}$ if 1 <= x, −(x ^ 2 − x ^ 3)$^{\frac{1}{3}}$ if x < 1)

続けてプロットします。

• plotfunc2d(Title = ”(x ^ 3 − x ^ 2)no 3joukon”, x − 1/3, f(x), x = −2..2);

今度は，次のようなグラフになります。(ここでは $y = x - \frac{1}{3}$ のグラフも一緒に描いています。理由はあとでわかります。) またタイトルもつけました。



では, 手計算で確認しましょう。$x < 0$ のときでも，$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ と定義すると，0 以外の実数に対して $(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ が成り立ちますから,

$$y = (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}$$

よって，$x^3 - x^2 \fallingdotseq 0 \Longleftrightarrow x \fallingdotseq 0, x \fallingdotseq 1$ のとき

$$y' = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 2x) = \frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$-$	0	$+$		$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

また $\sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt[3]{(x - \frac{1}{3})^3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{1 + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{27}}{(x - \frac{1}{3})^3}}$ だから $x \to \pm\infty$ のとき，$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ は限りなく $y = x - \frac{1}{3}$ に近づく。よって，漸近線は $y = x - \frac{1}{3}$。これは確かにグラフより確かめられる。

9.2　$f(x, y) = 0$ のプロット

円の方程式；$x^2 + y^2 - r^2 = 0$ のように $f(x,y) = 0$ の形をした関数は，$y = f(x)$ の形に直して plot-func2d をつかうか，または plot::implicit を使って描きます。[注84)] 例えば，$f(x,y) = 0$ のグラフを，領域 $(a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d)$ の中で描かせるには plot() と一緒にして次のように入力します。

- `plot(plot :: implicit(f(x, y), x = a..b, y = c..d));`

いくつかのグラフを重ねたいときは, コンマで区切って [] の中に入れます。

- `plot(plot :: implicit([f(x, y), g(x, y)], x = a..b, y = c..d));`

scene option(Scaling=Constrained など) をつけたいときは，plot の () の中に入れます。

- ```
  plot(
  plot :: implicit(f(x, y), x = a..b, y = c..d)
  , scene option);
  ```

[注85)] plot option(Grid=500 ,Color=RGB::Blue など) をつけたいときは，plot::implicit() の括弧の中に入れます。これは plot option は個々のグラフの描写に関することなので当然ですね。

- `plot　(plot :: implicit(f(x, y), x = a..b, y = c..d, plot option));`

9.2.1　基本のプロット

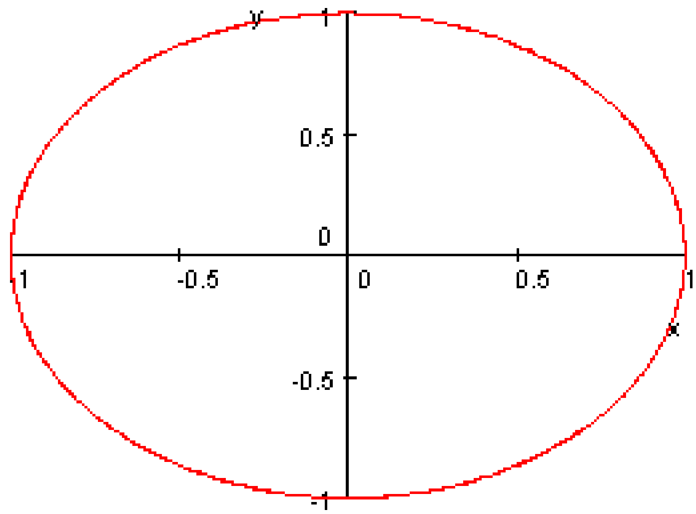
まずは円を描きましょう。$x^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 1 = 0$ ですから次のようにします。変域は $-1 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq y \leqq 1$ を含んでいれば大丈夫です。また、入力が長くなって見づらい時は 「Shift キー」を押しながら「Enter キー」を押すとエラーを出さずに改行できます。

- `plot(`
- `plot :: implicit(x ^ 2 + y ^ 2 - 1, x = -1..1, y = -1..1)`
- `);`

このとき、**x ˆ 2+y ˆ 2=1 とうっかりやってしまいがちなので注意してください。**さて結果は

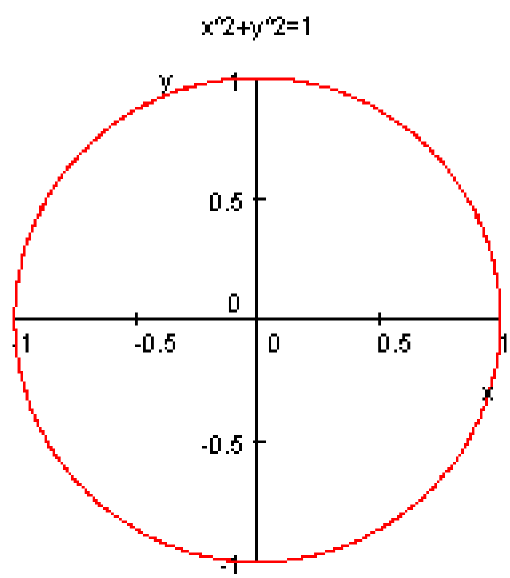
[注84)] $f(x,y) = 0$ で表される関数を陰関数 (implicit function) といいます. これに対し $y = f(x)$ で表される関数を陽関数 (explicit function) といいます。plot::implicit というのは plot library に入っている implicit コマンドのことでこのライブラリには，プロットのコマンドがたくさん入っています。

[注85)] 解りやすくするため 3 行に分けましたが, もちろん 1 行に入力してもいいです。何行かに分けて入力するときは Shift key を押しながら，Return key を押してください。
  ```



円がつぶれてしまいました。これは MuPAD が自動的に目盛り (scale) を調整しているからでした。scene option で Scaling=Constrained と Title="x ^ 2+y ^ 2=1" をつけてもう一度やってみましょう。[注86)]

- plot(
- plot :: implicit($x^2 + y^2 - 1, x = -1..1, y = -1..1$)
- , Scaling = Constrained, Title = "x ^ 2 + y ^ 2 = 1");

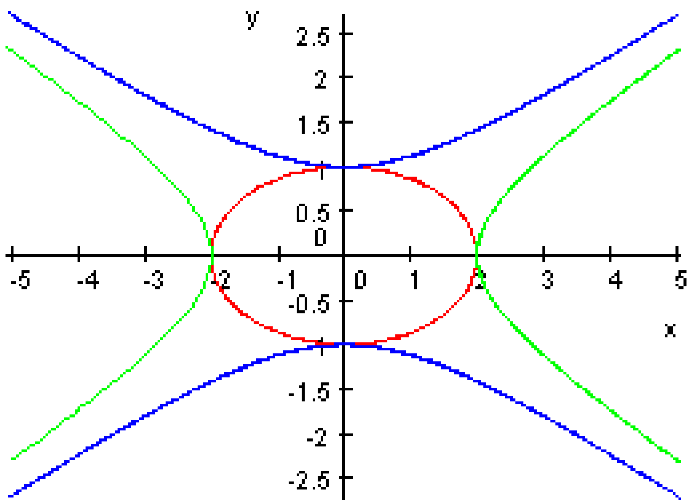


注86) MuPAD のヘルプでは scene option は plot::implicit() の後につけることになっていますが, 実際には前につけても大丈夫みたいです。

9.2.2 いくつかのグラフを一緒に描くとき

楕円と双曲線を一緒に書いて見ます。plotfunc2d() のときと異なり、この場合 [ ] で囲まないといけません。なお、Ticks=10 で目盛り刻みの数を 10 にしました。

- `plot(`
- `plot :: implicit([x ^ 2/4 + y ^ 2 − 1, x ^ 2/4 − y ^ 2 − 1, x ^ 2/4 − y ^ 2 + 1], x = −5..5, y = −5..5)`
- `, Ticks = 10);`



それぞれ順に

$$\frac{x^2}{2^2}+y^2=1,\ \frac{x^2}{2^2}-y^2=1,\ \frac{x^2}{2^2}-y^2=-1,$$

と変形できますから、たしかに上の様になります。

9.2.3 $f(x, y) = 0$ のグラフの応用

以前 (2001 年 7 月号の「大学への数学」学力コンテスト 6 番) に，採用された自作問題です。決して難しい問題ではないので, 皆さんもやってみてください。[注87)]

例題

実数 $x, y(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ が

$$\cos x + 2\cos y = 2 \qquad \cdots(*)$$

をみたしている。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 増減, 凹凸を調べて, $(*)$ のグラフを xy 平面に描け。

(2)x, y が $(*)$ の条件をみたすとき，$x + y$ の最大値を θ_0 とする。$\cos\theta_0$ の値を求めよ。

注87) 残念ながら，私は大学への数学の編集部とは直接の関係はありません。時々, 問題を作って送っているだけです。

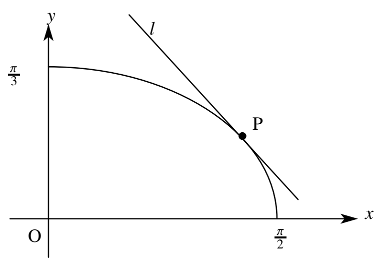
これを何人かの生徒にやらせると，以外にも (1) のほうで間違っていました。正解は次のようになります。
【解答】(1) $(*)$ の両辺を x で微分して，

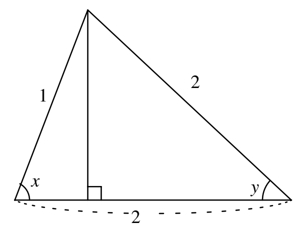
$$-\sin x - 2\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{2\sin y} < 0 \qquad \cdots ①$$

① の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-\sin x)\cdot\frac{1}{2\sin y} + (-\sin x)\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2\sin y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}\\ &= \frac{-\cos x}{2\sin y} + \sin x\cdot\frac{\cos y}{2\sin^2 y}\cdot\left(-\frac{\sin x}{2\sin y}\right) < 0 \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①,② より, グラフは減少関数で上に凸だから，左図のようになる。





(2) $l : x + y = k$ とおいて，l と (1) のグラフが共有点を持つような最大の k が θ_0 となる。l は傾き (-1) の直線だから，接点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，

$$\frac{dy}{dx} = -1 \iff -\frac{\sin x}{2\sin y} = -1 \iff \sin x = 2\sin y \qquad \cdots ③$$

P は曲線上にあるから

$$\cos x + 2\cos y = 2 \qquad \cdots ④$$

③,④ より x, y は右図の角となるので，余弦定理より

$$\cos(\pi - (x + y)) = \frac{1^2 + 2^2 - 2^2}{2\cdot 1\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

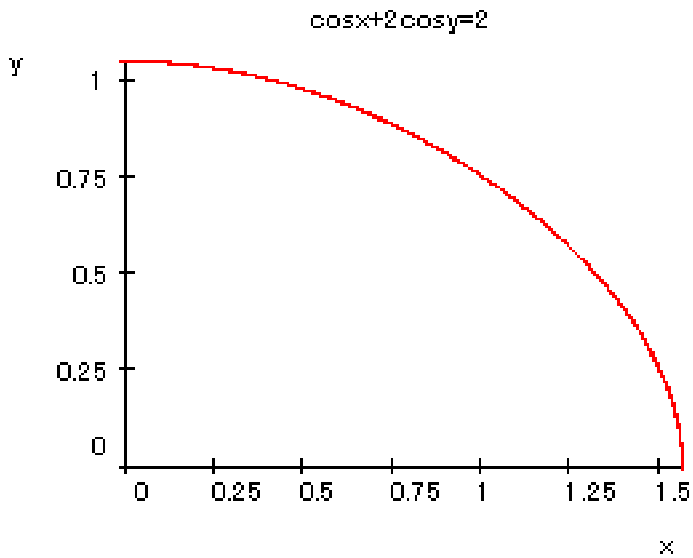
$\theta_0 = x + y$ だから

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{4} \qquad \cdots(答)$$

$f(x, y) = 0$ のグラフを書くことによって、$f(x, y) = 0$ という条件のもとで、いろいろな関数の最大 · 最小値が求まることがわかると思います。さて、$f(x, y) = 0$ のグラフの重要さが解ったところで、次は MuPAD でグラフを描いてみましょう。$\sin x + 2\cos y = 2$ のグラフを $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で書くのは, 次のようにプロットします。

- plot(
- plot :: implicit(cos(x) + 2 ∗ cos(y) − 2, x = 0..PI/2, y = 0..PI/2)
- ,Title = ”cosx + 2cosy = 2”);

タイトルもつけてみました。これでこうなります。



π　3.14 ですから, 確かに 2 つのグラフは一致します。

9.3　媒介変数 (パラメーター) 表示のグラフ

$x = f(t), y = g(t)(a \leqq t \leqq b)$ と媒介変数表示されたグラフの描き方は plot::Curve2d() を plot() と一緒に使って次のようにします。

- plot(plot :: Curve2d([f(t), g(t)], t = a..b));

です。[注88] オプションの指定の仕方は $f(x, y) = 0$ のグラフのときと同様です。しかし，いくつかのグラフを一緒に描きたいときは,

- plot(
plot :: Curve2d([f1(t), g1(t)], t = a..b)
plot :: Curve2d([f2(s), g2(s)], s = c..d)
);

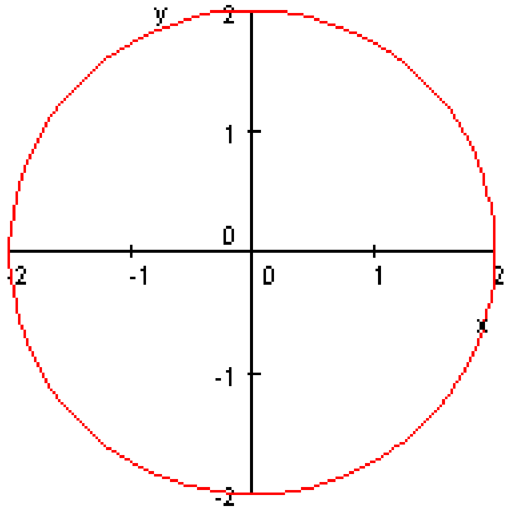
のように描かないといけません。

9.3.1　基本のプロット

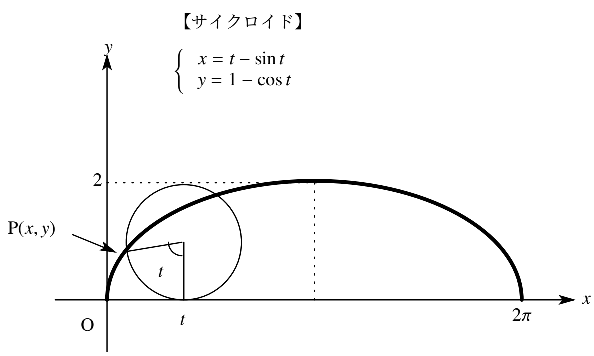
手始めに円 ($x^2 + y^2 = 4$) のパラメータ表示; $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ ($0 \leqq t \leqq 2\pi$) をやってみます。

- plot(
- plot :: Curve2d([2 * cos(t), 2 * sin(t)], t = 0..2 * PI)
- , Scaling = Constrained);

注88) Curve2d は 2 次元の曲線の意味です。また，MuPAD では組み合わせが問題のときは, 集合を表す記号= { } を使い，順序が問題のときは，リストを表す記号=[ ] を用います。媒介変数表示の場合，x 成分と y 成分を逆には出来ませんからリストになります。



次はサイクロイド; $x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ です。これは半径 1 の円を x 軸の上に転がしたときに出来る図形です。

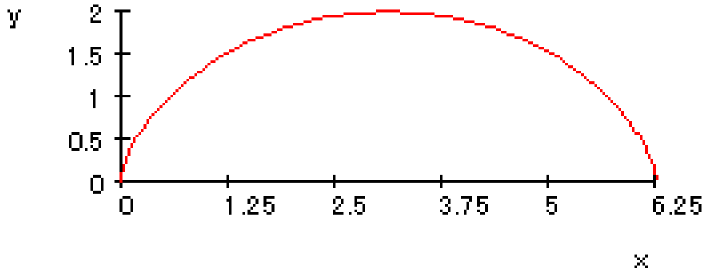


上図からサイクロイドのパラメータ表示は、次のようになります。

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

これを Mupad で描いてみましょう。

- plot(
- plot :: Curve2d([t − sin(t), 1 − cos(t)], t = 0..2 ∗ PI)
- , Scaling = Constrained);



$2\pi = 6.28\cdots$ なので大体あっているようです。

ついでに,x 軸との間で囲まれた面積 S を出してみましょう。$x = t - \sin t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & 2\pi \\ \hline t & 0 & \rightarrow & 2\pi \end{array}$ ですから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\,\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

となるはずです。実際、MuPAD でやると,

$\bullet$`int((1 - cos(t)) * diff(t - sin(t), t), t = 0..2 * PI);` >> $3PI$

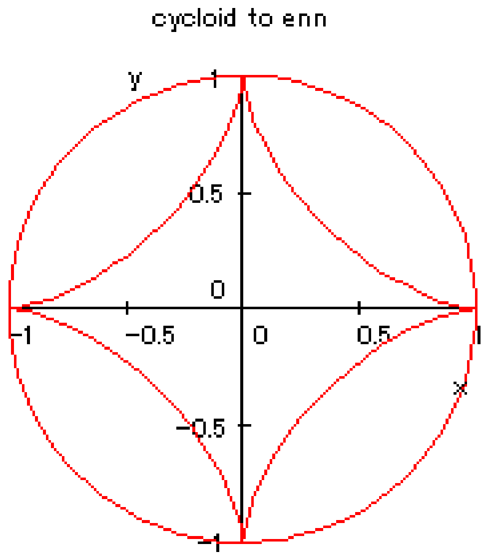
う〜ん,MuPAD のほうが速い!

9.3.2 2 つ以上のグラフを一緒に描くとき

plotfunc2d や plot::implicit と異なり, Curve2d それ自体では, 2 つ以上のグラフを一緒には表示できません。しかし, plot() は幾つものグラフを重ねて表示できるので, それを利用します。[注89] 例として, アステロイド; $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフと円; $x = \cos t, y = \sin t (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフを一緒に図示してみましょう。

