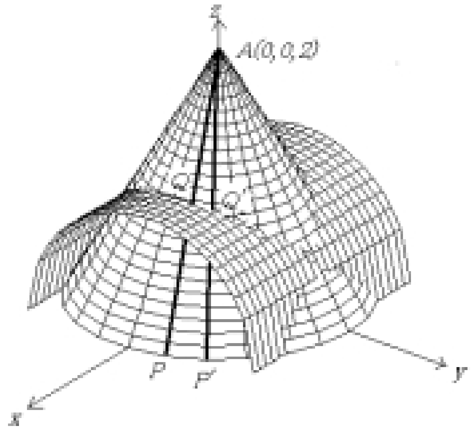
$\boxed{11}$

【解答】

$x^2 + y^2 = \dfrac{4}{3}, z = 0$ 上の点を



$$P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta, \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta, 0\right)$$ とおき、

直線 AP と円柱の交点のうち、点 A に近い方の点を Q(x, y, z) とする。Q は直線 AP 上より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

Q は円柱上より

①,② より $\qquad y^2 + z^2 = 1 \qquad \cdots ②$

$$\left(t \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2 + (2 - 2t)^2 = 1$$
$$\therefore (4\sin^2\theta + 12)t^2 - 24t + 9 = 0$$
$$\therefore t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 9(4\sin^2\theta + 12)}}{4\sin^2\theta + 12} = \frac{12 \pm \sqrt{36(1 - \sin^2\theta)}}{4\sin^2\theta + 12} = \frac{12 \pm 6|\cos\theta|}{4\sin^2\theta + 12}$$

対称性より $x \geqq 0, y \geqq 0$ に含まれる円錐の側面積を 4 倍すれば良いから、$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ としてよい。このとき, Q のパラメーターは

$$t = \frac{12 - 6\cos\theta}{4\sin^2\theta + 12} = \frac{3}{2(2 + \cos\theta)} \qquad \cdots ③$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| &= |t| \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}|t| \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{2(2 + \cos\theta)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2 + \cos\theta} \qquad \cdots ④\end{aligned}$$

母線と半径の比が 2 : 1 なので、$\angle\mathrm{POP'} = \varDelta\theta$ のとき、$\angle\mathrm{QAQ'} = \dfrac{1}{2}\varDelta\theta$ となる。よって求める面積は、

$$\begin{aligned}S &= 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2 \frac{1}{2}d\theta \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2 + \cos\theta)^2}d\theta \qquad \cdots ⑤\end{aligned}$$

ここで次の関係式を使う。

$$\left(\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}\right)' = \frac{2\cos\theta+1}{(2+\cos\theta)^2} \qquad \cdots(*)$$

さらに

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}d\theta, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(2+\cos\theta)^2}d\theta$$

とおくと $(*)$ より

$$2J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta+1}{(2+\cos\theta)^2}d\theta = \left[\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \qquad \cdots⑥$$

また

$$2I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+\cos\theta}{(2+\cos\theta)^2}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$$

ここで $\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}、\quad d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt、\quad \begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$$

$$\therefore\ 2I + J = \int_0^1 \frac{2}{t^2+3}dt$$

さらに、$t = \sqrt{3}\tan u$ とおくと

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du、\quad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline u & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$\therefore\ 2I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{3(1+\tan^2 u)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 u}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \qquad \cdots⑦$$

⑥,⑦ より

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi - \frac{1}{6}$$

⑤ へ代入して

$$S = 12\left(\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi - \frac{1}{6}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi - 2 \qquad \cdots(答)$$

Comment

5 年ほど前、東大オープンに「円錐を、平面 π できった時、π の下側になる円錐の側面積を求めよ。」という問題を出題しました。その問題の発展です。