$\boxed{13}$

【解答】

$P(X, 0, 0), Q(0, Y, 1)$ とおくと、$PQ = 2$ より

$$PQ^2 = X^2 + Y^2 + 1 = 4 \qquad \therefore X^2 + Y^2 = 3 \qquad \cdots ①$$

線分 PQ を $t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を $R(x, y, z)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)X \\ tY \\ t \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (1-t)X \\ y = tY \\ z = t \end{cases} \qquad \cdots ②$$

①,② より

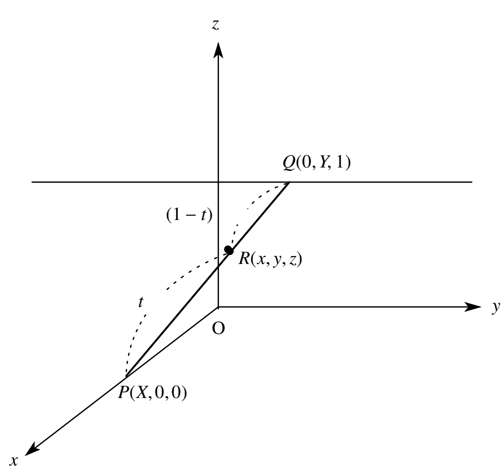
$$\left(\frac{x}{1-t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 = 3 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{\{\sqrt{3}(1-t)\}^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3}t)^2} = 1 \qquad \cdots ③$$

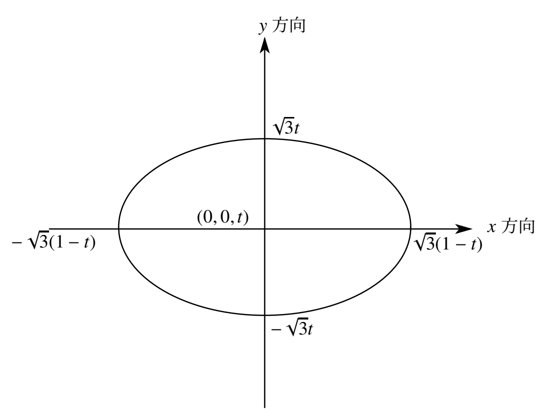
よって点 R の描く図形は平面 $z = t$ 上の楕円となる。これは C の平面 $z = t$ による断面と一致するから、求める空間領域の平面 $z = t$ $(0 < t < 1)$ による断面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \pi\sqrt{3}(1-t)\sqrt{3}t = 3\pi t(1-t) \qquad \cdots ④$$

ゆえに、求める体積を V とすると

$$V = \int_0^1 S(t)\,dt = 3\pi\int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots (答)$$





平面 $z = t$ による断面