```
• plot(
• plot :: Curve2d([cos(t) ^ 3, sin(t) ^ 3], t = 0..2 * PI),
• plot :: Curve2d([cos(t), sin(t)], t = 0..2 * PI),
• Title = "cycloid to enn", Scaling = Constrained)
```

[注89] 実は plot() は, 異なる座標系で描かれたグラフを重ねることも出来る。



9.4 極座標のグラフ (数 C の範囲)

極座標が $(r, \theta) = (f(t), g(t))$ のグラフ は

• plot(plot :: polar([f(t), g(t)], t = a ..b));

と入力します。特に $r = f(\theta)$ のグラフ (教科書はこのタイプのみ) は

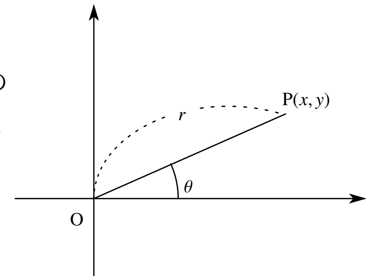
• plot(plot :: polar([f(t), t], t = a ..b));

と入力します。オプションの指定は，$f(x, y) = 0$ のグラフ，媒介変数表示のグラフと同様です。いくつかのグラフをまとめて描くときは，媒介変数表示のときと同様に plot() と組み合わせます。

極座標の復習です。r を点 $P(x, y)$ と原点との距離,θ を点 P の偏角とすると、 極座標は (r, θ) で定義され、直交座標 (x, y) と

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

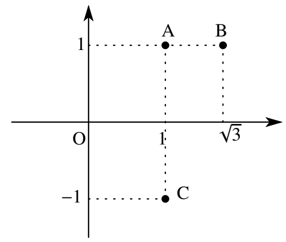
の関係で結びつきます。(右図)



また、例えば右図の点 A,B,C の極座標はそれぞれ

$$A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), B\left(2, \frac{\pi}{6}\right), C\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

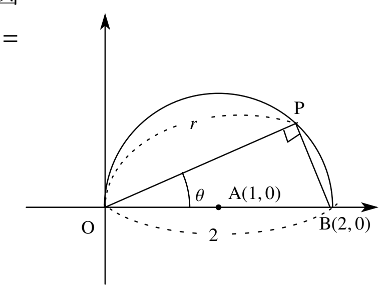
となります。



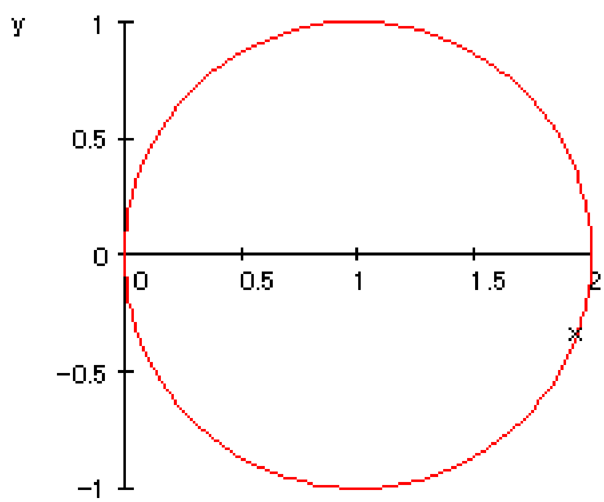
極座標 (r, θ) 間の関係式を極方程式といいます。例えば右図において中心が A(1,0)、半径が 1 の円の極方程式は $\mathrm{OP} = \mathrm{OB}\cos\theta$ より

$$r = 2\cos\theta$$

となります。これを MuPAD で描くには次のようにします。



- `plot(Scaling = Constrained,`
- `plot :: polar([2 * cos(t), t], t = -PI/2..PI/2)`
- `);`

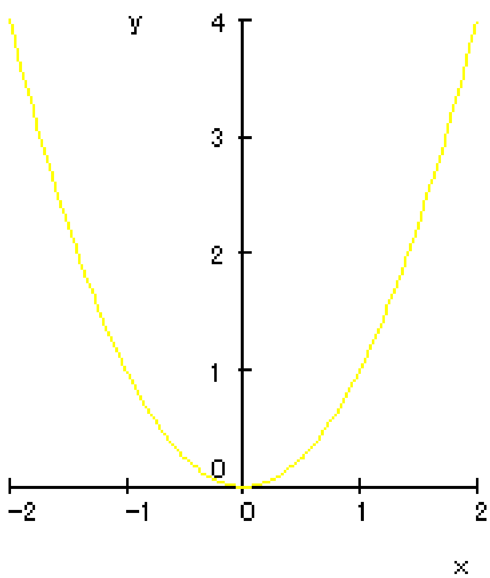


9.5 【参考】グラフの色の変更

MuPAD では自動的にグラフの色が変化します。これを変えるのは， plot option の 1 つである Color をつかって，Color=[r,g,b](r,g,b は 0 以上 1 以下の数) と RGB 指定するか，または Color=RGB::Black, Color=RGB::Yellow のようにカラー変数を用いて指定します。
注90)

しかし，Color option は，plot option の 1 つなので，残念ながら plotfunc2d では使えません。注91) そこで,$y = f(x)$ のグラフの色を変えたいときは，より基本のコマンドである plot::Function2d() を使います。plot::Function2d の使い方は, plot::Curve2d や plot::polar などと同じです。例えば，$y = x^2$ のグラフを黄色で描くには次のようにします。

- `plot(`
- `plot :: Function2d(x ^ 2, x = −2..2, Color = RGB :: Yellow)`
- `, Scaling = Constrained);`



このように plot option(Color,Grid など) は，個々のグラフの描写にかかわるオプションなので plot::〜の括弧の中に入れます。一方,scene option (Scaling, Ticks など) は全体の描写にかかわるオプションなので plot() のほうの括弧の中に入れます。う〜ん, うまく出来てますね。

なお，plot::implicit の場合は Color でなく, Colors を使って $\texttt{Colors} = [[\texttt{Color}_1], [\texttt{Color}_2], \cdots]$ のように指

注90) RGB 指定とは光の 3 原色 (Red,Green,Blue) の混合比を指定したもので例えば、[1.0,0,0]=Red, [0,1,0]=Green,[0,0,1]=Blue ,[1,1,0]=Yellow, [1,1,1]=Black で、0 以上 1 以下の数で指定します。頭がデジタルでない人は、カラー変数を用いると楽でしょう。カラー変数は RGB::Black, RGB::White, RGB::Green, RGB::Red, RGB::Blue, RGB::Yellow, RGB::Gray, RGB::Magenta, RGB::Olive, RGB::LightGray, RGB::OliveGreenDark(どんな色じゃ？) など 本当に”色々”ある。

注91) plotfunc2d で使えるのは scene option と grid のみ

定します。例えば，$x^2 - y = 0$ のグラフを plot::implicit を使って黄色で描くには次のようにします。

- plot(
- plot :: implicit(x ^ 2 − y, x = −2..2, y = −2..4, Colors = [RGB :: Yellow])
- , Scaling = Constrained);

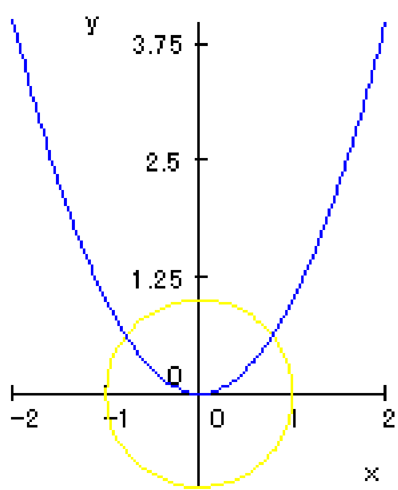
そういえば，plot::implicit を使って 2 つ以上のグラフを一緒に描くときは [ ] のなかに $[f_1(x,y), f_2(x,y)]$ のように入れないといけなかったですね。Color も同じです。

9.6 【参考】異なった座標系で描かれたグラフの重ね合わせ

plot() コマンドを使うと，いままで異なった座標系を用いて描かれたグラフを重ね合わせることが出来ます。また自分でグラフの色を変えることも出来ます。ただしこのときは plotfunc2d() の代わりに, plot::Function2d を利用しないといけません。(前節参照) 例として，媒介変数表示の円のグラフ ($x = \cos t, y = \sin t$) と陽関数表示の放物線のグラフ ($y = x^2$) を組み合わせてます。[注92] さらに，このとき円のグラフを黄色，放物線を青色で描かせて見ます。

- plot(
- plot :: Curve2d([cos(t), sin(t)], t = 0..2 ∗ PI,
  Color = RGB :: Yellow), ··· plot option
- plot :: Function2d(x^2, x = −2..2, Color = RGB :: Blue) ··· plot option
- , Scaling = Constrained); ··· scene option

これで次のようになります。



ここで，Scaling=Constrained は全体の描写に働くので, scene option と呼ばれ plot() の括弧の中に入れます。一方 Color ,Grid などのオプションは個々のグラフの描写にかかわるオプションなので plot option と言い，plot::〜のほうの括弧の中に入れるのでした。

[注92] もちろんこれは放物線のグラフを $x = t, y = t^2$ と媒介変数表示すれば済むことなのですが，あくまで例としてやってみます。

9.7 【参考】オプションのリスト (一部のみ)

MuPAD のオプションは 全体のグラフに関するオプション (Scene option）と 個々のグラフ (object) に関するオプション (plot option) の 2 種類があり, それぞれつける位置も異なります。詳しくは Help → BrouseMannal を見てください。

1.Scene options

Option 名	値	初期値	働き
Arrows	TRUE,FALSE	FALSE	x,y 軸の矢印
Axes	Box,Corner,None,Origin	Origin	x,y 軸の表示の仕方
BackGround	RGB::カラー名	RGB::White	背景色
ForeGround	RGB::カラー名	RGB::Black	前景色 (x,y 軸の色)
LineStyle	SolidLines,DashedLines	SolidLines	グラフの線種 (実線、点線)
Scaling	Constrained,Unconstrained	Unconstrained	両軸方向の目盛りのとり方
Ticks	$Automatic, None,$ $[n_x, n_y]$ または n ,	Automatic	x, y 軸方向の目盛り刻みの数
Title	”タイトル名”	入力した関数	タイトル
TitlePosition	Above,Below	Above	タイトルの位置

２．plot options

Option 名	値	初期値	働き
Color	[R,G,B]		各グラフの色の指定
Grid	[n]	[100]	パラメータの分割数
Title	”タイトル名”	” ”	各グラフのタイトル
TitlePosition	[x,y]		各タイトルの位置

BackGround,ForeGround の色の指定には，カラー変数を用いると楽です。カラー変数は RGB::Black, RGB::White, RGB::Green, RGB::Red, RGB::Blue, RGB::Yellow, RGB::Gray, RGB::Magenta, RGB::Olive, RGB::LightGray, RGB::OliveGreenDark(どんな色じゃ？) など ”色々”ある。

10　3 次元 (空間) のグラフ

– この章は高校の範囲をやや超える –

x, y, z 座標系 (直交座標系) におけるプロット

$z = f(x, y)$ のグラフ (曲面) ($a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$)	`plotfunc3d(f(x, y), x = a ..b, y = c ..d)`
$z = f(x, y)$ のグラフ (曲面) ($a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$)	`plot :: Function3d(f(x, y), x = a ..b, y = c ..d);`
媒介変数表示された 3 次元の曲線 ($a \leqq t \leqq b$)	`plot :: Curve3d([x(t), y(t), z(t)], t = a ..b)`
媒介変数表示された 3 次元の曲面 (a ≦ u ≦ b, c ≦ v ≦ d)	`plot :: Surface3d( [x(u, v), y(u, v), z(u, v)], u = a ..b, v = c ..d)`

特殊な座標系によるプロット (参考)

球面座標 (r, θ, ϕ) で表示された 3 次元の曲面 (a ≦ u ≦ b, c ≦ v ≦ d)	plot :: spherical([r(u, v), θ(u, v), ϕ(u, v)], u = a ..b, v = c ..d)
円柱座標 (ρ, ϕ, z) で表示された 3 次元の曲面 (a ≦ u ≦ b, c ≦ v ≦ d)	plot :: cylindrical([ρ(u, v), ϕ(u, v), z(u, v)], u = a ..b, v = c ..d)

[注93] MuPAD ではいろいろな形で表されたグラフを描くことが出来ます。$z = f(x, y)$ のグラフを描く plotfunc3d はそれ自体で，たくさんのグラフを一緒に描くことが出来ます。そのうえ，MuPAD は，違った描写法で描かれたグラフを一緒に描写することも出来ます。さらに，いろいろなオプションがあり、グラフの描写の様子を細かく指定することが出来ます。詳しくは，各節を見てください。

10.1　$z = f(x, y)$ のグラフ

$z = f(x, y)$ のグラフを，$a \leqq x \leqq b$，$c \leqq y \leqq d$ の範囲で描くのは plotfunc3d(); を次のようにしてつかいます。[注94]

```
plotfunc3d( f(x, y), x = a ..b, y = c..d);
```

z の範囲は指定できません。2 つ以上のグラフを重ねて描きたいときは, コンマで区切るだけです。

```
plotfunc3d( f(x), g(x) , x = a ..b);
```

scene option をつけるのは，次のようにコンマで区切って指定します。2 つ以上の scene option をつけるときは, コンマで区切って指定します。

