$\boxed{17}$ 【解答】3 つの解を z_1, z_2, z_3 とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 & \cdots ① \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = -(3\sqrt{3} + 3i) & \cdots ② \\ z_1 z_2 z_3 = -\alpha & \cdots ③ \end{cases}$$

z_1, z_2, z_3 は一直線状に並ぶので、$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ より、z_1, z_2, z_3 は O を通る直線上にある。よって

$$z_1 = a\omega, z_2 = b\omega, z_3 = c\,\omega \ (|\omega| = 1,\ a, b, c \text{ 実数})$$

とおける。このとき①,②,③ より

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & \cdots ①' \\ (ab + bc + ca)\omega^2 = -(3\sqrt{3} + 3i) & \cdots ②' \\ abc\,\omega^3 = -\alpha & \cdots ③' \end{cases}$$

①′ より

$$ab + bc + ca = ab - (a + b)^2 = -(a^2 + ab + b^2) \leqq 0$$

等号成立は、$a = b = c = 0$ の時だが、これは ②′ と矛盾するので、$ab + bc + ca < 0$。ゆえに、②′ より

$$\begin{cases} \arg\{(ab + bc + ca)\omega^2\} = 180^\circ + 2\arg\omega = \arg\{-(3\sqrt{3} + 3i)\} = 210^\circ \\ \left|(ab + bc + ca)\omega^2\right| = -(ab + bc + ca) = \left|-(3\sqrt{3} + 3i)\right| = 6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \arg\omega = 15^\circ \\ ab + bc + ca = -6 \end{cases} \quad \cdots ④$$

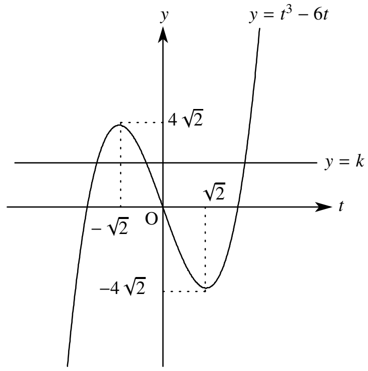
よって、$abc = k$ とおくと、a, b, c は 3 次方程式

$$t^3 - 6t - k = 0 \iff t^3 - 6t = k$$

の 3 つの実数解となる。$f(t) = t^3 - 6t$ とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 6 = 3(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$$

t	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$



よって a, b, c が全て実数となる k の値の範囲は

$$-4\sqrt{2} \leqq k \leqq 4\sqrt{2} \qquad \cdots ⑤$$

③′ より、$abc \fallingdotseq 0 \Longleftrightarrow \alpha \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{cases} |\alpha| = |abc| \\ \arg\ \alpha = 180^\circ + \arg\{abc\} + 3\arg\ \omega = 225^\circ + \arg\{abc\} \end{cases}$$

④,⑤ より,$\alpha \fallingdotseq 0$ のとき

$$0 < |\alpha| \leqq 4\sqrt{2},\ \arg\alpha = 225^\circ \text{ または } 45^\circ$$

$\alpha = 0$ の時も明らかに題意をみたすから α の存在範囲は図の太線の線分 (両端含む)