$\boxed{1}$ **【解答】** (1)

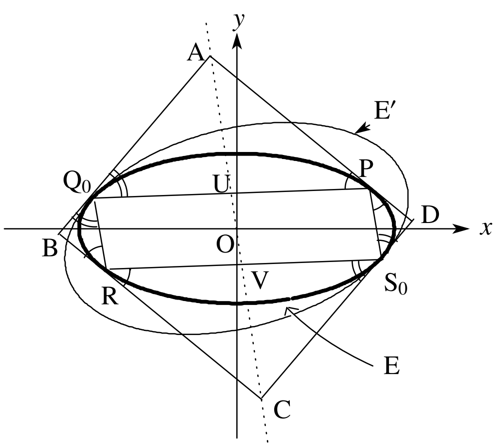
接線の交点が作る長方形の頂点は、円；$x^2+y^2=5$ 上にある。 $\cdots$(答)

(2) 点 P, 点 R を固定して考える。原点に関する対称性より、Q が動く時の PQ+QR の最大値を求めれば良い。(ア) より P,R を焦点とする楕円で E に外接する楕円 E′ が存在する。このとき、E と E′ の接点を Q_0, S_0、さらに、$Q \fallingdotseq Q_0$ のとき、半直線 PQ と E′ の交点を T とすると、

$$PQ_0 + Q_0R = PT + TR = PQ + QT + TR > PQ+QR$$

ゆえに、点 Q が C 上を動く時、PQ+QR が最大となるのは、$Q = Q_0$の時である。

次に、P,Q_0,R,S_0 における接線の交点を図の様に A,B,C,D とすると、直線 AB は、P,R を焦点とする楕円 E′ の接線であるから、対称性も考慮すると、(イ) より



$$\begin{cases} \angle AQ_0P = \angle BQ_0R = \angle RS_0C = \angle PS_0D \\ \angle APQ_0 = \angle S_0PD = \angle CRS_0 = \angle BRQ_0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

四角形 ABCD の内角の和は 360° だから、① より

四角形 ABCD は長方形になる。 $\cdots$②

また、① より

$$\begin{cases} \triangle APQ_0 \equiv \triangle CRS_0 \\ \triangle DPS_0 \equiv \triangle BRQ_0 \\ \triangle APQ_0 \backsim \triangle DPS_0 \end{cases}$$

ここで $\triangle APQ_0$と $\triangle DPS_0$ の相似比を $k:1$ とすると

$$BQ_0 : BA = 1 : (k+1) = BR : BC、DP : DA = 1 : (k+1) = DS_0 : DC$$

$$\therefore Q_0R /\!/ AC /\!/ PS_0 \quad \cdots ③$$

$$\therefore \begin{cases} \angle DAC = \angle DPS_0 = \angle APQ_0 \\ \angle ACB = \angle Q_0RB = \angle CRS_0 \end{cases} \quad \cdots ④$$

直線 AC と、線分 PQ_0、線分 RS_0 の交点を、それぞれ U,V とすると③,④ より

$$PU = AU,\ UQ_0 = VR = VC \text{ かつ } Q_0R = UV$$

$$\therefore PQ_0 + Q_0R = PU + UQ_0 + Q_0R = AU + UV + VC = AC$$

ところが、(1)、② より A,B,C,D は、円；$x^2+y^2=5$ 上にあるから

$$AC = 2\sqrt{5}$$

したがって、平行四辺形の周りの長さの最大値は

$$4\sqrt{5}$$ $\cdots$(答)