```
plotfunc3d(option, f(x, y), x = a ..b, y = c..d);
plotfunc3d(option1, option2, ··· , f(x, y), x = a ..b, y = c..d);
```

また，平面のグラフと同様に, scene option と plot option の 2 種類のオプションがあります。[注95]

[注93] 球面座標・円柱座標はあくまで参考としてあげた。また，平面のグラフと同様 plot::〜 の形のコマンドは plot(plot::〜) のように plot() と組み合わせて使う。

[注94] plot::Function3d() のほうはグラフの色を変えたり，違う座標系で描かれたグラフを重ねるときに使います。後の節 (違う座標系で描かれたグラフを重ね合わせの章) で扱います。

[注95] MuPAD の Help では , scene option は f(x,y) の前につけることになっていますが，実際は plotfunc3d(f(x, y), x = a ..b, y = c..d, option); のように，後につけても大丈夫でした。また，scene option というの

10.1.1 $z = f(x, y)$ のグラフとは何か？

空間のグラフは高校ではほとんどやりませんが、試験の問題では”ひそかに”出題されています。次の問題は 1 年生の問題集にあります。

実数 x, y が独立にすべての実数値をとり変化するとき、

$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5 \qquad \cdots (*)$$

の最小値を求めよ。

【解答】

x に関し平方完成して

$$z = (x - y)^2 + y^2 - 4y + 5$$

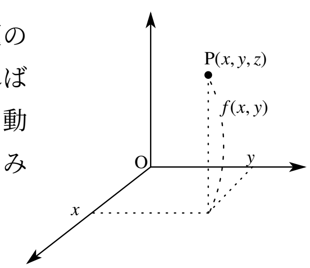
さらに y に関し平方完成して

$$z = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geqq 1$$

等号は $x = y$, かつ $y = 2$ のとき成立するので、最小値は

$$2 \qquad \cdots (答)$$

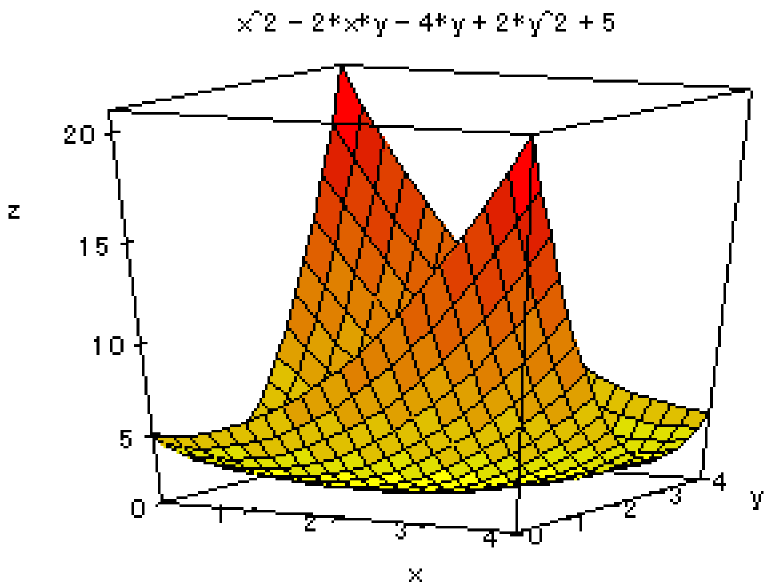
このような時,$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$ のグラフが頭にあれば問題の意味がよく解ります。一般に $z = f(x, y)$ の式が与えられたとき、x, y が決まれば $P(x, y, f(x, y))$ という点が定まり,x, y がある領域内を動くとき点 P はある曲面を動きます。では，さっそく $z = f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$ のグラフを描いてみましょう。



MuPAD では次のように打ちます。

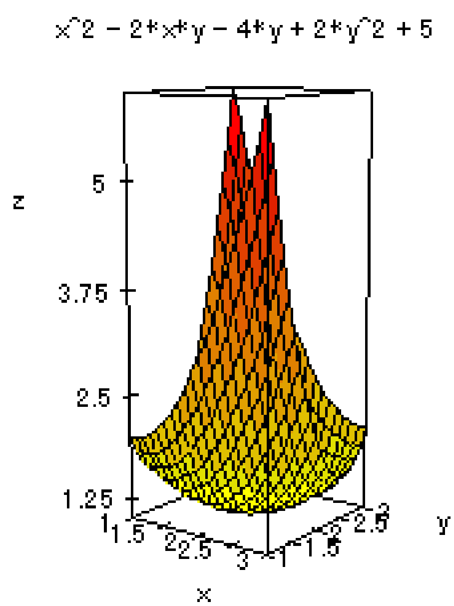
```
• plotfunc3d(x ^ 2 - 2 * x * y + 2 * y ^ 2 - 4 * y + 5, x = 0..4, y = 0..4);
```

は全体の描写を決めるオプションで, 主なものとしては Scaling, Ticks, BackGround, ForeGround, Axes, Arrows などあり，それぞれの値を Scaling=*Constrained*, Ticks=[20, 10, 5] のように (名前)=(値) のように指定します。しかし，Scaling=Constrained ,Ticks などぐらいしか私は使いません。plot option としては，Color(グラフの色), Grid(パラメータの刻み数) などがあります。plotfunc3d では plot option は, Grid のみ指定できます。Grid の指定は, $Grid = [n_x, n_y]$ のように,x,y 方向の両方を指定します。最初の設定 (default) では Grid=[20,20] です。オプションに関しては, 最後の節に簡単な表にしていますので, 詳しくはそちらを見てください。



ちょっと解りにくいですね。でもどうやら $x = y = 2$ の前後で z 成分が最小となるらしいので,$(x, y) = (2, 2)$ の近くを拡大してみます。拡大するには平面のときと同様，変域を制限すればいいですね。$1 \leqq x \leqq 3, 1 \leqq y \leqq 3$ に変えてみましょう。また Scaling=Constrained [注96] のオプションをつけてみました。

- plotfunc3d(Scaling = Constrained, x ^ 2 − 2 ∗ x ∗ y + 2 ∗ y ^ 2 − 4 ∗ y + 5, x = 1..3, y = 1..3);

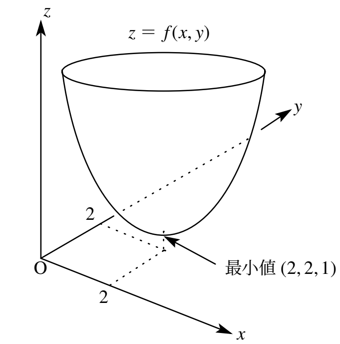


たしかに，$x = 2, y = 2$ の近くでグラフが一番低くなっているようです。このように $z = f(x, y)$ のグラフを描くと、$f(x, y)$ の最小値を目で見ることが出来ます。

注96) このオプションをつけると座標軸の目盛りが x, y, z 軸に関し同じになります.

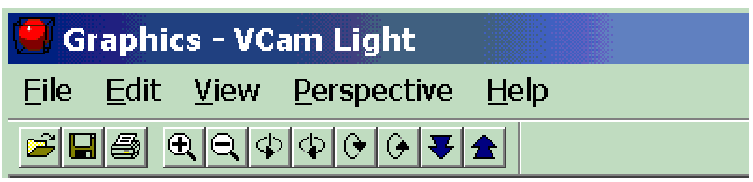
Comment

実は、本当はグラフは次のような”感じ”になります。逆釣鐘と言ったところでしょうか?

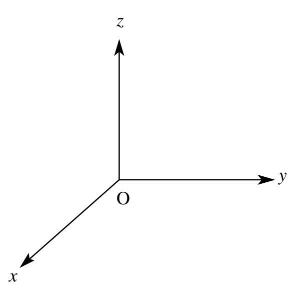


10.1.2　Vcam の見方

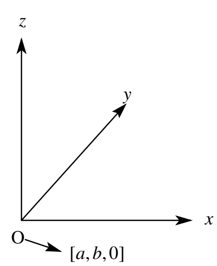
さて、ここで 空間のグラフの見方についてちょっと見てみましょう。MuPAD は内部で Vcam[注97] を呼び出し Vcam の Window が開きます。(下図)



Tool Bar を使って図形を変えることが出来ます。左から 3 番目の ⊕ は図形の拡大 (Zoom In), 4 番目の ⊖ は縮小 (Zoom Out),5 番目〜8 番目の矢印と楕円マークは それぞれ矢印の方向に回転させることを表します。9,10 番目の太い矢印は視点の接近 (nearer) と離反 (farther) を表します。このときサイズは変わらず、視点のみ変わります。[注98] はじめに表示される画面は、教科書の画面と違う視点から見ています。(x, y 軸をそれぞれ一塁・三塁方向とすると一塁側の内野席と外野席の中間から見た感じです。これに対し教科書はライト方向から見ています。教科書はイチローのファン？)



【教科書の視点】



【MuPAD の視点 (最初)】

ただ MuPAD では見易くするため、y 軸は手前に書いてあり, 指定した変域が $x = a..b, y = c..d$ のときは原点の位置 (最も左下の点) に $(a, b, 0)$ が来ます。もちろんこれは最初の図であって回転していくと教科書の視点にすることは簡単に出来ます。

[注97] virtual camera

[注98] もっと細かく視点を変えたければ MuPAD の方で CameraPoint option と FocalPoint option(scene option) を使います。これらはそれぞれ [x,y,z] 座標で指定します。

10.1.3　$z = f(x, y)$ のグラフと $f(x, y)$ の最大・最小値の関係

次は数　の範囲からもう 1 つ問題を考えて見ます。今度は変域に制限のある場合です。

実数 x, y が独立に $0 \leqq x \leqq 3, 0 \leqq y \leqq 1$ の範囲を変化するとき、

$$z = xy + 3x - y + 1 \quad \cdots (*)$$

の最大値を求めよ。

【解答】

(i) y が一定で x のみが $0 \leqq x \leqq 3$ で変化するときの z の最大値を $M(y)$ とおく。x に関し整理して

$$z = (y + 3)x - y + 1$$

ここで $y + 3 > 0$ であるから z は x に関し傾きが正の 1 次関数になる。よって z は $x = 3$ のとき最大で

$$M(y) = 3(y + 3) - y + 1 = 2y + 10$$

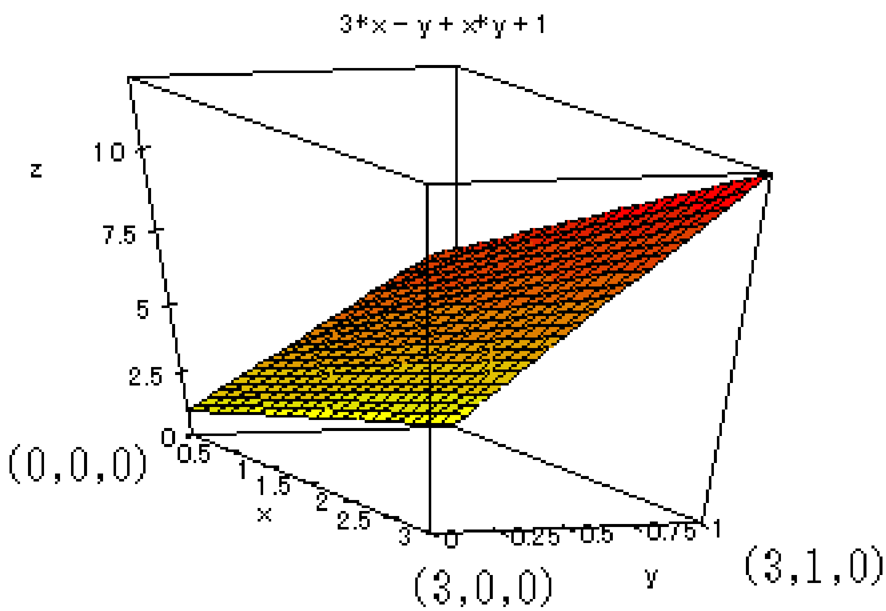
(ii) 次に, y を $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲で動かしたときの z の最大値が求める最大値である。よって $y = 1$ のとき, 最大値は

$$2 \times 1 + 10 = 12 \quad \cdots (答)$$

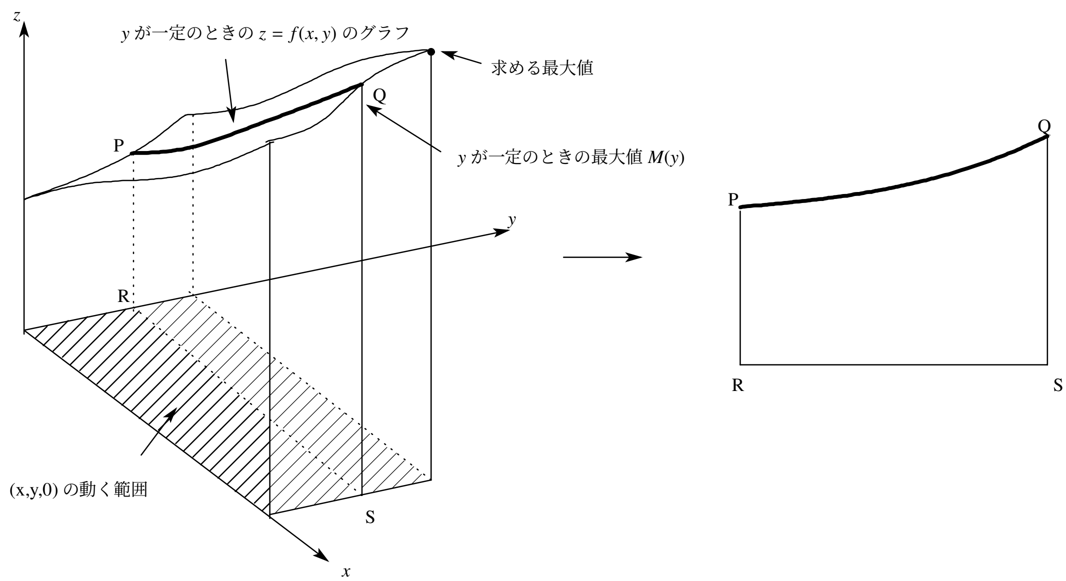
これはいったい図形的には何をやっているのでしょうか？ $z = f(x, y) = xy+3x-y+1$ $(0 \leqq x \leqq 3, 0 \leqq y \leqq 1)$ のグラフを描いてみます。

$\bullet$ `plotfunc3d(x * y + 3 * x - y + 1, x = 0..3, y = 0..1);`

結果は図のとうりです。何度か z 軸の周りに回転させよく解る様に座標を書き入れてみました。グラフからも $(x, y) = (3, 1)$ のときに最大値をとることは確からしいです。



では $M(y)$ の図形的な意味は何でしょうか。y が一定で x のみ変化するということは次図で点 $(x, y, f(x, y))$ が**曲線**PQ 上を動くという意味です。そのときの最大値が $M(y)$ になるわけです。今の関数のとき $z = (y+3)x - y + 1$ ですから曲線 PQ は実は右上がりの直線になり右端で最大となります。そのように求めた $M(y)$ の最大値が真の最大値というわけです。(これはよく高校野球にたとえて、予選・決勝方式といわれます。$M(y)$ が地区予選の優勝者という感じです。)



これでイメージがわいて来たでしょうか？このように 2 変数関数の最大・最小値は 3 次元のグラフのイメージを持っていると、良く意味が解るのではないでしょうか？

10.1.4 球のプロット (その 1)

最後に球 $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ を書いて見ましょう。ただ MuPAD では 3D の陰関数のグラフはかけないので z に関し解いてみましょう。z に関し解くと、$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ですから, 球の上半分を描くために，次のように入力します。

• `plotfunc3d(sqrt(1 - x^2 - y^2), x = -1..1, y = -1..1);`

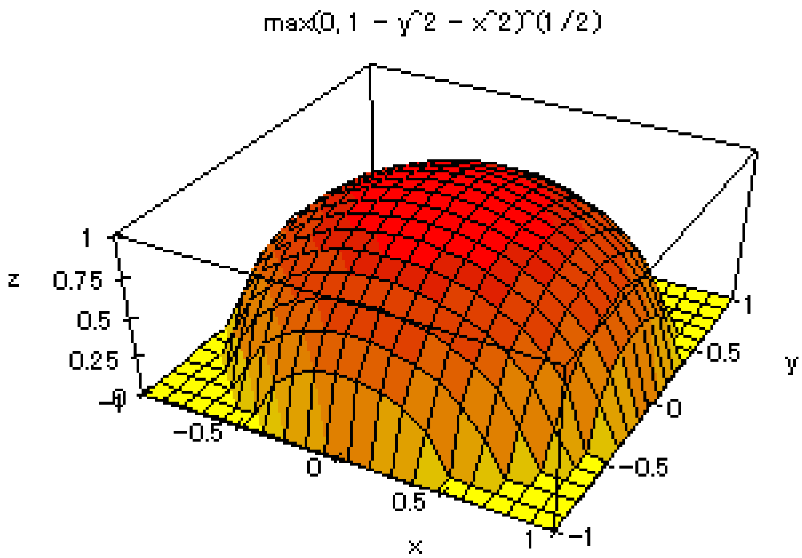
しかし

>> Error: Plot function(s) must return real numbers.
Type of the returned value is DOM_COMPLEX;
during evaluation of 'plot3d'

との表示が出ます。つまり $\sqrt{}$ のなかが負になってしまったのです。そこでいくつかの数の最大値を求めるコマンド max(a,b,c,···); を使ってみます。

• `plotfunc3d(sqrt(max(0, 1 - x^2 - y^2)), x = -1..1, y = -1..1);`

すると、次の図のようになります。

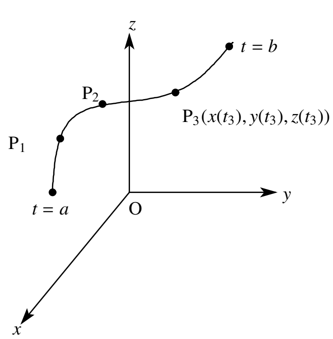


考えてみたら当たり前ですが $z = 0$ も描かれてしまいます。なかなか難しいですね。球を描くには後でやる「曲面のパラメータ表示」を使うとうまくいきます。

10.2　空間の曲線

10.2.1　空間の曲線とは何か?

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ は媒介変数表示された 3 次元の曲線 を表します。なぜなら直線上の点の空間座標は 1 つのパラメーター t の値で決まってしまうからです。また, この式の意味は t が変化するにつれ点 P $(x(t), y(t), z(t))$ も動き、それは曲線を作るという意味です。

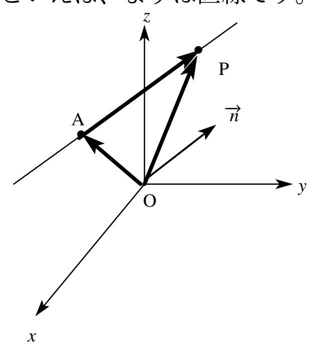


10.2.2　空間の曲線のプロット

MuPAD で曲線を描くのは plot::Curve3d を用いて，次のようにします。

- plot(
- plot :: Curve3d([x(t), y(t), z(t)], t = a ..b)
-);

平面のグラフの媒介変数表示のとき，plot::Curve2d を使いましたが, それとほとんど同じです。オプションも，2 次元のときと同様につけられます。[注99] さて皆さんが習った曲線といえば、まずは直線です。[注100]



点 A を通りベクトル $\overrightarrow{n}$ と平行な直線上の点を点 P とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \overrightarrow{n}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{n}$ (t は実数) とかけ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{n}$$

です。よって $\mathrm{P}(x, y, z), \mathrm{A}(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{n} = (a, b, c)$ とすると

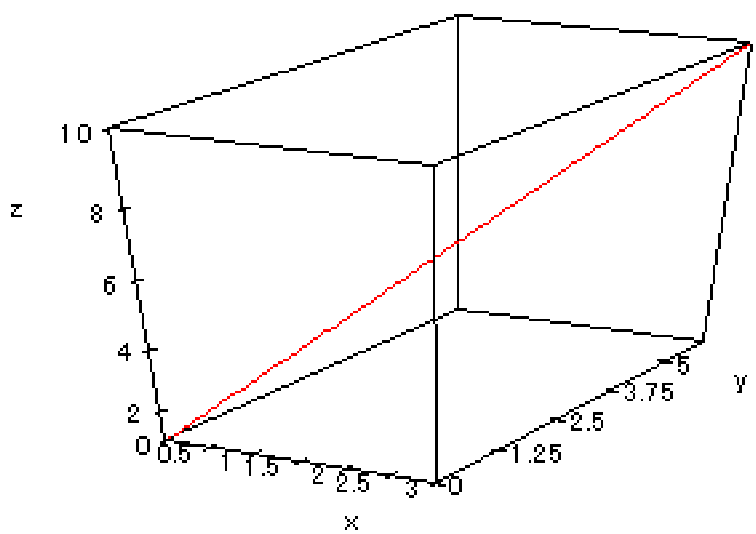
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

たしかに x, y, z 座標がパラメータ t の関数になっています。

点 A(0, 0, 1) を通り、$\overrightarrow{n} = (1, 2, 3)$ と平行な直線を描いてみましょう。$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 2, 3) = (t, 2t, 3t + 1)$ だから次のようにします。

- plot(
- plot :: Curve3d([t, 2 ∗ t, 3 ∗ t + 1], t = 0..3)
-);

これで次のようになります。



点 A(0, 0, 1) を通ってないように見えますが、左下の点は原点ではありません。左下の’0’ は x 軸の目盛りの’0’ を表しています。間違いやすいですね。さて次の曲線は何を表しているでしょう？

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t \ (0 \leqq t \leqq 10\pi)$$

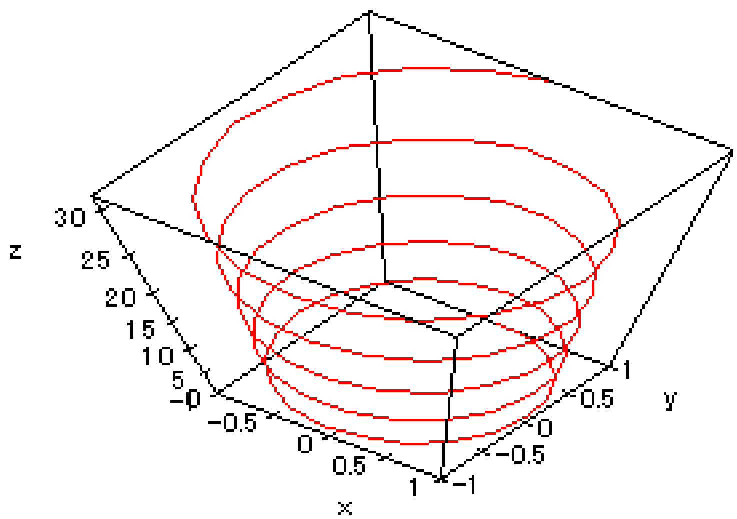
[注99] もちろん 3 行に分けて書く必要はありませんが、見やすさを考えて分けました。このように分割するときは Shift キー を押しながら Return キーを押します。

[注100] 正方形が長方形の一種であるように, 直線も曲線の一種です。

$z=0$ ならもちろん円周 ($x=\cos t, y=\sin t, z=0$) 上を５周します。でも t が増えるにつれて z 成分も増えるのだから…そうです螺旋になるはずです。やってみましょう。

- plot(
- plot :: Curve3d([cost, sint, t], t = 0..10 * PI)
-);

少し回転させると、次のようになりました。



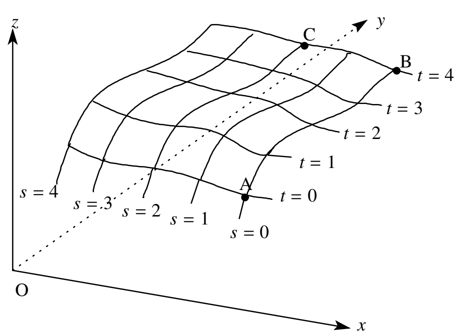
ちょっと蛇のようですね？

10.3　空間の曲面

10.3.1　曲面とは何か？

$x=f(s,t), y=g(s,t), z=h(s,t)$ $(a \leqq s \leqq b, c \leqq t \leqq d)$ は媒介変数表示された３次元の曲面を表します。なぜなら曲面上の点の位置 (曲面座標) は２つの数字の組 (s,t) で表されるからです。

例えば’仮に’図の点 A の空間座標が A(2, 3, 4) とすると $f(0,0)=2, g(0,0)=3, h(0,0)=4$ となります。同様、図の点 B, 点 C の空間座標を $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2), \mathrm{C}(x_3,y_3,z_3)$, とすると $[f(0,4)=x_2, g(0,4)=y_2, h(0,4)=z_2], [f(2,4)=x_3, g(2,4)=y_3, h(2,4)=z_3]$ となります。
または、”s を一定にして t のみを動かすと $\mathrm{P}(f(s,t), g(s,t), h(s,t))$ は曲線を描き，次に t を動かすと曲線が動き曲面を作る”と考えても良いでしょう。



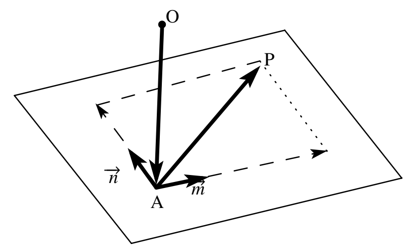
10.3.2 曲面のプロット

さて、MuPAD で曲面を描くのは次のようにします。

- plot(
- plot :: Surface3d([x(s, t), y(s, t), z(s, t)], s = a..b, t = c ..d)
-);

さて皆さんが習った曲面といえば、まずは平面です。[注101]
