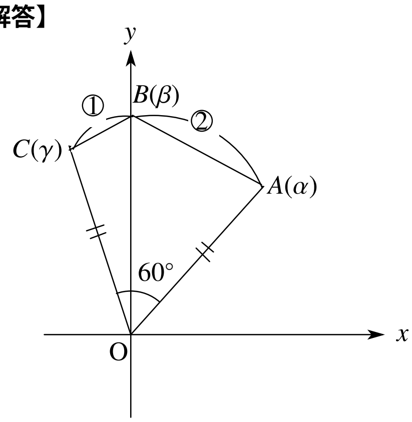
$\boxed{19}$ **【解答】**



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \xrightarrow[60^\circ\text{回転}]{} \overrightarrow{\mathrm{OC}} \text{より}$$

$$\gamma = (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha \qquad \cdots ①$$

四角形 $OABC$ は円に内接するので、$\angle \mathrm{ABC} = 120^\circ$

$$\text{よって } \overrightarrow{\mathrm{BC}} \xrightarrow[2\text{ 倍拡大}]{120^\circ\text{回転}} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad \text{となるので}$$

$$\alpha - \beta = 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)(\gamma - \beta)$$

$$\iff \alpha = (2-\sqrt{3}i)\beta + (-1+\sqrt{3}i)\gamma \qquad \cdots ②$$

①,② より

$$\alpha = (2-\sqrt{3}i)\beta + (-1+\sqrt{3}i)\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha \iff \beta = \frac{3}{2-\sqrt{3}i}\alpha$$

β は純虚数だから、$\alpha = (2-\sqrt{3}i)ik = (\sqrt{3}+2i)k$, $\beta = 3ki$(k は実数)$\cdots$③ とおける。
このとき、① より

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma &= \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha \\ &= \frac{1-\sqrt{3}i}{2}(\sqrt{3}+2i)k \\ &= \frac{3\sqrt{3}-i}{2}k\end{aligned}$$

k は実数だから

$$(A\text{ と}C\text{ の実数成分の差}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}|k|$$

一方、OB // 虚数軸より

$$\begin{aligned}\text{四角形 }OABC\text{ の面積S} &= \frac{1}{2}\cdot(OB\text{ の長さ})\cdot(A\text{ と }C\text{ の実数成分の差}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left|3k\right|\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}|k| = \frac{9\sqrt{3}}{4}|k|^2\end{aligned}$$

仮定より $\mathrm{S} = 9\sqrt{3}$ だから

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}|k|^2 = 9\sqrt{3}$$
$$\therefore \quad k = \pm 2$$

したがって α,β,γ は順に、

$$\alpha = \pm 2\sqrt{3} \pm 4i,\ \beta = \pm 6i,\ \gamma = \mp\sqrt{3} \pm 5i \text{ (複号同順)} \qquad \cdots(\text{答})$$