$\boxed{16}$【解答】

(i) $(*)$ が虚数解を持つとき, 3 つの解を

$$\begin{cases} \alpha = p + qi \\ \beta = p - qi \qquad (p, q, r \text{ は実数}) \\ \gamma = r \end{cases}$$

とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} (p+qi) + (p-qi) + r = 0 \\ (p+qi)(p-qi) + r(p+qi) + r(p-qi) = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2p + r = 0 \\ p^2 - \dfrac{q^2}{3} = 1 \end{cases} \qquad \cdots ①$$

実数 x に対し、関数 $f(x) = -x^3 + 3x$ を考えると、$(*)$ の実数解は、$y = f(x)$ と $y = k$ の交点の x 座標となる。よってグラフより

$$r < -2$$

ゆえに

$$|\gamma + 2| - |\gamma - 2| = |r + 2| - |r - 2| = -(r+2) + (r-2) = -4 \qquad \cdots ②$$

また① より、$(*)$ の虚数解は、pq 平面上において

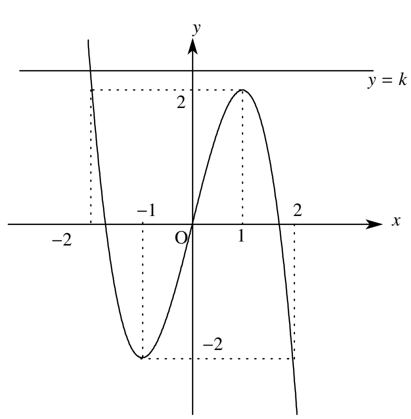
$$\text{双曲線}\, C;\, p^2 - \frac{q^2}{3} = 1 \ (p > 1)$$

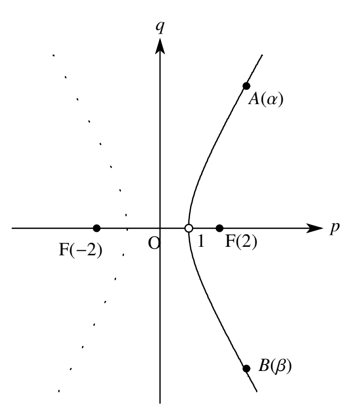
上にある。C の焦点は $(\pm 2, 0)$ だから,

$$|\alpha + 2| - |\alpha - 2| = |\beta + 2| - |\beta - 2| = 2 \qquad \cdots ③$$

②,③ より

$$|\alpha + 2| + |\beta + 2| + |\gamma + 2| - |\alpha - 2| - |\beta - 2| - |\gamma - 2| = 2 + 2 + (-4) = 0$$





(ii) $(*)$ が 3 つの実数解を持つとき, グラフより

$$-2 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq 2$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&|\alpha+2|+|\beta+2|+|\gamma+2|-|\alpha-2|-|\beta-2|-|\gamma-2| \\
&=(\alpha+2)+(\beta+2)+(\gamma+2)+(\alpha-2)+(\beta-2)+(\gamma-2) \\
&=2(\alpha+\beta+\gamma)=0
\end{aligned}$$

(i),(ii) より

$$|\alpha+2|+|\beta+2|+|\gamma+2|-|\alpha-2|-|\beta-2|-|\gamma-2|=0 \qquad \cdots(答)$$