平面と平行で 1 次独立[注102] な 2 つのベクトルを $\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}$, 平面上の 1 点を点 A, 平面上の点を点 P とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{m}$ (s, t は実数) とかけるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{m}$$



です。よって P(x, y, z),A(x_0, y_0, z_0),$\overrightarrow{n} = (n_x, n_y, n_z)$,$\overrightarrow{m} = (m_x, m_y, m_z)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + sn_x + tm_x \\ y = y_0 + sn_y + tm_y \\ z = z_0 + sn_z + tm_z \end{cases}$$

たしかに x, y, z 座標がパラメータ s, t の関数になっています。

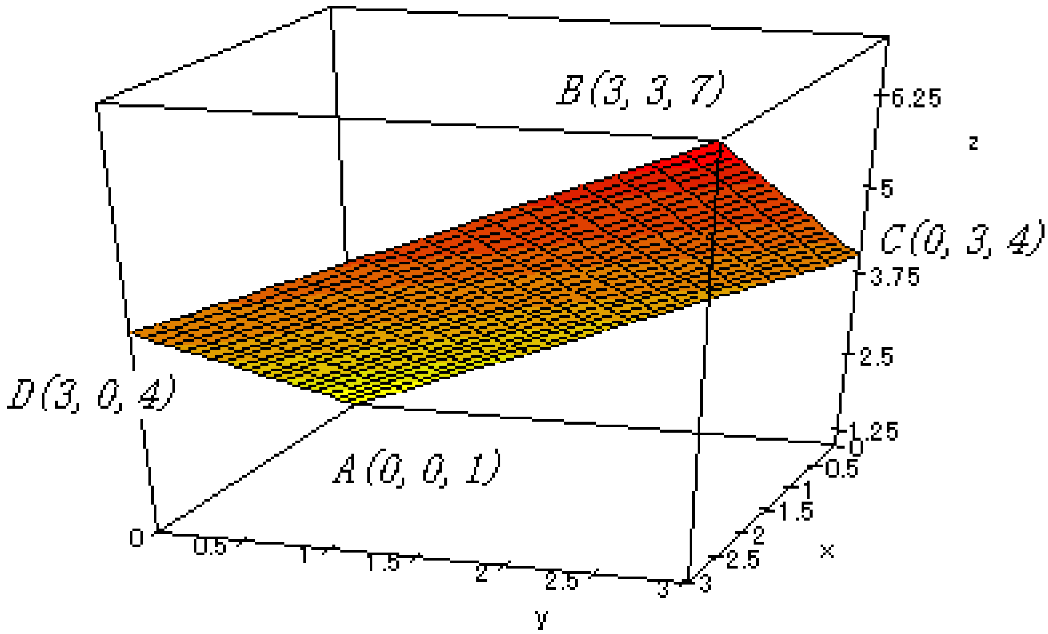
点 A$(0, 0, 1)$ を通り、$\overrightarrow{n} = (1, 0, 1), \overrightarrow{m} = (0, 1, 1)$ と平行な平面を描いてみましょう。$(x, y, z) = (0, 0, 1) + s(1, 0, 1) + t(0, 1, 1) = (s, t, s + t + 1)$ だから次のようにすれば良いでしょう。

- plot(
- plot :: Surface3d([s, t, s + t + 1], s = 0..3, t = 0..3)
-);

これで次のようになります。(教科書の視点と同じになるように何回か ToolBar を利用して回転させ，いくつかの点の座標も書き込んであります。)

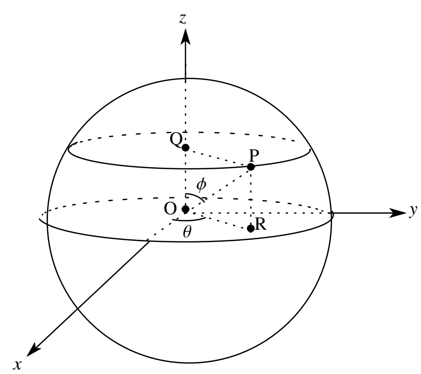
注101) 平面も曲面の一種です。

注102) $\overrightarrow{m}$, と$\overrightarrow{n}$ が 1 次独立というのは互いに平行でなく，またどちらも $\overrightarrow{0}$ でないという事です。1 次独立でないと $\overrightarrow{m}$, と$\overrightarrow{n}$ が平行四辺形を作れません。



10.3.3 球のプロット (その 2)

さていよいよ球 ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$) のパラメータ表示をやってみましょう。これは次の図の $\theta(0 \leqq \theta < 2\pi)$, と$\phi(0 \leqq \phi \leqq \pi)$ を利用します。球面上の点 P(x, y, z) から z 軸におろした垂線の足を Q, xy 平面におろした垂線の足を R とすると, OR=PQ= $r \sin\phi$, OQ= $r\cos\phi$ であるから



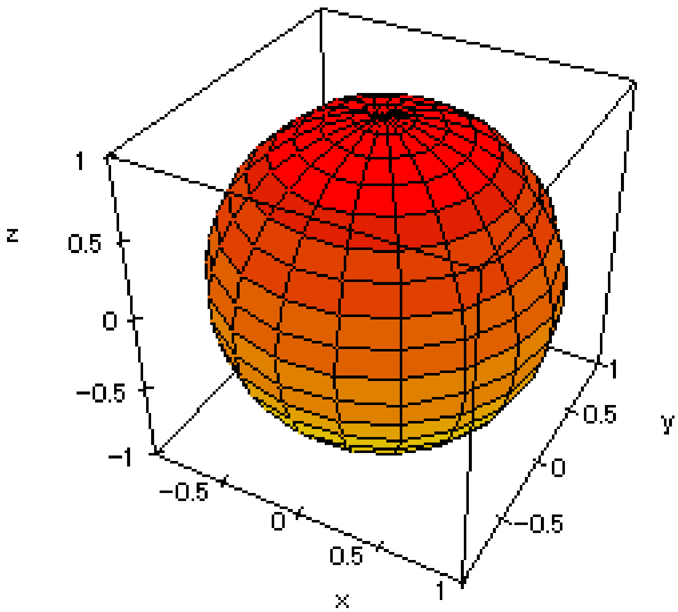
$$\begin{cases} x = OR\cos\theta = r\sin\phi\cos\theta \\ y = OR\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta \\ z = OQ \qquad = r\cos\phi \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

したがって原点中心，半径 1 の球のパラメータ表示は次のようになります。

$$\begin{cases} x = \sin\phi\cos\theta \\ y = \sin\phi\sin\theta \quad (0 \leqq \phi \leqq \pi,\ 0 \leqq \theta < 2\pi) \\ z = \cos\phi \end{cases}$$

したがって，次のように入力すると良いでしょう。

- plot(Scaling = Constrained,
- plot :: Surface3d([sin u * cos v, sin u * sin v, cos u], u = 0..PI, v = 0..2 * PI)
-);



Surface3d() を使ったとき，曲面に描かれている曲線は $u =$ 一定, $v =$ 一定 となる曲線を表しています。$(*)$ において $\theta =$ 一定 ということは，球の北極から南極を結ぶ線 (子午線) を表しています。また $\phi =$ 一定 ということは，北緯 95 度線のような緯線にあたります。つまり $(*)$ の表示は地球上の点を東経 135 度, 北緯 60 度などと表すのと同じようなものです。注103)

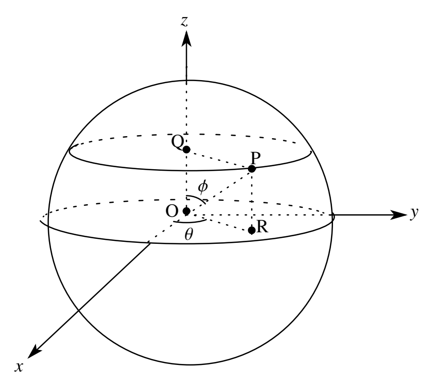
10.4 【参考】球面座標

10.4.1 球面座標とは何か？

球面座標とは前の章の球面上の点のパラメータ表示 $(*)$ の応用です。空間内の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$, P と原点との距離を r とすると P は原点中心, 半径 r の球上にあるといえるから

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \qquad \cdots(**)$$

と表せますね。このとき r, θ, ϕ の組 $[r, \theta, \phi]$ を点 P の球面座標といいます。



注104)

点 P の球面座標 $[r, \theta, \phi]$ が u と v の関数になっているときも P の集合は曲面になります。これを MuPAD

注103) 例えば東経 135 度, 北緯 60 度の点は，ロンドンが x 軸の正の部分の真上にあるとすると，$\theta = 135°, \phi = 30°$ となります。

注104) 普通の座標と混乱しないようここでは [ ] を使ったが別に ( ) でも大丈夫。また たとえば $A(2,0,0)$ の球面座標は $[2, 0, \frac{\pi}{2}]$, $B(0,3,3)$ の球面座標は $[3\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ です。

で表示するには次のようにします。

- plot(
- plot :: spherical([r(u, v), θ(u, v), ϕ(u, v)], u = a..b, v = c ..d)
-);

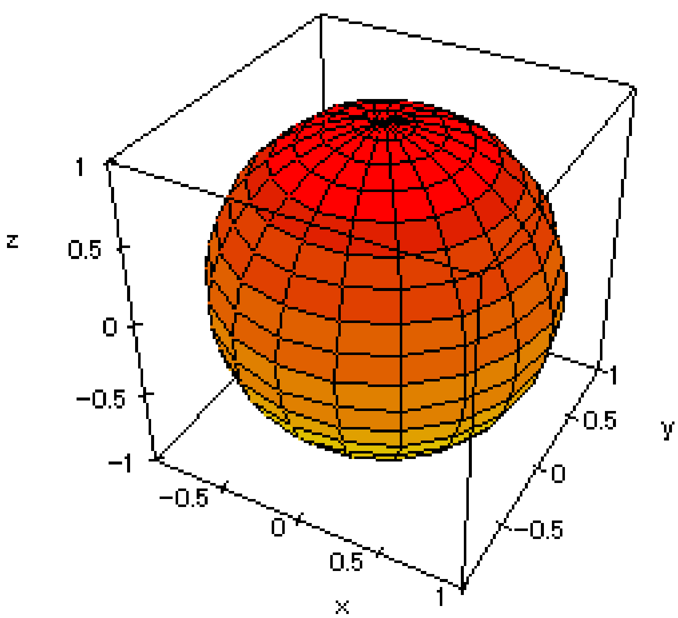
10.4.2　球のプロット (その 3)

球面座標を使うと $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点は, $r = 1, 0 \leqq \theta < 2\pi, 0 \leqq \phi \leqq \pi$. θ と ϕ は無関係なので

$$[1, \theta, \phi]\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq \phi \leqq \pi)$$

と表せる。したがって MuPAD では次のようになる。

- plot(
- plot :: spherical([1, s, t], s = 0..2 * PI, t = 0..PI)
- , Scaling = Constrained);

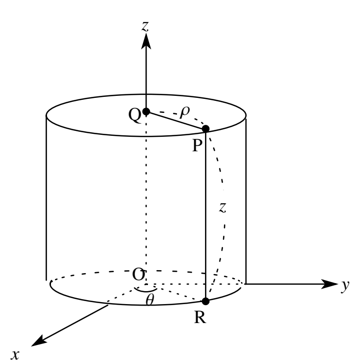


これは前に書いたのとまったく同じですね。でもこの方が楽でしょう。

10.5　【参考】円柱座標

10.5.1　円柱座標とは何か？

点 P(x, y, z) と z 軸との距離を ρ, P から z 軸におろした垂線の足を Q, xy 平面におろした垂線の足を R, OR と x 軸正方向との角を θ とすると図より



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \cdots (***)$$

このとき ρ, θ, z の組 $[\rho, \theta, z]$ を点 P の円柱座標という。円柱座標は, 数 C で習った極座標に z 成分を付け加えたものと考えると良いでしょう。[注105)]
点 P の円柱座標 $[\rho, \theta, z]$ が u と v の関数になっているときも P の集合は曲面になります。これを MuPAD で表示するには次のようにします。

- plot(
- plot :: cylindrical([ρ(u, v), θ(u, v), z(u, v)], u = a..b, v = c ..d)
-);

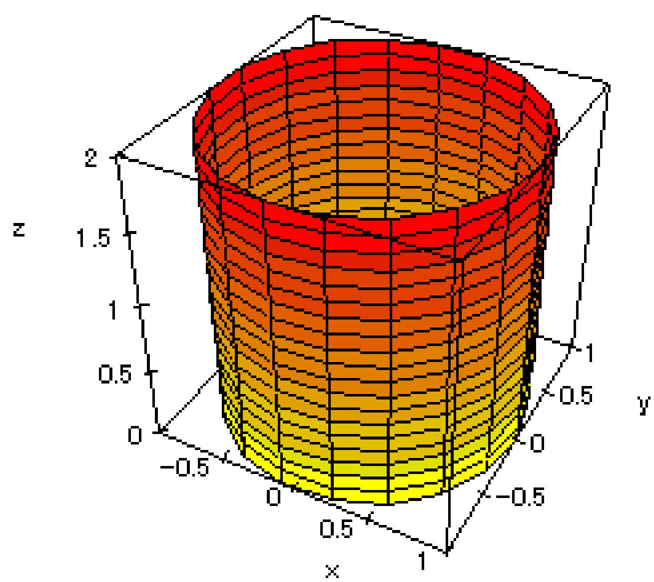
10.5.2　円柱のプロット

例えば z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱 $(x^2 + y^2 = 1, 0 \leqq z \leqq 2)$ 上の点を円柱座標で表すと $\rho = 1$, θ は任意 $(0 \leqq \theta \leqq 2)$ だから,

$$[\rho, \theta, z] = [1, \theta, z] \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq z \leqq 2)$$

となる。よって次のように入力すると良いでしょう。

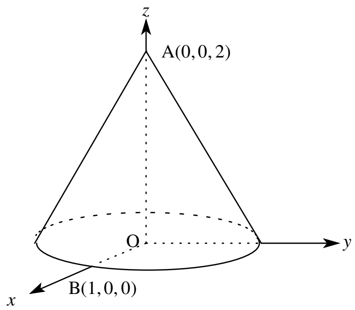
- plot(
- plot :: cylindrical([1, s, z], s = 0..2 ∗ PI, z = 0..2)
- , Scaling = Constrained);



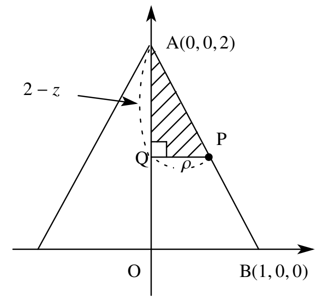
10.5.3　円錐のプロット

円柱座標は円柱以外にも「ある軸の周りへの回転体」を図示するとき役立ちます。例えば円錐なんかですね。頂点が A(0, 0, 2), 底面が $x^2 + y^2 \leqq 1, z = 0$ である円錐の円柱座標は

注105)　普通の座標と混乱しないようここでは [ ] を使ったが別に ( ) でも大丈夫。また たとえば $A(0, 2, 1)$ の円柱座標は $[2, \frac{\pi}{2}, 1], B(3, 0, 3)$ の円柱座標は $[3, 0, 3]$ です。



$\Longrightarrow$



$\triangle$APQ $\backsim$ $\triangle$ABO より

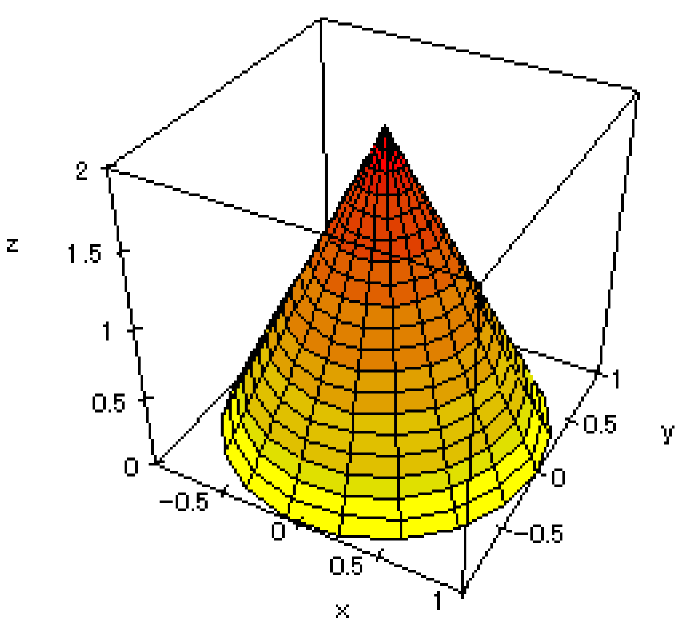
$$(2-z):\rho = 2:1 \Longleftrightarrow 2\rho = 2-z \Longleftrightarrow \rho = \frac{2-z}{2}$$

であるから

$$[\rho, \theta, z] = \left[\frac{2-z}{2}, \theta, z\right] \ (0 \leqq \theta < 2\pi, 0 \leqq z \leqq 2)$$

したがって，次のように入力します。

- `plot(`
- `plot::cylindrical([(2 - z)/2, s, z], s = 0..2*PI, z = 0..2)`
- `,Scaling = Constrained);`



10.6 【参考】異なった座標系で描かれたグラフの重ね合わせ

平面のグラフのプロットと同じように, Color option(plot option のひとつ) を使って個々のグラフの色を変えたり，異なった座標系で描かれたグラフを重ねて描くことが出来ます。ただし, このような時は plotfunc3d

ではなく，plot::Function3d を使います。scene option(Scaling,Ticks,Title など) や plot option(Color, Grid など) のつけ方も平面のグラフのときと同様です。

10.6.1 円柱と円柱の交線

例題

x 軸を中心軸とする半径 1 の円柱 C_1 と，z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱 C_2 の交線はどのような図形になるか？ 図示せよ。

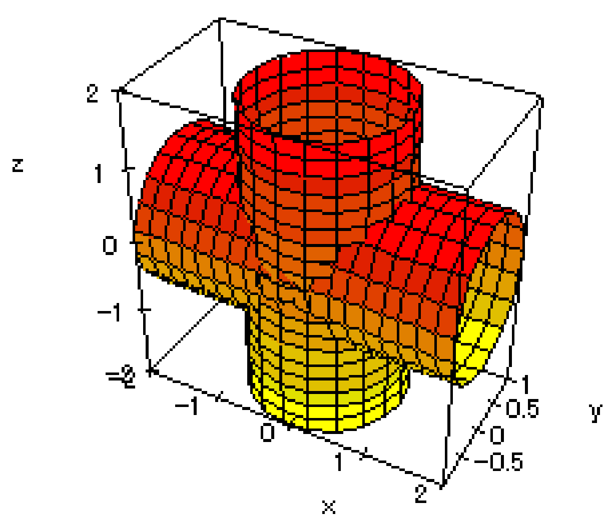
x 軸を中心軸とする半径 1 の円柱上の点は $(x, y, z) = (x, \cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表され，また z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱上の点は, x, y, z 座標で $(x, y, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$，または円柱座標を使って $[\rho, \theta, z] = [1, \theta, z]$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表せます。x, y, z 座標を使うときは，次のように入力します。

- plot(
- plot :: Surface3d([cos(t), sin(t), z], t = 0..2 ∗ PI, z = −2..2),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], t = 0..2 ∗ PI, x = −2..2)
- , Scaling = Constrained);

円柱座標を使うときは，次のように入力します。

- plot(
- plot :: cylindrical([1, s, z], s = 0..2 ∗ PI, z = −2..2),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], t = 0..2 ∗ PI, x = −2..2)
- , Scaling = Constrained);

いずれも，２つの立体が図のように表示されます。

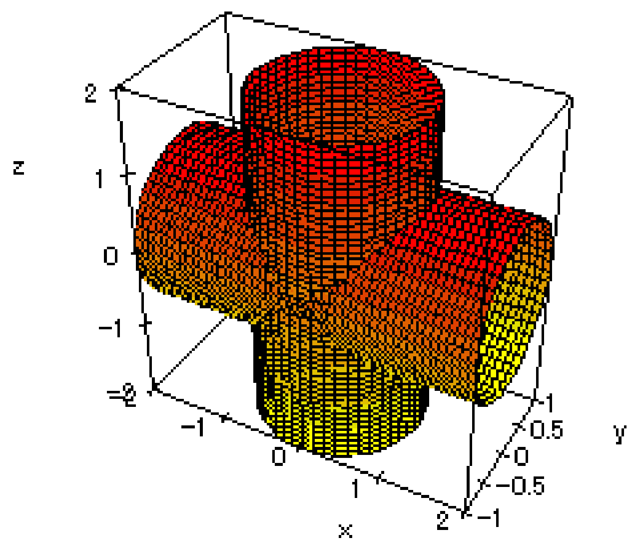


少しグラフがぎざぎざで交線が見づらいですね。このような時は, 平面のグラフでも使用した Grid option を利用します。ただ，曲面の場合は Grid= $[n_x, n_y]$ の様に x,y 方向の grid(格子) を指定します。x, y, z 座標の場

合でやってみましょう。Grid=[50,50] にします。[注106] また Grid option は plot option ですから Surface3d() の括弧の中に入れます。これに対し Scaling=Constrained は scene option なので plot() の括弧の中に入れます。平面のグラフのときと同様ですね。

- plot(
- plot :: Surface3d([cos(t), sin(t), z], t = 0..2 * PI, z = −2..2, Grid = [50, 50]),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], t = 0..2 * PI, x = −2..2, Grid = [50, 50])
- , Scaling = Constrained);

これでプロットが次のように変わります。滑らかになりました。二つの円柱の交線がよく見えます。(MuPAD の画面上ではもっときれいに見えます)



10.6.2　円錐と円柱の交線

最後に応用問題として「大学への数学」の学力コンテスト (98 年 9 月号) に採用された問題を考えて見てください。私のもとの問題はこうでした。

例題

頂点が $A(0,0,2)$, 底面が $x^2+y^2 \leqq \frac{4}{3}, z=0$ の円錐の側面と，軸が x 軸で半径 1 の円柱 $y^2+z^2=1$ の側面との交線を C とする。円柱の側面のうち C によって囲まれている部分の面積を求めよ。

読者のコメントを読んでみると,「図形の概形がわからず，ナスをくり抜いて実験した！」というものもありました。しかしナスを無駄にする必要は, ナいんでス。MuPAD を使えばいいのです。こんどは”円錐に関しては, 円柱座標” また”円柱に関しては Surface3d ” を利用して書いてみます。

[注106] Curve3d は曲線ですから Grid=500 のように表します。曲面の場合は Grid の初期値は Grid=[20,20], 曲線の場合は Grid= [50] となっています。

さて，前にやったように円錐の円柱座標は

$$[\rho, \theta, z] = \left[\frac{2-z}{\sqrt{3}}, \theta, z\right] \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq z \leqq 2)$$

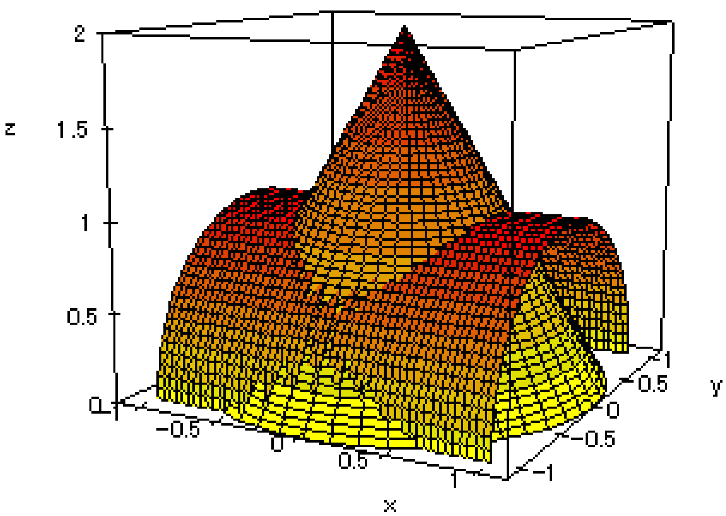
一方, 円柱の上半分 ($z \geqq 0$) の媒介変数表示は

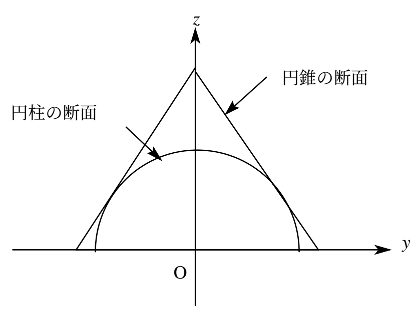
$$(x, y, z) = (x, \cos\theta, \sin\theta) \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表せます。したがって MuPAD では次のようになります。

- plot(
- plot :: cylindrical([(2 − z)/sqrt(3), s, z], s = 0..2 ∗ PI, z = 0..2, Grid = [50, 50]),
