15 **【解答】** 仮定より

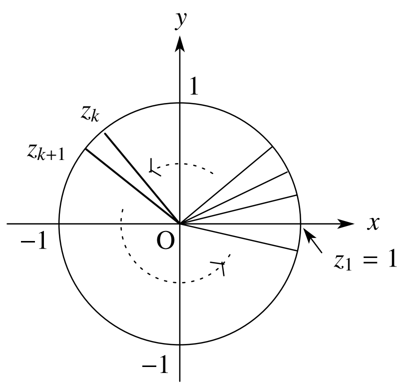
$$z_k = \cos\frac{2\pi}{n}(k-1) + i\sin\frac{2\pi}{n}(k-1)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}-1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k}{\cos\frac{2\pi}{n}(k-1) + i\sin\frac{2\pi}{n}(k-1)}-1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right)\\
&= n\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right) \qquad \cdots①
\end{aligned}$$

ここで $\frac{2\pi}{n}=\theta$ とおくと、$n\to\infty$ の時 $\theta\to 0$ だから

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right) \qquad ☜① より\\
&= 2\pi\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta} + i\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\\
&= 2\pi i \qquad \cdots(答)
\end{aligned}$$



また、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_{k+1}-z_k}{{z_k}^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}-1\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k} \qquad \cdots②$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\frac{2\pi}{n}(k-1) - i\sin\frac{2\pi}{n}(k-1)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{k-1}$$

右辺は、初項 1, 項比 $r=\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$, 項数 n の等比数列の和であるから

$$r^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1 \text{ より}\quad n \geqq 2 \text{ の時、}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k} = \frac{1-r^n}{1-r} = 0$$

よって② より

$$J = 0 \qquad \cdots(答)$$