- plot :: Surface3d([x, cos(t), sin(t)], x = −1..1, t = 0..PI, Grid = [50, 50])
- , Scaling = Constrained);

ここで Grid= [50, 50] というのはパラメータの分割数でこれが大きいほど曲面が滑らかになります。
さて次のようになりました。実は平面 $x = 0$ 上の断面図を考えると 2 つの図形は接しています。このとき以外は面積は簡単には求まりません。なお, 円錐の円柱の上側の体積，**円錐の**C によって囲まれる側面積なども求まります。





平面 $x = 0$ 上の断面図

このようにいろいろなグラフや曲面を描いてみると面白いです。他にも「円柱と四角すい」とか「円柱と平面」とかいろいろやってみてください。

10.7 【参考】オプションのリスト（一部のみ)

MuPAD のオプションは 全体のグラフに関するオプション (Scene option）と 個々のグラフ (object) に関するオプション (plot option) の２種類があり, それぞれつける位置も異なります。

1．Scene options

Option 名	値	初期値	働き
Arrows	TRUE,FALSE	FALSE	x,y,z 軸の矢印
Axes	Box,Corner,None,Origin	Origin	x,y,z 軸の表示の仕方
BackGround	[R,G,B]	RGB::White	背景色
CameraPoint	[x, y, z]	Automatic	視点の位置
FocalPoint	[x, y, z]	Automatic	焦点の位置
ForeGround	[R,G,B]	RGB::Black	前景色 (x,y,z 軸の色)
LineStyle	SolidLines,DashedLines	SolidLines	グラフの線種 (実線、点線)
Scaling	Constrained,Unconstrained	Unconstrained	両軸方向の目盛りのとり方
Ticks	Automatic,None,[n_x, n_y, n_z], n ,	Automatic	目盛り刻みの数
Title	”タイトル名”	入力した関数 (plotfunc3d のとき)	タイトル
TitlePosition	Above,Below	Above	タイトルの位置

２．plot options

Option 名	値	初期値	働き
Color	[Flat],[Flat,[R,G,B]],[Height], [Height,[R_1, G_1, B_1], [R_2, G_2, B_2]]	[Height]	各グラフの色の指定
Grid	[n] (曲線のとき) [n_1, n_2] (曲面のとき)	[100] [20,20]	パラメータの分割数
Title	”タイトル名”	” ”	各グラフのタイトル
TitlePosition	[x,y]		各タイトルの位置

色の指定は RGB 指定 [R,G,B] かまたはカラー変数を用いて指定する。カラー変数は RGB::Black, RGB::White, RGB::Green, RGB::Red, RGB::Blue, RGB::Yellow, RGB::Gray, RGB::Magenta, RGB::Olive, RGB::LightGray, RGB::OliveGreenDark(どんな色じゃ？) など ”色々”ある。

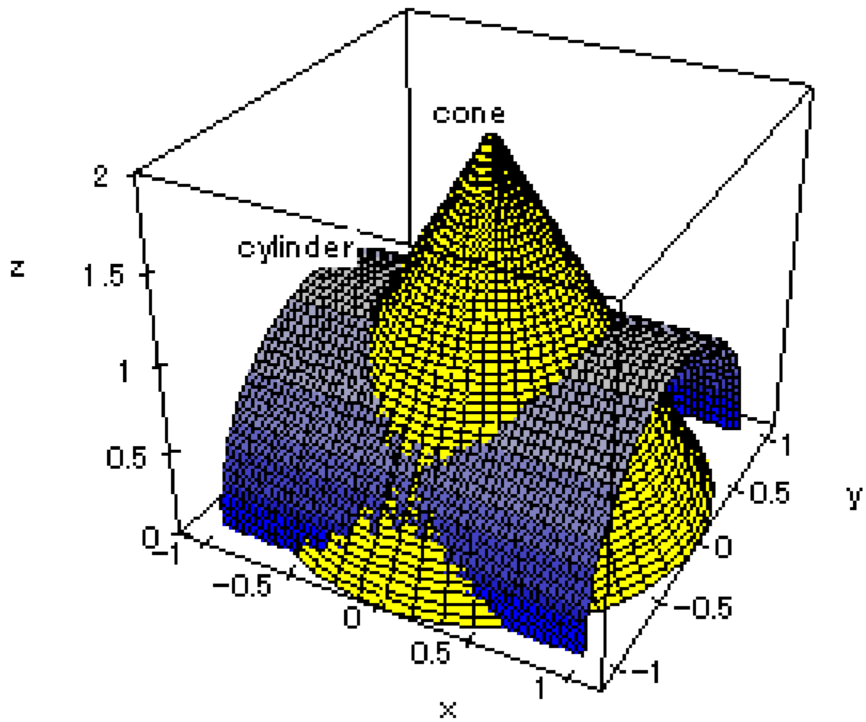
option に関し，さらに詳しいことは,BrouseManual で「scene option」 と 「plot option 」の項を見てください。[注107)]

注107) 同じ Title option でも plot option の Title option の方は, 個々のグラフにつけられるが (すなわちグラフの数だけつけられるが), scene option の Title option は全体に一個つけられるだけです。

【例】さて前の節で描いたグラフを**円錐はフラットの黄色**で，**円柱は青から灰色まで高さによって色を変えながら**描いてみる。また**それぞれのグラフにもタイトルをつけ, Grid=[50,50] にする**と次のようになる。Scene option と plot option の位置の違いにも注意してください。

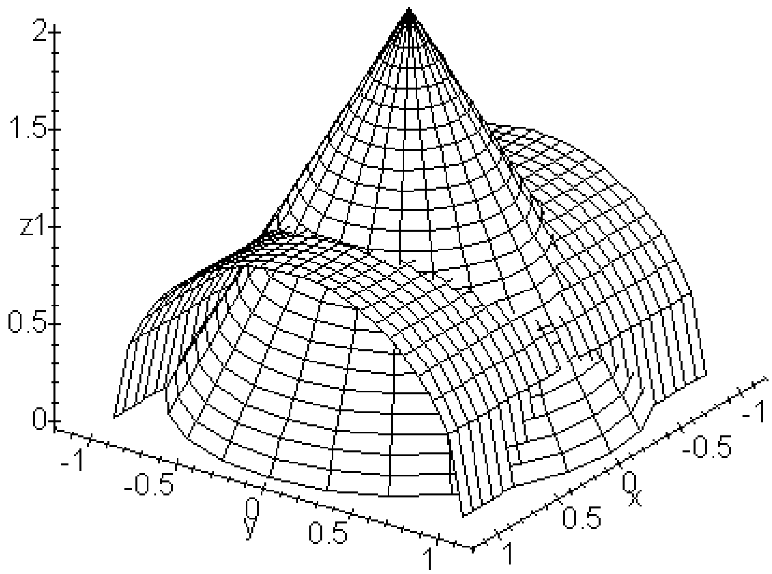
- $\mathtt{plot(}$
- $\mathtt{plot::cylindrical}([(2-\mathtt{z})/\mathtt{sqrt}(3), \mathtt{s}, \mathtt{z}], \mathtt{s} = 0..2*\mathtt{PI}, \mathtt{z} = 0..2$
  $, \mathtt{Grid} = [50, 50], \mathtt{Color} = [\mathtt{Flat}, \mathtt{RGB::Yellow}], \mathtt{TitlePosition} = [5, 2], \mathtt{Title} = \text{"cone"}),$
  $\cdots$ plot options
- $\mathtt{plot::Surface3d}([\mathtt{x}, \cos(\mathtt{t}), \sin(\mathtt{t})], \mathtt{x} = -1..1, \mathtt{t} = 0..\mathtt{PI}$
  $, \mathtt{Grid} = [50, 50], \mathtt{Color} = [\mathtt{Height}, \mathtt{RGB::Blue}, \mathtt{RGB::Gray}],$
  $\mathtt{TitlePosition} = [3.2, 4], \mathtt{Title} = \text{"cylinder"})$ $\cdots$ plot options
- $, \mathtt{Scaling} = \mathtt{Constrained});$ $\cdots$ scene option

これで次のグラフになる。



10.8 【参考】MuPAD と Maple のグラフ描写

Maple は Mathematica と並び数学ソフトの代表的なものです。以前，Maple を使っていた私は，同じ図形を Maple でも描かせた事があります。次の図は，Maple で同じ図形を描いたものです。



円錐と, 円柱の交線の辺りを見てください。Maple の方が, 細かい点がきれいに描けています。MuPAD で Grid を大きくしても, 残念ながら同じにはなりません。その他にも，Maple では描かせた図形をマウスでドラッグして簡単に回転させたり, 上下・左右に拡大縮小することが出来ます。これは，MuPAD にはない大きなメリットです。

MuPAD は，Maple とほぼ並ぶ性能を持っていますが，グラフに関しては，Maple に一歩譲るみたいです。まあ，これは値段差（Maple−18 万 1 千円, MuPAD−0 円) を考えれば，仕方ないのかもしれません。もしお金持ちになれば，Maple も使ってみてください。MuPAD と Maple の操作方法は非常に似ているので，MuPAD が使えるようになったら，Maple はすぐ使えます。

11　行列

行列の基本計算

行列の定義	`matrix()`
行列の和, 差, 積	+, −, ∗
A の逆行列	`A ^ (-1)` または `1/A`

以下は参考です。

A の固有方程式 (変数 x のとき)	`linalg :: charpoly(A, x)`
A の固有値	`linalg :: eigenvalues(A)`
A の固有ベクトル	`linalg :: eigenvectors(A)`
A の対角化	`linalg :: jordanForm(A)`

11.1　行列の定義

行列の定義は matrix([[第一行], [第 2 行], $\cdots$, [第 n 行]]) のようにします。

$(2, 5)$	`matrix([[2, 5]])`
$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	`matrix([[3], [4]])`
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	`matrix([[1, 2], [3, 4]])`
$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$	`matrix([[a, b], [c, d]])`

一番外側の [ ] はリストを表し，要素が，この順に並ぶことを表しています。[注108)] matrix([[2,5]] は要素 (行) がひとつ ([2,5] だけ) なので行ベクトルになります。一方，matrix([[3],[4]]) は要素が 2 つあるので列ベクトルになります。[注109)]

行列に名前をつけるのも, 数式に名前をつけるのと同様です。「名前:= 定義式;」で定義します。このとき名前として E と I(ai) は, e(自然対数の底),i(虚数単位) として MuPAD が使用しますので使えません。例えば, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に A と名前をつけるのは，次のようにします。

- `A := matrix([[1, 2], [3, 4]]);`　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ も, 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ も自分で定義します。

- `E := matrix([[1, 0], [0, 1]]);`　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- `O := matrix([[0, 0], [0, 0]]);`　　>> $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

注108)　これに対し { } は集合を表し, 要素の順番を考えません。

注109)　matrix([a,b]) と書いても [ ] の中の要素は a と b の 2 つあるので，MuPAD のほうで勝手に [a],[b] の意味だと解釈し，やはり列ベクトルになります。

11.2 基本的な計算

行列の加減乗除は実数と同じ様に計算できます。A の逆行列は 1/A でも A ^ (−1) でも計算できます。[注110] また逆行列が存在しないときは FAIL というエラーがでます。

- `u := matrix([[1,2]])` >> $(1,2)$ $\cdots \vec{u}$ の定義
- `v := matrix([[2],[3]])` >> $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\cdots \vec{v}$ の定義
- `u * v;` >> 8 $\cdots \begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=8$
- `v * u;` >> $\begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}$ $\cdots \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}$
- `A := matrix([[1,2],[3,4]]);` >> $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\cdots$ A の定義
- `B := matrix([[1,2],[-1,-2]]);` >> $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ $\cdots$ B の定義
- `2 * A + 3 * B;` >> $\begin{pmatrix}5&10\\3&2\end{pmatrix}$ $\cdots$ 2A+3B
- `A * B;` >> $\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-2\end{pmatrix}$ $\cdots$ AB
- `B * A;` >> $\begin{pmatrix}7&10\\-7&-10\end{pmatrix}$ $\cdots$ BA
- `A ^ (-1);` >> $\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\cdots \mathrm{A}^{-1}$
- `1/A;` >> $\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\cdots \mathrm{A}^{-1}$
- `B ^ (-1);` >> *FAIL* $\cdots \mathrm{B}^{-1}$ はない
- `A * A ^ (-1);` >> $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\cdots \mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{E}$
- `A ^ 2;` >> $\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$ $\cdots \mathrm{A}^2$
- `A ^ 2 * B;` >> $\begin{pmatrix}-3&-6\\-7&-14\end{pmatrix}$ $\cdots \mathrm{A}^2B$
- `A ^ n;` >> Error:not a positive multiple [(Dom::Matrix(Dom::ExpressionField()))::_power] $\cdots \mathrm{A}^n$

一般には行列では AB≒BA でしたね。また $det(B)=1\times(-2)-2\times(-1)=0$ ですから B の逆行列は存在しません。[注111] 残念ながら，行列の n 乗は計算できないみたいです。
なお，成分が文字の行列も計算できます。ただこのときは，ちょっと注意が必要です。いま仮に行列 A を $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ と定義したいとします。しかし先に a,b,c,d をなんらかに定義していた場合は，エラーが出るこ

注110) もちろん学校では 1/A は使わないでください。

注111) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ のとき $det(A)=ad-bc$ と定義して A の行列式 (*determinant*) といいます. $det(A)=0$ のとき A^{-1} は存在しません。$det(A)\fallingdotseq 0$ のとき $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ です。

ともあります。このような時は delete(); で，その定義を先に消去しておきます。何も定義していないときはもちろん delete(); する必要はありません。

- `delete`(a) : `delete`(b) : `delete`(c) : `delete`(d); >> $\cdots a, b, c, d$ の定義の消去
- `A` := `matrix`([[a, b], [c, d]]); >> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\cdots$ A の定義
- `e` := `matrix`([[1, 0], [0, 1]]); >> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdots$ e(単位行列) の定義
- `A` ∗ `e`; >> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\cdots AE = A$
- `e` ∗ `A`; >> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\cdots EA = A$
- `1/A`; >> $\begin{pmatrix} -\frac{d}{-ad+bc} & \frac{b}{-ad+bc} \\ \frac{c}{-ad+bc} & -\frac{a}{-ad+bc} \end{pmatrix}$ $\cdots A^{-1}$

本当は $ad - bc = 0$ のときは逆行列は存在しないはずですが MuPAD はとりあえずこの式を出してきます。[注112)]

お次はケーリー・ハミルトンの定理の検証です。

- `A ^ 2` − (a + d) ∗ `A` + (ad − bc)e; >> $\begin{pmatrix} ad - bc + bc - a(a+d) + a^2 & ab + bd - b(a+d) \\ ac + cd - c(a+d) & ad - bc + bc - d(a+d) + d^2 \end{pmatrix}$
- `simplify`(%); >> $\begin{pmatrix} ad - bc - ad + bc & 0 \\ 0 & ad - bc - ad + bc \end{pmatrix}$

明らかに

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = \begin{pmatrix} ad - bc - ad + bc & 0 \\ 0 & ad - bc - ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \qquad \cdots (*)$$

と簡単に出来るはずですが MuPAD はそこまでやってくれません。「そのくらい自分でやれ」ということでしょうか？
このように文字が入っているときは自分で確かめてみることが必要です。MuPAD も万能ではないので注意しましょう。

11.3 行列の n 乗

行列の n 上は非常に多く入試に出題されています。しかし，第 2 節の最後の例で見たように MuPAD では n が文字のとき，A^n は計算できません。そこでここでは参考書にある「整式の剰余」を利用した方法で手動で求めてみます。

注112) しかし factor(%); とすると Error: がでます。遅ればせながらエラーに気づいたというところでしょうか。

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^n$ (n は自然数) について次の問いに答えよ。

(1) $A^2 - 7A + 10E = O \cdots (*)$ が成り立つことを示せ。

(2)$f(x)$ を $x^2 - 7x + 10$ で割ったときの余りを求めよ。

(3)A^n を求めよ。

【解答】

(1)(略) ケーリー・ハミルトンの定理より明らか。

注113)

(2)$x^2 - 7x + 10$ は 2 次式なので余りは $px + q(p, q$ 定数) とおける。さらに商を $g(x)$ とおくと

$$f(x) = (x^2 - 7x + 10)g(x) + px + q = (x-2)(x-5)g(x) + px + q \qquad \cdots ①$$

① に $x = 2, x = 5$ を代入して

$$\begin{cases} f(2) = 2^n = 2p + q \\ f(5) = 5^n = 5p + q \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{5^n - 2^n}{3} \\ q = \dfrac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3} \end{cases}$$

よって求める余りは

$$\frac{5^n - 2^n}{3}x + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3} \qquad \cdots (答)$$

(3) ① で x に A を代入して

$$f(A) = A^n = (A^2 - 7A + 10E)g(A) + pA + qE \qquad \cdots ②$$

(1) より $A^2 - 7A + 10E = O$ だから

$$\begin{aligned} A^n &= pA + qE \\ &= \frac{5^n - 2^n}{3}A + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}E \\ &= \frac{5^n - 2^n}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 5^n + 2^n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots (答)$$

注114)

注113) 試験のときはもちろん実際に計算したふりをしてください。

注114) ① の x に A を代入するときに 実数の 1 を単位行列 E に変えるのを注意してください。このように 1 変数 x のみの整式には行列 A を代入してもかまいません。例えば,

$$(x+2) + (3x+1) = 4x + 2 \Longrightarrow (A + 2E) + (3A + E) = 4A + 3E$$

$$x(x+2) + 1 = x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow A(A + 2E) + E = A^2 + 2A + E$$

しかし一般に, 2 変数 x, y の整式に, 行列 A, B を代入することはできません。

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Longrightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ (これは誤り)}$$

一般に $AB \fallingdotseq BA$ ですから, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ から簡単に出来ません。

これを MuPAD でやらせるにはどうすればよいでしょう？じつは MuPAD にはケーリー・ハミルトンの多項式 (固有多項式) を作るコマンドはあります。[注115] しかし n が自然数のとき x^n を多項式で割った余りを求めることは出来ません。[注116] そこで我々のほうで解を求める手順を作る必要があります。いま $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式:

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0 \qquad \cdots (*)$$

の２解を α,β とします。$f(x) = x^n$ を $(*)$ で割ったときの商を $g(x)$, 余りを $px+q$ とおくと,

$$f(x) = \{x^2 - (a+d)x + (ad-bc)\}g(x) + px + q$$

(i) **$\alpha \fallingdotseq \beta$のとき，** 上の式に α,β を代入して

$$\begin{cases} f(\alpha) = \alpha^n = p\alpha + q & \cdots ① \\ f(\beta) = \beta^n = p\beta + q & \cdots ② \end{cases}$$

①,② より

$$p = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad q = \frac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta}$$

ここで $\alpha - \beta \fallingdotseq 0$
☜ を使ったことに注意。

ゆえに

$$f(x) = \{x^2 - (a+d)x + (ad-bc)\}g(x) + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta} \qquad \cdots ③$$

$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ だから③ に A を代入すると

$$A^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A + \frac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta}E$$

(ii) **$\alpha = \beta$のとき，** $x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = (x-\alpha)^2$ となるから，③ は

$$f(x) = x^n = (x-\alpha)^2 g(x) + px + q \qquad \cdots ③'$$

両辺を x で微分して

$$f'(x) = nx^{n-1} = 2(x-\alpha)g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x) + p \qquad \cdots ④$$

③',④ へ α を代入して

$$\begin{cases} \alpha^n & = p\alpha + q & \cdots ⑤ \\ n\alpha^{n-1} & = p & \cdots ⑥ \end{cases}$$

よって

$$p = n\alpha^{n-1}, \; q = (1-n)\alpha^n$$

⑥ へ代入して

$$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x) + n\alpha^{n-1}x + (1-n)\alpha^n \qquad \cdots ⑦$$

[注115] linalg::charpoly()−characteristic polynomial (固有多項式)
[注116] 整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割った余り (remain) を求めるのは divide(f(x),g(x),Rem) ですが残念ながら n は扱えません。

$(A-\alpha)^2 = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ だから⑦ に A を代入すると

$$A^n = n\alpha^{n-1}A + (1-n)\alpha^n E$$

以上まとめると

$$\begin{cases} \text{(i) } \alpha \fallingdotseq \beta \text{のとき,} & A^n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A + \dfrac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta}E \\ \text{(ii) } \alpha = \beta \text{のとき,} & A^n = n\alpha^{n-1}A + (1-n)\alpha^n E \end{cases} \qquad \cdots (**)$$

ここで α, β は

$$x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = 0 \qquad \cdots (*)$$

の 2 解でした。$(*)$ を固有方程式，$(*)$ の解を固有値といいます。幸いにして MuPAD には固有値を求めるコマンドがあります。linalg::eigenvalues(x) です。[注117)]
それでは $(**)$ の結果を使って例題 1 (3) を解いてみましょう。次のようにします。

- `A := matrix([[3, 1], [2, 4]]);` >> $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\cdots A$ の定義
- `e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);` >> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdots$ 単位行列の定義
- `linalg :: eigenvalues(A);` >> $\{2, 5\}$ $\cdots$ これが固有値

そこで，$\alpha = 5, \beta = 2$ として $(**)$ に代入すると，

- `(5 ^ n - 2 ^ n)/(5 - 2) * A + (5 * 2 ^ n - 2 * 5 ^ n)/(5 - 2) * e;` >> $\begin{pmatrix} \frac{2\cdot 2^n}{3} + \frac{5^n}{3} & -\frac{2^n}{3} + \frac{5^n}{3} \\ -\frac{2\cdot 2^n}{3} + \frac{2\cdot 5^n}{3} & \frac{2^n}{3} + \frac{2\cdot 5^n}{3} \end{pmatrix}$

例題 1 の解答と同じにするには factor(); を使います。

- `factor(%);` >> $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 2^n + 5^n & -2^n + 5^n \\ -2\cdot 2^n + 2\cdot 5^n & 2^n + 2\cdot 5^n \end{pmatrix}$

確かに，同じになりました。こんどは $\alpha = \beta$ となる場合をやって見ましょう。

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ とするとき, A^n (n は自然数) を求めよ。

これを公式 $(**)$ を使って MuPAD でやってみます。

- `A := matrix([[1, -1], [4, 5]]);` >> $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\cdots A$ の定義
- `e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);` >> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdots E$ の定義
- `linalg :: eigenvalues(A);` >> $\{3\}$ $\cdots$ これが固有値

注117) linalg は linear algebra(線形代数 – 行列などを大学ではこう呼びます) の略で，eigen はドイツ語で ' 固有の' という意味です。values はもちろん' 値' という意味です。固有値は普通 2 個以上あるので複数形になっています。

そこで，$\alpha = 3$ として (∗∗) に代入すると，

- $\mathtt{n} * 3^{\mathtt{n}-1} * \mathtt{A} + (1 - \mathtt{n}) * 3^{\mathtt{n}} * \mathtt{e};$ $\qquad$ >> $\begin{pmatrix} n \cdot 3^{n-1} + 3^n(-n+1) & -n \cdot 3^{n-1} \\ 4n \cdot 3^{n-1} & 5n \cdot 3^{n-1} + 3^n(-n+1) \end{pmatrix}$

こんどは factor(%) や simplify(%) を使っても余り簡単になりません。手動で簡単にすると

$$A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3-2n & -n \\ 4n & 2n+3 \end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$

☜ちょっと検算してみましょう。同じやり方でやってもつまらないので, 二項定理;

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

を使ってみます。まずケーリー・ハミルトンの式から

$$A^2 - 6A + 9E = 0 \Longleftrightarrow (A - 3E)^2 = 0$$

つぎに $B = A - 3E = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ とおくと $A = 3E + B$ で $B^2 = O$ です。二項定理より

$$A^n = (B+3E)^n = {}_n\mathrm{C}_0 (3E)^n + {}_n\mathrm{C}_1 (3E)^{n-1} B + {}_n\mathrm{C}_2 (3E)^{n-2} B^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n B^n$$

ここで $B^2 = O$ より，第 3 項以降はすべて O となるから

$$\begin{aligned} A^n &= (3E)^n + n(3E)^{n-1}B = 3^n E + n \cdot 3^{n-1} B = 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot 3^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3-2n & -n \\ 4n & 2n+3 \end{pmatrix} \qquad \cdots(答) \end{aligned}$$

確かに一致しています。$\alpha = \beta$ の場合は，二項定理を使ったほうが,（剰余を利用するより）若干，楽に出来ますね。

11.4　行列の n 乗計算のプログラミング

前節でも MuPAD をつかって A^n が求まることは解りましたが，やや面倒です。このように同じ手続きを繰り返し利用したい際に，コンピュータではプログラミングというのをやります。プログラミングの基礎知識に関してはここでは省略しますが，BASIC と同じようにプログラミングするだけです。[注118)]
さて，とりあえず次のようにプログラミングすると njo_matrix(A); で A の n 乗を計算することが出来ます。入力はちょっと面倒です。1 行目には ';' をつけないでください。最後の行は';' でも':' でも大丈夫です。代入は'=' でなく':=' を使ってください。また改行するときは，Shift キーを押しながら Return キーを押さないと，Error になります。[注119)]

注118) MuPAD のプログラミングについて興味がある人は •「はじめての MuPAD」赤間世紀著，Springer 出版 (¥2400) を見るか，お金を出したくない人は，示野　信一氏が
http://www.xmath.ous.ac.jp/ shimeno/mupad.html
でコンパクトな解説 (プログラミングは p51〜) を書いておられます。さらに詳しく知りたい人は toolbar⟶Help⟶Brouse Manual を見ましょう。ただで，しかも英語の勉強にもなります!?

注119) njo_matrix とは勝手に私がつけた名前です。自分の好きな名前に変えて大丈夫です。

```
njo_matrix := proc(x : Dom :: MatrixGroup(2, 2))
local a, b, e, koyuuti;
begin
e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);
koyuuti := linalg :: eigenvalues(x);
if(nops(koyuuti) = 2) then
a := koyuuti[1];
b := koyuuti[2];
print(factor(simplify((a ^ n − b ^ n)/(a − b) ∗ x + (a ∗ b ^ n − b ∗ a ^ n)/(a − b) ∗ e)));
else a := koyuuti[1];
print(factor(simplify(n ∗ a ^ (n − 1) ∗ x + (1 − n) ∗ a ^ n ∗ e)));
end_if :
end_proc :
```

説明します。

```
njo_matrix := proc(x : Dom :: MatrixGroup(2, 2))
```

njo_matrix という名前で１変数の関数を定義します。後ろの：Dom::MatrixGroup(2,2) というのは「もし x が 2×2 行列でないときはエラーにする」という意味で, proc(x) だけでも大丈夫です。このとき後ろに';' はつけません。';' は「ここで実行せよ」という意味なので実行するものがなくエラーになります。次の

```
local a, b, e, koyuuti;
```

は a,b,e,koyuuti を変数として宣言しておきます。BASIC と違い，プログラミングでは先に宣言しておくのが普通です。local というのは local 変数という意味で他のプログラムで参照しない変数という意味です。[注120)]

begin から end_proc までの間が *Body* といってプログラムの本体です。ここにはいくつかの制御文 (if 文, for 文,while 文,repeat 文などのように，場合わけと繰り返しを制御する文) と関数を書きます。要するに中に書いた文を, 制御文に従いつつ順に実行していくだけです。

```
e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);
koyuuti := linalg :: eigenvalues(x)
```

単位行列を e とし，koyuuti に固有値を代入します。

```
if(nops(koyuuti) = 2) then
a := koyuuti[1];
b := koyuuti[2];
print(factor(simplify((a ^ n − b ^ n)/(a − b) ∗ x + (a ∗ b ^ n − b ∗ a ^ n)/(a − b) ∗ e)));
```

注120) これに対し，他のプログラムでも利用したい変数を global 変数といい save a; などと書きます。

は「もし固有値が 2 つあるなら a,b に固有値の 2 個の値を代入して A^n を画面に表示せよ。」という意味です。このときの A^n の式はもちろん前節 (∗∗) の $\alpha\fallingdotseq\beta$ の場合の式に代入します。なお，nops() というのは number of operands の略で要素の数を返します。linalg::eigenvalues() は固有値の集合 koyuuti を返してきます。koyuuti[1],koyuuti[2] でその第 1 要素と, 第 2 要素を取り出しています。

```
else a := koyuuti[1];
print(factor(simplify(n * a ^ (n - 1) * x + (1 - n) * a ^ n * e)));
end_if
```

もし固有値が 1 つしかないときは，else 以下 end_if までを実行します。すなわち，「a に固有値を代入して A^n を画面に表示せよ。」このときの A^n の式はもちろん前節 (∗∗) の $\alpha=\beta$ の場合の式に代入します。

ここで使った制御文を if 文といって

if (条件文) then(命令$_{真}$) else (命令$_{偽}$) end_if

「もし (条件文) が真ならば，(命令$_{真}$) を実行して終わる。もし真でないならば，(命令$_{偽}$) を実行して終わる」という風に使います。[注121)]

これで，njo_matrix(A) とやると 2×2 行列の n 乗が計算できます。まずは例題 1 の行列からです。

- A := matrix([[3, 1], [2, 4]]); $>> \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$
- njo_matrix(A); $>> \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot 2^n+5^n & -2^n+5^n\\ -2\cdot 2^n+2\cdot 5^n & 2^n+2\cdot 5^n\end{pmatrix}$

確かに同じになりました。次は例題 2 の行列です。

- A := matrix([1, −1], [4, 5]); $>> \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$
- njo_matrix(A); $>> \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3n\cdot 3^{n-1}+3\cdot 3^n(-n+1) & -n\cdot 3^n\\ 4n\cdot 3^n & 5n\cdot 3^n+3\cdot 3^n(-n+1)\end{pmatrix}$

やや表現は違いますが，これは，プログラムでは最後に factor を効かせているからです。

このようにプログラムすると計算は楽ですが，最初に入力するのが大変ですね。せっかく入力したプログラムは是非保存しておきたいものです。しかし MuPAD Pro のほうは自分で書いたコマンドを保存できるらしいですが，MuPAD Light ではそれが出来ません。でも方法はあります。

tool bar の一番左の [file] から **Save As** を選んで適当な名前で, 適当なところに保存します。これは自動的に Text file [注122)] になるので，次回は「メモ帳」か何かで大事なところをコピーして MuPAD に貼り付けます。毎回これをやるのはちょっと面倒ですが，ただで使うためには多少の不便は仕方ありません。

注121) 実は条件文は入れ子にも出来るし, また else 以下を省くことも出来ます。

注122) 一番基本的なデータ形式。全てのワープロ, エディターで開ける。

11.5 固有値と固有ベクトル

– この節以降，例題は全て入試問題レベルであるが，説明は, 高校の範囲をやや超える–

実は行列の n 乗の求め方は色々あります。次の例題を見てください。

例題 3

2 次の正方行列 A は,

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdots ①,\quad A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdots ②$$

をみたしている。
n を自然数とするとき，A^n を求めよ。

一般に行列 A，列ベクトル $\overrightarrow{x}$ にたいし

$$A\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{x},\ \text{かつ}\overrightarrow{x} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$$

が成り立つとき，k を固有値，$\overrightarrow{x}$ を A の固有値 k に対する固有ベクトルといいます。上の例では A の固有値は $\{2, -2\}$, 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, 固有値 (-2) に対する固有ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)$ となります。このようなベクトルを求めると A^n はすぐに求まります。

【解答】

① の両辺に A をかけて,

$$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\cdot 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

さらにこの両辺に A をかけて

$$A^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2^2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2^2\cdot 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

同様にして, $n = 1, 2, 3\cdots$ のとき

$$A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^n\\2^{n+1}\end{pmatrix} \qquad \cdots ③$$

同様にして，② より

$$A^n\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = (-2)^n\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3(-2)^n\\4(-2)^n\end{pmatrix} \qquad \cdots ④$$

③,④ をまとめて書くと

$$A^n\begin{pmatrix}1 & \vdots & 3\\2 & \vdots & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^n & \vdots & 3(-2)^n\\2^{n+1} & \vdots & 4(-2)^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 3(-2)^n \\ 2^{n+1} & 4(-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 3(-2)^n \\ 2^{n+1} & 4(-2)^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4\cdot 2^n + 6(-2)^n & 3\cdot 2^n - 3(-2)^n \\ -4\cdot 2^{n+1} + 8(-2)^n & 3\cdot 2^{n+1} - 4(-2)^n \end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

このように簡単にもとまります。A を求める必要はありません。注123) ということは，1 次独立な 注124) 固有ベクトルが 2 つ求まれば A^n も簡単に求まるということです。さて，$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の固有値と固有ベクトルを求めるには次のようにします。

いま $A\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{x}$ とすると

$$(A - kE)\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots①$$

ここで $(A - kE)$ が逆行列を持つとすると，それを両辺にかけて

$$\overrightarrow{x} = (A - kE)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ をみたさない。よって $(A - kE)$ は逆行列を持たないことが必要で

$$\begin{aligned} det(A - kE) = det\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} &= (a-k)(d-k) - bc = 0 \qquad \cdots② \\ \Longleftrightarrow k^2 - (a+d)k + (ad - bc) &= 0 \end{aligned}$$

すなわち固有値 k は

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0 \qquad \cdots③$$

の解となることが必要です。③ を固有方程式といいます。逆に k が③ の解のとき，① をみたすベクトル $\overrightarrow{x}$ が存在することを示しましょう。$\overrightarrow{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ とすると

$$① \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで $a - k, b, c, d - k$ の全てが 0 とすると，$\overrightarrow{x}$ は任意のベクトルを取ればよい。$a - k, b, c, d - k$ のうち 0 でないものがあるとすると，② より

$$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

注123) ちなみに①,② より

$$A\left(\begin{array}{c:c} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 2 & -6 \\ 4 & -8 \end{array}\right)$$

ですから

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -16 & 10 \end{pmatrix} \text{ となります。}$$

注124) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が 1 次独立というのは $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ でかつ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行でないという事です。

であるから,$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix}$, または $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix}$ とすれば，$a-k, b, c, d-k$ は全て 0 ではないから，この場合も ① をみたすベクトル $\overrightarrow{x}$ が存在する。ただし $\begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix}$ がともに $\overrightarrow{0}$ でないときは $(a-k)(d-k)-bc = 0 \iff \begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix}$ となるので，このとき 1 次独立なベクトルは (その k の値に対しては) 一組だけしかない。

以上から ③ の解を k とすると必ず k に対する固有ベクトルが少なくとも 1 つ存在することが証明されました。

では，実際に，固有値と固有ベクトルを求めてみましょう。

例題 4

$A = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -16 & 10 \end{pmatrix}$ のとき,

$$A\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{x} \qquad \cdots ①$$

をみたす k の値と，そのときの $\overrightarrow{x}$ を求めよ。

【解答】

固有方程式は

$$x^2 - 4 = 0$$

となるので固有値は

$$k = -2, 2$$

(i) $k = -2$ のとき, ① より

$$(A-2E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\overrightarrow{x_1} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ (c_1 \fallingdotseq 0)$$

(ii) $k = 2$ のとき, ① より

$$(A-2E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\overrightarrow{x_2} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (c_2 \fallingdotseq 0)$$

したがって求める解は,c_1, c_2 を任意の 0 でない定数として,

$$k = -2 \text{ のとき}, \overrightarrow{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ k = 2 \text{ のとき}, \overrightarrow{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots (答)$$

普通，固有ベクトルといえば c_1, c_2 をつけないで良いことになっています。したがって A の固有値は ±2, 固有値 -2 に対する固有ベクトルは $\binom{3}{4}$, 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\binom{1}{2}$ といっても構いません。さてそれではこれを MuPAD で求めて見ましょう。次のコマンドを使います。

linalg::charpoly(A ,x);	A の固有方程式 (変数 x) を求める。
linalg::eigenvalues(A);	A の固有値を求める。
linalg::eigenvectors(A);	A の固有ベクトルを求める。

それではやってみます。

- `A := matrix([[-10,6][-16,10]]);` >> $\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -16 & 10 \end{pmatrix}$
- `linalg :: charpoly(A,x);` >> $x^2 - 4$
- `linalg :: eigenvalues(A);` >> $\{-2, 2\}$
- `linalg :: eigenvectors(A);` >> $\left[[-2,1]\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, [2,1]\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

最後の式は

「固有値 (-2) の重複度は 1 で, その固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 2 の重複度は 1 で, その固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を表します。$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} /\!/ \binom{3}{4}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} /\!/ \binom{1}{2}$ ですから，確かに計算で求めた結果と一致します。

11.6 対角化

11.6.1 1 次独立な固有ベクトルが２つあるとき

固有値, 固有ベクトルは次のような形でも出題されます。

例題 5

$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ とし，A, P が $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ をみたすとき, 次の問いに答えよ。

(1)a, b, c の値を求めよ。

(2) A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

【解答】

(1)$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ より

$$AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 6a+12 & 12+6b \\ -2a-2 & -4-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 4 & bc \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 6a+12 & = 2a \\ 12+6b & = 2c \\ -2a-2 & = 4 \\ -4-b & = bc \end{cases}$$

$$\iff a = -3, b = -1, c = 3 \qquad \cdots(答)$$

(2) (1) より $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

① の両辺を n 乗すると,

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

一般に, $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, また $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は対角行列だから $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. したがって,

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \Longleftrightarrow P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\cdot 2^n + 4\cdot 3^n & -6\cdot 2^n + 6\cdot 3^n \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 4\cdot 2^n - 3\cdot 3^n \end{pmatrix} \qquad \cdots (答) \end{aligned}$$

一般に, 次の定理が成り立ちます。

定理

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が固有値 k_1, k_2 とそれぞれに対する固有ベクトル $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ をもち, $\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ が 1 次独立なとき, $P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ とすると, $ps - qr \fallingdotseq 0$ より P^{-1} が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

【証明】
仮定より,

$$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pk_1 \\ qk_1 \end{pmatrix},\ \text{かつ}\ A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = k_2\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rk_2 \\ sk_2 \end{pmatrix}$$

まとめて書くと

$$A\begin{pmatrix} p & \vdots & r \\ q & \vdots & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pk_1 & \vdots & rk_2 \\ qk_1 & \vdots & sk_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

よって $P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} AP &= P\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \\ \therefore P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots 【証明終】 \end{aligned}$$

すなわち 1 次独立な固有ベクトル $\overrightarrow{x_1} = \binom{p}{q}, \overrightarrow{x_2} = \binom{r}{s}$ があるとき，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ (x_1, x_2 は それぞれ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ に対する固有値) が成り立ちます。このように $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形の行列に変えることを対角化といいます。MuPAD では A の対角化は，次のようにします。

linalg::jordanForm(A);

注125) さっそく，やって見ましょう。

- `A := matrix([[6,6],[-2,-1]]);` >> $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
- `linalg :: eigenvectors(A);` >> $\left[[-2,1]\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, [3,1]\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

どうやら固有ベクトルは $2\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ と, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となりますから P を次のように定義します。

- `P := matrix([[-3,-2],[2,1]]);` >> $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP$ を計算してみます。

- `P ^ (-1) * A * P;` >> $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

確かに成分を固有値とした対角行列になりました。次はこれを一気にやってみます。

- `linalg :: jordanForm(A);` >> $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

11.6.2　1 次独立な固有ベクトルが１つしかないとき

実は，1 次独立な固有ベクトルを 2 つ取れない場合でも P を適当に選ぶと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の形に変形できることがわかっています。

例題 6

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ について

(1) $P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) $(P^{-1}AP)^n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ を求めよ。

(3) A^n $(n = 1,2,3,\cdots)$ を求めよ。

【解答】

(1)

$$P^{-1}AP = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$

注125) jordanform(Jordan 標準形 – 対角化を一般化したもの) というのは大学の一年生の数学 (線形代数学) の授業のゴールみたいなものです。私も苦労しました。ほんとに。

(2)

$$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&2\cdot 3\\0&3^2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&2\cdot 3\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&3\cdot 3^2\\0&3^3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&3\cdot 3^2\\0&3^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^4&4\cdot 3^3\\0&3^4\end{pmatrix}\cdots$$

となるから

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\qquad\cdots(答)$$

(3) 一般に $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ が成り立つから

$$A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}=3^{n-1}\begin{pmatrix}3-2n&-n\\4n&2n+3\end{pmatrix}\qquad\cdots(答)$$

この場合, 固有方程式は

$$x^2-6x+9=0\Longleftrightarrow(x-3)^2=0$$

したがって固有値は

$$x=3\ (2\text{ 重解})$$

それに対する固有ベクトルを $\overrightarrow{x_1}=\binom{p}{q}$ とすると

$$(A-3E)\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\ (c_1\fallingdotseq 0)$$

よって,$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ としてよい。ここで $(A-3E)\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}$ をみたす $\overrightarrow{x_2}=\binom{r}{s}$ を求めると

$$\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}-2r-s=1\\4r+2s=-2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

簡単のため $c_2=0$ とすると

$$\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

ここで $P=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$ としたものが, 例題の P である。一般に次の定理が成り立つ。

定理

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が固有値 α(2 重解) をもち，かつ $A\fallingdotseq\alpha E$ のときは, α に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{x_1}\,(=\binom{p}{q})$,
$(A-\alpha E)\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}$ をみたすベクトルを $\overrightarrow{x_2}\,(=\binom{r}{s})$ としたとき

$$P=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})=\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}\text{とすると，}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$$

定理の証明をする前に,MuPAD で やってみましょう。

- `A` := `matrix`([[1, −1], [4, 5]]); $>> \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

- `linalg` :: `eigenvectors`(`A`); $>> \left[[3,2] \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

これは固有値が 3 (2 重解) で, それに対する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であることを表しています。しかし適当に P をとると $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の形になります。それはとっても簡単で jordanForm(A) とするだけです。

- `linalg` :: `jordanForm`(`A`); $>> \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

このように MuPAD では, 一瞬にしてできてしましまます。あっけない気がします。ちょっと危険な気もします。高校では答えだけでは正解になりませんが，考えてみたら当たり前ですね。それじゃあ, 最後に定理の証明をやって終わりにします。これはちょと難しいので ’ 付録’ とします。

【証明】
いま A の固有値を α (2 重解), その固有ベクトルを $\overrightarrow{x_1}$ とすると,

$$(A-\alpha E)\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0} \qquad \cdots ①$$

ここで

$$(A-\alpha E)\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} \text{ (ただし,}\overrightarrow{x_1}\text{と}\overrightarrow{x_2}\text{は 1 次独立)} \qquad \cdots ②$$

をみたす ベクトル $\overrightarrow{x_2}$ が見つかったとすると，② $\Longleftrightarrow A\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} + \alpha\overrightarrow{x_2}$ であるから，$P = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ とすると

$$AP = A(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (A\overrightarrow{x_1}, A\overrightarrow{x_2}) = (\alpha\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_1} + \alpha\overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ が 1 次独立のとき，P^{-1} は存在するから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となり確かに変形された。よって，あとは② をみたす ベクトル $\overrightarrow{x_2}$ が存在することを言えばよい。まず α が重解となるので固有方程式は

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$

したがってケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 E = (A-\alpha E)^2 = O \qquad \cdots ③$$

仮定より，$A - \alpha E \fallingdotseq O$ だから，$A - \alpha E = B$ とおくと，①,②,③ より

$B^2 = O, B \fallingdotseq O$ のとき,

$$\begin{cases} B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0} \\ B\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} \end{cases} \text{ (ただし,}\overrightarrow{x_1}\text{と}\overrightarrow{x_2}\text{は 1 次独立)} \qquad \cdots ④$$

をみたす $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ が存在することを証明すればよい。まず，$B^2 = O$ より $det(B) = 0$ だから $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$ をみたす $\overrightarrow{x_1}(\overrightarrow{x_1} \fallingdotseq \overrightarrow{0})$ は存在する。つぎに，$\overrightarrow{x_1}$ と 1 次独立な**あるベクトル**$\overrightarrow{x_3}$ をとって，$B\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{y}$ となったとすると $B^2 = O$ より

$$B\overrightarrow{y} = B^2\overrightarrow{x_3} = O\,\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{0}$$

ところが $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$ でもあるから，$\overrightarrow{y}$と$\overrightarrow{x_1}$ が 1 次独立とすると,$B = O$ となり矛盾。[注126] よって $\overrightarrow{y} = k\overrightarrow{x_1}$. ところが，ここで $k = 0$ となったとすると $B\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$ なので $B = O$ となり矛盾する。よって $B\overrightarrow{x_3} = k\overrightarrow{x_1}(k \fallingdotseq 0)$. ゆえに，$\overrightarrow{x_2} = \frac{1}{k}\overrightarrow{x_3}$ とすると，

$$B\overrightarrow{x_2} = \frac{1}{k}B\overrightarrow{x_3} = \frac{1}{k} \cdot k\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_1}$$

ここで，$\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_3}$ は 1 次独立なので，$\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ も 1 次独立である。よって定理は証明された。

注126) 一般に 2×2 行列 B に対し $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$かつ $B\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{0}$ ならば，$B(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ここで，さらに $\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ が 1 次独立ならば，$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})^{-1}$ が存在するので $B = O$ となる。

【参考文献など】

はじめての MuPAD - 赤間世紀著, Springer 出版

MuPAD Pro 2.0 簡易日本語マニュアル-Sciface,LightStone Corp

mupad pdf(www.xmath.ous.ac.jp/~shimeno/mupad.html)- 示野　信一著